رابعًا: تصنيف نماذج صفوف الانتظار (مدخل لفهم النماذج الرياضية): قبل التطرق إلى الخصائص الرياضية التي تميز نظم صفوف الانتظار، من الضروري أن نتوقف عند نقطة محورية تساعدنا على فهم هذه النظم بشكل منظم، وهي تصنيف نماذج صفوف الانتظار، لان واقع الأنظمة الخدمية – سواء كانت في البنوك، المستشفيات، شركات الاتصالات، أو حتى الأنظمة الحاسوبية – يعكس تنوعًا في الخصائص التشغيلية، منها:

- نمط وصول العملاء (هل هو عشوائي أم منتظم)؟
- عدد الخوادم المتاحة لتقديم الخدمة.
- طبيعة وقت الخدمة (هل هو ثابت أم متغير)؟
- عدد صفوف الانتظار (هل هو طابور واحد أم عدة طوابير)؟
- حدود النظام (هل هو مفتوح أم محدود السعة)؟

هذا التنوع فرض الحاجة إلى **تصنيف علمي موحّد** يساعد الباحثين والممارسين على:

- تحديد نوع النموذج المناسب لكل حالة
- فهم الفرضيات التي يقوم عليها النموذج
- اختيار المعادلات والأدوات التحليلية الدقيقة

ولأجل هذا الغرض، تم تطوير ما يُعرف بـــ **ترميز كيندل (Kendall's Notation)** ، وهو نظام مختصر يعبّر عن خصائص نموذج صف الانتظار من خلال رموز محددة وخصائص معينة ويتكون من الرموز

أمثلة على نماذج شائعة:

النموذج	الشرح المبسط	مثال واقعي	ملاحظة/فائدة
(M/M/1)	وصول وخدمة عشوائية + خادم واحد	شباك تذاكر في سينما أو محطة قطار	أبسط نموذج وأشهرهم، يُستخدم كأساس لفهم باقي النماذج
(M/G/1)	وصول عشوائي + خدمة بتوزيع عام (غير أسي) + خادم واحد	مركز نسخ أوراق فيه خدمات متنوعة وتستغرق أزمنة مختلفة	يُستخدم عندما تختلف أزمنة الخدمة بشكل واضح
(G/M/1)	وصول بتوزيع عام (غير أسي) + خدمة عشوائية + خادم واحد	مطعم فيه فترات ازدحام وهدوء، وخدمة بسيطة	مناسب للأنظمة ذات الطلب غير المنتظم لكن الخدمة سريعة
(M/D/1)	وصول عشوائي + خدمة ثابتة + خادم واحد	جهاز آلي يعطي بطاقات دخول بسرعة ثابتة	مفيد للأنظمة المؤتمتة أو الصناعية الدقيقة
(M/M/C)	من c وصول وخدمة عشوائية + عدد الخوادم	بنك فيه عدة موظفين على الشبابيك	يعكس الأنظمة متعددة الموظفين، مثل مراكز الاتصال أو البنوك
(M/M/1/K)	لكن بسعة محدودة للنظام M/M/1 مثل (وحدات K)	موقف سيارات صغير، يُرفض دخول سيارات إضافية إذا امتلأ	يُستخدم عندما يكون هناك حد أقصى للعملاء في النظام
(M/M/1/∞/N)	لكن بعدد محدود من M/M/1 مثل (N) العملاء الكلي المحتمل	مركز خدمة مخصص لـ 50 موظف فقط	مفيد عندما يكون المصدر (عدد العملاء المحتملين) محدودًا

خامسا: وصف النموذج الرياضي لنظام صفوف الانتظار: تنطلق النماذج الرياضية لنظرية صفوف الانتظار من فرضية أساسية مفادها أن العملاء أو الوحدات تصل إلى مراكز الخدمة وفق نمط معين، وقد تكون عملية الوصول منظمة بمعدل ثابت خلال فترة زمنية محددة، كما هو الحال في إقلاع الطائرات أو وصول السفن إلى الموانئ، أو قد تكون عشوائية كما في حالات التسوق من المراكز التجارية أو شراء التذاكر من دور السينما، هذا التباين في نمط الوصول يستدعي تبني نماذج رياضية دقيقة تسهم في توصيف الظاهرة وتحليلها، و تميز قوانين صفوف الانتظار، أهمها:

- ✓ أن معدل وصول الوحدات إلى النظام يُمثل بالرمز(λ) ، ويفترض أنه يتبع توزيع بواسون (Poisson Distribution) ، وهو ما يعكس الطبيعة العشوائية لوصول الوحدات في العديد من النظم الواقعية.
- ✓ أن معدل تقديم الخدمة يُمثل بالرمز(μ) ، ويفترض أنه يتبع التوزيع الأسي(Exponential Distribution) ، وهو ما يعكس فرضية أن زمن الخدمة لا يعتمد على الزمن السابق.
- ✓ يجب أن يكون معدل الوصول (λ) أقل من معدل تقديم الخدمة(μ) ، أي أن النظام لا يعاني من ازدحام دائم، وهو شرط أساسي لتحقيق الاستقرار في النموذج، ويُعبر عنه بالعلاقة.($\lambda < \mu$)
- ✓ يُفترض كذلك أن نظام تقديم الخدمة يتبع سياسة "من يصل أولًا، يُخدم أولًا - First Come, First Served) " (FCFS، وهو النظام الأكثر شيوعًا في التطبيقات الخدمية اليومية.

ولتسهيل التعامل مع النماذج الرياضية في هذا السياق، يتم استخدام مجموعة من الرموز القياسية التي تعبر عن أهم مؤشرات الأداء، وهي كالآتي:

- ✓ (n) تمثل عدد الوحدات في النظام (الوحدات في صف الانتظار + الوحدات في مراكز الخدمة)
- ✓ (λ) تمثل عدد الوحدات القادمة للنظام في وحدة الزمن (معدل الوصول لكل وحدة زمنية)
- ✓ ($\boldsymbol{\mu}$) تمثل عدد الوحدات المغادرة من النظام التي قدمت لها الخدمة (معدل الخدمة لكل وحدة زمنية)
- ✓ $\boldsymbol{P}$: تمثل احتمال وجود وحدات في النظام (معامل التشغيل).
- ✓ $\boldsymbol{P_0}$: تمثل احتمال عدم وجود وحدات في النظام (نسبة الوقت غير مستغل).
- ✓ $\boldsymbol{L_s}$: تمثل متوسط عدد الوحدات المتوقع في النظام.
- ✓ $\boldsymbol{L_q}$: تمثل متوسط عدد الوحدات المتوقع في صف الانتظار.
- ✓ $\boldsymbol{W_S}$: تمثل متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في النظام
- ✓ $\boldsymbol{W_q}$: تمثل متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في صف الانتظار.

وأخير يمكن دراسة ومعالجة مشاكل الانتظار في الحالات التالية

أ- نموذج صف الانتظار بمركز خدمة واحد (قناة واحدة – مرحلة واحدة):

يعد هذا النموذج من ابسط الأنواع، ويسمى أحيانا بنظام القناة الواحدة، إذ تصل الوحدات إلى مركز الخدمة بشكل متتالي في صف واحد، وتقدم لها الخدمة بمرحلة واحدة، ومثال ذلك وصول السيارات العاطلة إلى ورشة التصليح وفيها مصلح واحد او ماكينة الصراف الآلي أو طابور العملاء الذين يتنظرون خدمة من نفس الموظف.



ومن اجل معالجة هذا النوع من النماذج تقوم بتوضيح العلاقات الرياضية والاحتمالية التالية:

$\boldsymbol{P}$: تمثل احتمال وجود وحدات في النظام (معامل التشغيل). $\boldsymbol{P = \frac{\lambda}{\mu}}$

$\boldsymbol{P_0}$: تمثل احتمال عدم وجود وحدات في النظام (نسبة الوقت غير مستغل). $\boldsymbol{P_0 = 1 - P = 1 - \frac{\lambda}{\mu}}$

$\boldsymbol{L_s}$: تمثل متوسط عدد الوحدات المتوقع في النظام.

- ✓ $\boldsymbol{L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}}$.

$\boldsymbol{L_q}$: تمثل متوسط عدد الوحدات المتوقع في صف الانتظار.

$$\boldsymbol{L_q = P \times L_s = P \times \left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \times \left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right) = \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2 - \mu.\lambda}\right)}$$

$\boldsymbol{W_S}$: تمثل متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في النظام

- ✓ $\boldsymbol{W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}}$.

$\boldsymbol{W_q}$: تمثل متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في صف الانتظار

- ✓ $\boldsymbol{W_q = P \times W_s = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \times \left(\frac{1}{\mu - \lambda}\right) = \left(\frac{\lambda}{\mu^2 - \mu.\lambda}\right)}$

مثال: يقوم الموظف المسؤول عن تسليم القروض للزبائن في أحد البنوك، من تقديم الخدمة للزبائن بمعدل 40 زبون بالساعة في المتوسط، وان معدل وصول الزبائن للبنك هو 28 زبون بالساعة في المتوسط: المطلوب حسابك

1. احتمال أن يكون الموظف مشغول؟
2. نسبة الوقت الضائع (غير المستغل)؟
3. متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام؟
4. متوسط عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار؟
5. متوسط وقت الانتظار المتوقع في النظام؟
6. متوسط وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار؟

الحل

معدل الوصول $(\boldsymbol{\lambda})$ = 28 زبون بالساعة

معدل تقديم الخدمة $(\boldsymbol{\mu})$ = 40 زبون بالساعة

1. حساب احتمال أن يكون الموظف مشغول؟

✓ $\boldsymbol{P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{28}{40} = 0.7}$

2. حساب نسبة الوقت الضائع (غير المستغل)؟

✓ $\boldsymbol{P_0 = 1 - P = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - 0.7 = 0.3}$

3. متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام؟

✓ $\boldsymbol{L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{28}{40-28} = 2.33 \approx 2}$

4. متوسط عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار؟

✓ $\boldsymbol{L_q = P \times L_s = P \times \left(\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\right) = \left(\frac{28}{40}\right) \times \left(\frac{28}{40-28}\right) = 0.7 \times 2.33 \approx 2}$

5. متوسط وقت الانتظار المتوقع في النظام؟

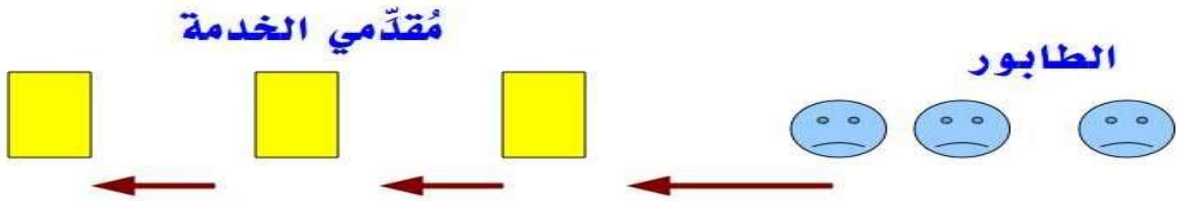
✓ $\boldsymbol{W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{40-28} = \frac{1}{12}}$ ساعة.

6. متوسط وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار؟

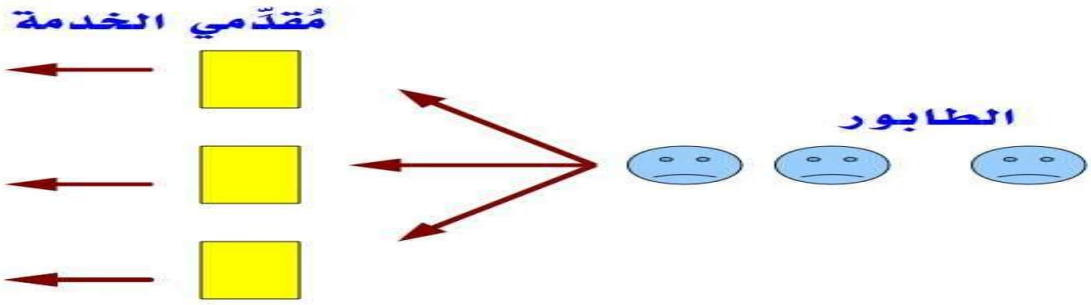
✓ $\boldsymbol{W_q = P \times W_s = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \times \left(\frac{1}{\mu-\lambda}\right) = \left(\frac{28}{40}\right) \times \left(\frac{1}{12}\right) = \frac{28}{480}}$ ساعة $\boldsymbol{= 3.5}$ دقيقة.

ب- **نموذج صف الانتظار بأكثر من مركز خدمة (S) :** يعد نموذج صف الانتظار بأكثر من مركز خدمة أكثر تعقيداً من النموذج الأول، إذ يكون تقديم الخدمة بموجب هذا النموذج وفقاً لأحد الاساليب الموضحة أدناه.

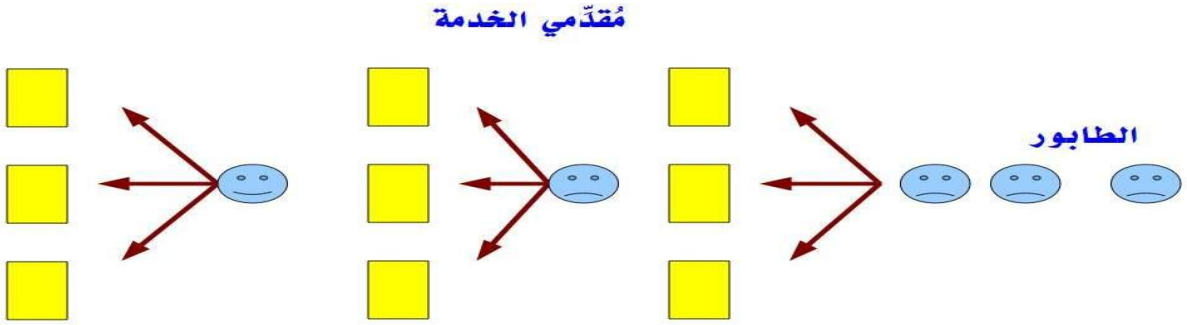
أ- **قناة واحدة – مراحل متعددة:** في هذه الحالة يمر العميل أو الشيء الذي ستتم عليه العملية من مرحلة لأخرى حتى يحصل على الخدمة المطلوبة، مثال ذلك أن تكون المرحلة الأولى هي مرحلة التأكد من صحة البيانات والثانية هي مرحلة استخراج وثيقة ما والثالثة هي مرحلة التوثيق، أو أن تكون عملية صناعية فتكون الأولى هي مرحلة التقطيع والثانية هي مرحلة الدهان والثالثة هي مرحلة الفحص وهكذا.



ب-**قنوات متعددة – مرحلة واحدة:** في هذه الحالة تتكون الخدمة من مرحلة واحدة ولكن يوجد أكثر من مقدم للخدمة، مثال ذلك طابور البنك الذي ينتهي إلى أكثر من موظف، أو طابور الخامات التي تنتظر التشغيل في ماكينة أ أو ب أو ج.



ت-**قنوات متعددة – مراحل متعددة:** هذه الحالة هي شبيهة بالحالة السابقة ولكنها متعددة المراحل، أي أن كلمرحلة تتكون من أكثر من مقدم للخدمة.



و فيما يأتي أهم العلاقات الرياضية و الاحتمالية الخاصة بهذا النموذج:

- **حساب احتمال وجود وحدات في النظام (النظام يعمل) تحسب** حسب القانون التالي: $\boldsymbol{P = \frac{\lambda}{\mu}}$

- **حساب احتمال عدم وجود وحدات في النظام (النظام معطل)**، ويمكن أن نحسب قيمته من الجداول الخاصة بهذا النموذج اعتمادا على قيمة (P) وعدد مراكز الخدمة (S)

- **متوسط عدد الوحدات المتوقع في صف الانتظار حسب القانون التالي:** $\boldsymbol{L_q = \frac{(p)^s \times \lambda \times \mu \times P_0}{(s-1)! \times ((s \times \mu) - \lambda)^2}}$

حيث تمثل (S) عدد مراكز الخدمة

- **متوسط عدد الوحدات المتوقع في النظام حسب القانون التالي:**

$$\boldsymbol{L_s = L_q + P = \frac{(p)^s \times \lambda \times \mu \times P_0}{(s-1)! \times ((s \times \mu) - \lambda)^2} + \frac{\lambda}{\mu}}$$

- **متوسط وقت الانتظار للوحدات المتوقع في صف الانتظار. تحسب حسب**

القانون التالي: $\boldsymbol{W_q = \frac{L_q}{\lambda}}$

- **متوسط وقت الانتظار للوحدات المتوقع في النظام وتحسب حسب**

القانون: $\boldsymbol{W_s = W_q + \frac{1}{\mu}}$ ***Min***

مثال

في أحد البنوك الجزائرية، يقوم إثنين من الموظفين بتسليم القروض للزبائن بمعدل (30) زبون بالساعة في المتوسط، وأن معدل وصول الزبائن للمصرف هو (24) زبون بالساعة في المتوسط.

المطلوب جد ما يأتي:

والمطلوب: حدد ما يلي:

1- احتمال وجود زبائن في النظام؟

2-احتمال عدم وجود زبائن في النظام؟

3- متوسط عدد الزبائن في صف الانتظار؟

4-متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام؟

5-متوسط وقت الانتظار للزبائن المتوقع في صف الانتظار؟

6-متوسط وقت الانتظار للزبائن المتوقع في النظام؟

الحل

1- احتمال وجود زبائن في النظام

تحسب حسب القانون التالي: $\boldsymbol{P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{24}{30} = 0.8}$

2- حساب احتمال عدم وجود زبائن في النظام $\boldsymbol{P_0}$

بما أن عدد مراكز الخدمة أكبر من 1 اي 02 مراكز خدمة، فانه يمكن استنتاج قيمة $\boldsymbol{p_0}$ من الجداول الخاصة به.

ومن الجدل وحسب الملحق المرفق في الامتحان فان قيمة $\boldsymbol{p_0 = 0.4286}$ المقابلة لـ $\boldsymbol{P = 0.8}$

3- حساب متوسط عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار حسب القانون التالي:

$$\boldsymbol{L_q = \frac{(p)^s \times \lambda \times \mu \times P_0}{(s-1)! \times ((s \times \mu) - \lambda)^2}} = \frac{(0.8)^2 \times 24 \times 30 \times 0.4286}{(2-1)! \times ((2 \times 30) - 24)^2} = \approx 0.153805 \approx 0.15$$

يمكننا أن نعبر عن القيمة 0.153805 بأنها الاحتمالية لوجود زبونين في النظام في نفس الوقت، أو احتمالية حدوث ازدحام في الخدمة أو النظام المقدم

4- متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام حسب القانون التالي:

$$\boldsymbol{L_s = L_q + P} = 0.153805 + \boldsymbol{0.8} = 0.953805.$$

هذا يعني أنه في المتوسط، سيكون هناك زبون واحد على وشك الحصول على الخدمة

5- متوسط وقت الانتظار للزبائن المتوقع في صف الانتظار.

تحسب حسب القانون التالي: ساعة $\boldsymbol{W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.153805}{24}} \approx 0.00641$

وبما أن قيمة Wq حوالي 0.00641، فإن هذا يعني أن المتوسط الزمني لانتظار العملاء في صف الانتظار يقترب من 0.00641 ساعة، أو ما يعادل حوالي 23.1 ثانية .

6- متوسط وقت الانتظار للزبائن المتوقع في النظام.

حسب القانون: ساعة $\boldsymbol{W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.00641 + \frac{1}{30}} \approx 0.03974$

القيمة Ws تمثل المتوسط المتوقع لزمن وجود الزبون في النظام بما في ذلك وقت الانتظار في الصف ووقت الخدمة الفعلي. بمعنى آخر، إذا كان زبون يدخل النظام، فمن المتوقع أن يقضي متوسط الزمن الذي يقضيه في النظام - بما في ذلك الصف وخدمته - حوالي 0.03974 ساعة أو ما يعادل حوالي 2.3844 دقيقة في المتوسط.