2° On suppose l'espace E réflexif et que l'image par T de toute suite bornée faiblement convergente est une suite fortement convergente. Considérons une suite bornée de E, soit (x_n); d'après 3.17.1 il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge faiblement. D'après l'hypothèse, la suite (Tx_{n_k}) converge fortement et ceci prouve que T est compact.

Ex 7 3° On considère un espace de Hilbert E admettant une base hilbertienne dénombrable $(e_n)_{n\geq 0}$, un espace de Banach F et une application linéaire continue: $T: E \to F$ telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|$ soit convergente, montrer alors que T est un opérateur compact [utiliser l'exercice précédent : si (x_j) est une suite de E convergeant faiblement vers 0, on pourra écrire pour $p \in \mathbb{N}$.

$$Tx_j = \sum_{n=0}^{p} (x_j, e_n) Te_n + \sum_{n=p+1}^{\infty} (x_j, e_n) Te_n$$

et majorer le dernier terme grâce à Cauchy-Schwarz.]

Sol: posons $A = \sum_{j=0}^{p} (x_j, e_n) Te_n$, $B = \sum_{n=p+1}^{\infty} (x_j, e_n) Te_n$.

La suite $(\|Te_n\| \to 0)$, donc est bornée par conséquent $\|A\| \leq c \max_{0\leq n\leq p} |(x_j, e_n)|$

On a d'autre part $\|B\| \leq \left(\sum_{n=p+1}^{\infty} |(x_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=p+1}^{\infty} \|Te_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x_j\| \left(\sum_{n=p+1} \|Te_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

La suite (x_j) convergeant faiblement vers 0 est fortement bornée, d'où une constante $c \geq 0$ telle que $\|B\| \leq c \left(\sum_{n=p+1}^{\infty} \|Te_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Soit $\varepsilon > 0$, vu l'hypothèse il existe un entier tq: $\|B\| \leq \varepsilon$ et la suite (x_j) convergeant faiblement vers 0, il existe un entier k tq: $\|A\| \leq \varepsilon$ pour $j \geq k$, d'où $\|Tx_j\| \leq 2\varepsilon$ pour $j \geq k$, c.à.d $\|Tx_j\| \to 0$, alors d'après l'ex précédent T est compact.

Ex 8: Soient $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ tels que $1/r = 1/p + 1/q$, $y \in l^q(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et: $T: l^p(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \to l^r(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ l'application linéaire continue $x \mapsto xy$. Montrer que T est un compact, ssi, $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ (condition vérifiée si q est fini).

[Pour démontrer la condition nécessaire lorsque $q = +\infty$, utiliser l'alternative de Fredholm; pour la condition suffisante vérifier que T est la limite d'une suite d'opérateurs de rang fini

Sol: 1er cas: $q < +\infty$.

soit $F = \{T_y : y \in l^q\}$ une famille: $T_y: l^q \to l^r$. $T_y(x) = Tx = xy = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$

on a: $\forall f_1 \in L^p, f_2 \in L_q$ on a: $f_1 f_2 \in L^r$: $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$ et $\|f_1 f_2\|_r \leq \|f_1\|_p \|f_2\|_q$

donc $\|T_y(x)\| \leq \left(\sum_{i=1} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|y\|_{l^q}$ $\forall x \in B(0,1) \to (T_y)_y$ est borné, continue

Sol Ex9 :

1° a) ~~Le~~ nombre λ est valeur propre de B, ssi $\exists\ x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^2$ tel que $Bx = \lambda x$. on doit donc avoir $x_{n+1} = \lambda x_n\ \forall n \geq 1$; donc $x_n = \lambda^{n-1} x_1\ \forall n \geq 1$. Si $|\lambda| < 1$, le vecteur $u_\lambda = (1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1}, \dots)$ est dans ℓ^2 et vérifie $B(u_\lambda) = \lambda u_\lambda$. Donc λ est valeur propre de B.

b) on sait que $r(B) \leq \|B\| = 1$, cela signifie que pour le spectre $\sigma(B)$, on a $\sigma(B) \subseteq \bar{D}$, D étant le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1. Mais on a vu au a) que tout $\lambda \in D$ est valeur propre de B : $D \subseteq \sigma_p(B)$. Comme le spectre $\sigma(B)$ est fermé (il est compact) et contient $\sigma_p(B)$, on en déduit que $\sigma(B) = \bar{D}$.

2° Comme S est injectif, 0 n'est pas valeur propre de S. Maintenant, si $\lambda \neq 0$ était valeur propre de S, on aurait un $x = (x_n)_{n\geq 1}$ non nul ~~pour tout $n \geq 2$, donc $x_1 = 0$ pour tout $n \geq 1$~~ ~~ce qui contredit~~ tel que $(0, x_1, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$

ce qui implique $x_1 = 0$ et $x_{n-1} = \lambda x_n$ pour tout $n \geq 2$ donc $x_n = 0\ \forall n \geq 1$ ce qui contredit $x \neq 0$.
Donc S ne possède aucune valeur propre.

3° Si $\lambda \notin \sigma(T)$, l'opérateur $T - \lambda I$ est inversible ; il existe donc $R_\lambda \in \mathcal{L}(H)$ tq $(T - \lambda I) R_\lambda = R_\lambda (T - \lambda I) = I$. on obtient $R_\lambda^* (T^* - \bar{\lambda} I) = (T^* - \bar{\lambda} I) R_\lambda^* = I$, en prenant les adjoints ; donc $\bar{\lambda} \notin \sigma(T^*)$ on a donc $\sigma(T^*) \subseteq \widetilde{\sigma(T)}$.
Inversement, cette inclusion appliquée à T^* au lieu de T donne $\sigma(T) = \sigma(T^{**}) \subseteq \widetilde{\sigma(T^*)}$ puisque $T^{**} = T$. Comme cela s'écrit aussi $\widetilde{\sigma(T)} \subseteq \sigma(T^*)$, cela donne l'égalité.

4° on a $S = B^*$ donc $\sigma(S) = \widetilde{\sigma(B)} = \widetilde{\bar{D}} = \bar{D}$.

Donc $\|T_y(x) - T_y(x')\|_r \le C \|x - x'\|_{l^2}$ $\Rightarrow$ T_y est uniformément continue $\Rightarrow$ équicontinue

d'après le Th d'Ascoli (T_y) est relativement compact $\forall x \in B(0,1)$

$\Leftrightarrow T(B(0,1))$ est relativement compact $\Leftrightarrow$ T est compact.

2ième cas : $q = +\infty$.

• C.N condition nécessaire :

Cherchons les valeurs propres de $T : l^p \to l^r$ l'équation $Tx = \lambda x$ s'écrit $x_n y_n = \lambda x_n$;

les valeurs propres sont donc les y_n et les s.espaces propres associés

$E_{y_n} = \{ x = (x_j) ;\ x_j = 0$ lorsque $y_j \ne y_n$

Si l'opérateur T est compact, E_{y_n} doit être de dimension finie lorsque $y_n \ne 0$ et o étant

le seul point d'accumulation eventuel du spectre, la suite (y_n) tend nécessairement $\to 0$.

• Réciproquement, si la suite (y_n) tend $\to 0$ montrons que T est compact en tant que limite

d'une suite d'opérateurs de rang fini. On note $T_n : l^p \to l^r$ l'opérateur de rang fini

$(T_n x)_j = x_j y_j$ si $\le j \le n$ et $(T_n x)_j = 0$ si $j > n$.

Calculons la norme de l'opérateur $T - T_n$ dans $L(l^p, l^r)$; soit x un point de la boule

unité de l^p, si r est fini on a d'après l'inégalité de Hölder

$\|(T - T_n)(x)\|_r = \left(\sum_{k>n} |x_k y_k|^r\right)^{1/r} \le \left(\sum_{k>n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ d'où $\|T - T_n\| \le \left(\sum |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$,

quantité qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$ car $y \in l^q$.

Si $r = \infty$.

$\|(T - T_n)(x)\|_\infty = \sup_{k>n} |x_k y_k| \le \sup_{k>n} |y_k|$

d'où $\|T - T_n\| \le \sup_{k>n} |y_k|$ quantité qui tend vers 0 d'après l'hypothèse.

E9 : (Shift and Backward shift) :

On considère l'espace $l_2(\mathbb{C})$ et B et S deux opérateurs $l_2 \to l_2$ définis par

$B(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$ appelé le backward shift (décalage à gauche)

$S(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ appelé shift (décalage à droite)

1° a. Montrer que tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$ est valeur propre de B.

b. Déterminer $\sigma(B)$ on pourra remarquer que $\|B\| = 1$.

2° Montrer que S ne possède aucune valeur propre (on pourra distinguer les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \ne 0$)

3° Soit H un espace de Hilbert. Montrer que pour tout opérateur $T : H \to H$,

on a $\sigma(T^*) = \widetilde{\sigma(T)}$, T^* étant l'adjoint de T, et $\tilde{A} = \{\bar{z} ;\ z \in A\}$ pour $A \subset \mathbb{C}$.

4° Montrer que le spectre de S est le disque unité fermé $\bar{D} = \{\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| \le 1\}$.