Série N° 1

Ex1: (Compact non vide arbitraire comme spectre.)

1°/ Soit $(c_n)_{n\ge1}$ une suite bornée de nombres complexes, et $T: l_2 \to l_2$ l'opérateur défini par $T(x) = (c_n x_n)_{n\ge1}$, pour tout $x=(x_n)_{n\ge1} \in l_2$.

a- Montrer que chaque c_n, $n\ge1$ est une valeur propre de T.

b- Montrer que si $\lambda \notin \overline{\{c_n, n\ge1\}}$, alors $\lambda \notin \sigma(T)$.

c- En déduire le spectre $\sigma(T)$ de T.

2°/ Soit K une partie compacte non vide de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un opérateur $T\in L(l_2)$ tq que $\sigma(T)=K$.

Sol: 1°/ a- Soit $(e_n)_{n\ge1}$ la base canonique de l_2. Comme, pour tout $n\ge1$, $T(e_n)=c_n e_n$, c_n est une valeur propre de T.

b- Soit $F=\overline{\{c_n ; n\ge1\}}$. C'est 1 fermé de $\mathbb{C}$, donc si $\lambda\notin F$, on a $dist(\lambda,F)=d>0$. Il en résulte que $\frac{1}{|c_n-\lambda|}\le \frac{1}{d}$ pour tout $n\ge1$. On peut définir une application linéaire $R_\lambda: l_2 \to l_2$ en posant $R_\lambda(x)=\left(\frac{1}{c_n-\lambda}x_n\right)_{n\ge1}$; elle est continue, de norme $\|R_\lambda\|\le 1/d$, et il est clair que $R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}$. Donc $\lambda\notin\sigma(T)$.

c- Comme le spectre est fermé et qu'il contient $\{c_n, n\ge1\}$, d'après a) il contient $\overline{\{c_n, n\ge1\}}$. Il résulte alors de b) qu'il lui est égal : $\sigma(T)=\overline{\{c_n, n\ge1\}}$.

2°/ Soit $(c_n)_{n\ge1}$ une suite dense dans K, de sorte que $\overline{\{c_n, n\ge1\}}=K$. Elle est bornée, donc si on lui associe l'opérateur T du 1°, celui-ci vérifie $\sigma(T)=K$.

Ex2:

Ex2: Soit E un espace de Banach, $T_n \in K(E)$ une (suite) d'opérateurs compacts convergeant vers $T\in K(E)$ dans l'espace de Banach $L(E)$ et $\lambda_n \in \sigma(T_n)$. Montrer que toute valeur d'adhérence de la suite (λ_n) appartient au spectre de T.

Sol: Soit λ une valeur d'adhérence de la suite λ_n. On peut supposer que $(\lambda_n)_n$ converge vers λ.

1°/ Supposons d'abord que $\lambda\ne0$; on peut alors supposer tous les λ_n non nuls ; ces λ_n sont des valeurs propres : il existe des $x_n\in E$, $\|x_n\|=1$, tels que $T_n x_n = \lambda_n x_n$.

L'opérateur T étant compact, on peut extraire de la suite $(x_n)_n$ une sous-suite, que nous noterons encore (x_n), telle que la suite (Tx_n) converge ; notons y sa limite.

La suite $T_n x_n$ converge vers y car :

(∗) $\|Tx_n - T_n x_n\| \le \|T-T_n\|\,\|x_n\| \le \|T-T_n\|$

Il en résulte que la suite $x_n = \frac{T x_n}{\lambda_n}$ converge vers y/λ; la suite $T x_n$ converge donc vers $T y/\lambda$. Il en résulte que $Ty = \lambda y$, et, y étant non nul car $\|y\| = |\lambda|$, λ est une valeur propre, ce qui prouve le résultat voulu.

2. $\lambda = 0$ et si E est de dimension infinie, $\{0\}$ est une valeur spectrale; en effet, si 0 est une valeur régulière, T est un isomorphisme de E sur E. si l'oper. $T^{-1}: E \to E$ est continue donc l'opérateur $Id_E = T^{-1} \circ T$ est compact et E est donc de dimension finie.

Si E est de dimension finie, toute valeur spectrale est une valeur propre; en effet, si $\ker T \neq \{0\} \Rightarrow \dim E = \dim \operatorname{Im} T \Rightarrow T$ est une bijection sur E. alors, 0 est une valeur propre; il existe donc des $(x_n) \in E$ $\|x_n\| = 1$, tels que $T_n x_n = \lambda_n x_n$ et, E étant de dimension finie, la suite (x_n) admet une sous-suite, $T_n x_n$ converge vers Ty ($\to y$), et, par conséquent, $Ty = \lambda y$ ou $\|y\| = 1$. ce qui prouve que λ est une valeur propre.

Ex3 : Soit $K: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$, on définit :

$$(Tf)(x) = \int_0^x K(x,t) f(t)\, dt$$

1) Montrer que, pour tous $x, x' \in [0,1]$, on a :

$$|Tf(x) - Tf(x')| \leq \left(\|K\|_\infty |x - x'| + \sup_{0 \leq t \leq 1} |K(x,t) - K(x',t)| \right) \|f\|_\infty ;$$

2° En déduire que $Tf \in \mathcal{C}([0,1])$, puis que $T: \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ est un opérateur compact (utiliser le Th d'Ascoli).

3° Montrer que $|T^n f(x)| \leq \|f\| \, \|K\|_\infty^n \frac{x^n}{n!}$ pour tout $x \in [0,1]$ et en déduire le rayon spectral de T. [on pourra utiliser que $n! \geq k^{n-k}$ $\forall n \geq k$ pour montrer que $(n!)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$].

3° En déduire le spectre de T.

Sol : 1° $(Tf)(x) - (Tf)(x') = \int_0^x [K(x,t) - K(x',t)] f(t)\, dt - \int_x^{x'} K(x',t) f(t)\, dt$, pour $x, x' \in [0,1]$, donc

$|Tf(x) - Tf(x')| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |K(x,t) - K(x',t)| \|f\|_\infty + |x - x'| \|f\|_\infty \|K\|_\infty$

K étant continue sur $[0,1] \times [0,1]$, y est uniformément continue : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq : $|x - x'| < \delta$ et $|t - t'| < \delta \Rightarrow |K(x,t) - K(x',t')| < \varepsilon/2$

En particulier, on a $|K(x,t) - K(x',t)| \leq \varepsilon/2$ si $|x - x'| \leq \delta$, soit $\delta' = \min(\delta, \frac{\varepsilon}{2\|K\|_\infty})$, alors $|x - x'| < \delta \Rightarrow |Tf(x) - Tf(x')| \leq (\varepsilon/2 + \delta' \|K\|_\infty) \|f\|_\infty \leq \varepsilon \|f\|_\infty$

Cela prouve que l'ensemble $T(B_E)$ est borné ds $E = \mathcal{C}([0,1])$. (i.e T est continue, et $\|T\| \leq \|K\|_\infty$)

Avec l'équicontinuité, cela montre, grâce au Th d'Ascoli, que $T(B_E)$ est relativement compact ds E. Donc T est un opérateur compact.

2°/ Montrons par récurrence : pour $n = 0$, on a $T^0 = I$, qui est de norme 1, et l'inégalité se réduit à $|f(x)| \le \|f\|_\infty$, ce qui est évidemment vrai. Supposons maintenant que $|T^n g(x)| \le \|g\|_\infty \|K\|_\infty^n \frac{x^n}{n!}$ pour tout $x \in [0,1]$ et toute $g \in E$. Utilisons cette hypothèse de récurrence pour $g = T^n f$; on obtient :

$$|T^{n+1} f(x)| = \left|\int_0^x K(x,t)\, T^n f(t)\, dt\right| \le \int_0^x \|K\|_\infty |T^n f(t)|\, dt \le \int_0^x \|K\|_\infty^{n+1} \|f\|_\infty \frac{t^n}{n!}\, dt \le \|K\|_\infty^{n+1} \|f\|_\infty \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

ce qui est bien l'inégalité cherchée, à l'ordre $n+1$.

On en déduit $\|T^n f\|_\infty \le (\|K\|_\infty^n / n!)\|f\|_\infty$, donc $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \le \|K\|_\infty \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

grâce à $n! \ge (k+1) \dots n \ge k^{n-k}$ valable $\forall k \le n$; $\liminf_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n}} \ge k$ $\forall k \ge 1$ donc $\lim \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = 0$

or la formule du rayon spectral dit que $r(T) \le \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. ($\mathbb{K}$: complexe ou réel)

Comme $\lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$ alors, on obtient $r(T) = 0$.

3° Le $\sigma(T) \subset$ de disque (ou intervalle) fermé de centre 0 et de rayon $r(T)$, comme ici $r(T) = 0$, on a $\sigma(T) \subseteq \{0\}$. Mais T est compact, sur l'espace E de dimension infinie, donc 0 est une valeur spectrale de T. Il en résulte que $\sigma(T) = \{0\}$.

Ex 4 : Montrer que tout opérateur compact $T : E \to F$, avec $F = \ell_p$ $1 \le p < \infty$, ou $F = c_0$, est limite d'opérateurs de rang fini. [sachant que $(e_n)_{n\ge 1}$ la base canonique de E]

$e_n = \delta_{n,k}$, ou $\delta_{n,k} \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } k \ne n \end{cases}$, on sait :

Sol Soit $T : E \to F$ un opérateur compact, avec $F = \ell_p$ $1 \le p < \infty$ ou $F = c_0$.

On sait que tout $y = (y_n)_{n \ge 1} \in F$ s'écrit $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n$. Soit P_n la projection qui à un tel y associe $P_n y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ et soit $T_n = P_n T$. (C'est un opérateur de rang fini)

Il nous reste à montrer que $\|T - T_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Supposons que $\|T - T_n\|$ ne tende pas vers 0 on pourrait trouver $\varepsilon_0 > 0$ et une s. suite telle que, si $S_k = P_{n_k}$, on ait $\|T - S_k\| \ge \varepsilon_0$ $\forall k \ge 1$. Notons $Q_k = I - P_{n_k}$. Comme $\|T - T_n\| =$

$\|T - T_n\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|(I - P_n)(Tx)\| = \sup_{y \in T(B_E)} \|(I - P_n)(y)\|$, on peut trouver, pour tout $k \ge 1$, un $y_k \in T(B_E)$ tel que $\|T - S_k\| \le \|Q_k(y_k)\| + \frac{1}{k}$. Comme T est compact, $T(B_E)$ est relativement compact et $(y_k)_{k\ge 1}$ possède une sous-suite convergente vers $y \in F$. (Sans perdre la généralité, on peut supposer que $(y_k)_{k\ge1}$ elle même tend vers y. Or $\|Q_k(y_k)\| \le \|Q_k(y)\| + \|Q_k(y - y_k)\| \le \|Q_k(y)\| + \|y - y_k\|$ (car $\|Q_k\| = 1$). Comme $\|Q_k y\| \to 0$ et $\|y - y_k\| \to 0$, on obtient $\|T - S_k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, ce qui contredit $\|T - S_k\| \ge \varepsilon_0$. Donc $\|T - T_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc T est la limite des opérateurs de rang fini.

Ex5 : Soit un espace de Banach et $T \in L(E)$. 1/ Montrer que l'application $\lambda \in \rho(T) \longmapsto R(\lambda, T) \in L(E)$ est continue.
1°

2/ Soit $T_n \in L(E)$ une suite d'opérateur convergeant vers $T \in L(E)$ dans l'espace de Banach $L(E)$. Montrer que pour tout compact $K \subset \rho(T)$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $K \subset \rho(T_n)$ $\forall n \geq n_0$ et que la suite de fonctions $R(\cdot\,; T_n) : K \longrightarrow L(E)$ $n \geq n_0$ converge uniformément vers $R(\cdot\,; T)$.

Sol : 1/ L'application $R(\cdot\,;T)$ est la composée de l'application évidemment continue $\lambda \xrightarrow{A_1}$ $\lambda \mapsto \lambda I_E - T$ de $\mathbb{K}$ ds $L(E)$ et de l'app $u \xrightarrow{A_2} u^{-1}$ de $Isom(E, E)$ dans lui même qui est continue. Ceci prouve la continuité de $R(\cdot\,;T)$.

2/ Soit $\lambda \in K$ on a

$\lambda I_E - T_n = \lambda I_E - T + T - T_n = (\lambda I_E - T)(I_E + R(\lambda; T)(T - T_n))$

et ceci montre que $\lambda \in \rho(T_n)$ si $\|T - T_n\| < \|R(\lambda; T)\|^{-1}$ et par conséquent $K \subset \rho(T_n)$ dès que $\|T - T_n\| < \frac{1}{C}$ où $C = \sup_{\lambda \in K} \|R(\lambda; T)\|$, cette borne étant finie d'après la continuité de $\lambda \longmapsto R(\lambda; T)$. Ceci prouve le résultat voulu.

Ex6 : Soit E, F deux espace de Banach et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
2°

1/ Si T est compact, montrer que, pour toute suite (x_n) de E faiblement convergente vers 0, la suite (Tx_n) converge fortement vers 0.

Aide : 1/ En utilisant le T. B. Steinhauss. Montrer que si $x_n \xrightarrow{w} x$ donc (x_n) bornée et on a $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$. $\tilde{x}_n : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$
$\varphi \longmapsto \tilde{x}_n(\varphi) = \varphi(x_n)$
$\tilde{x}_n(\varphi) = \varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x) = \tilde{x}(\varphi)$ et
$\|\tilde{x}_n\| = \|x_n\|$ et $\|\tilde{x}\| = \|x\|$ ⟵ corollaire 3. T. de Banach f. H. $\|x\| = \sup_{\|\varphi\| = 1, E^*} |\varphi(x)|$.
2° E reflexif $\iff$ $B_E = B(0, 1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est faiblement compact ($\sigma(E, E')$).
• La Boule $B_{E'} = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$ est $\sigma(E', E)$ compact

2/ Montrer que la réciproque est vraie si E est reflexif.

Sol : Soit (x_n) une suite de E : $x_n \longrightarrow x$; si la suite $Tx_n \not\longrightarrow 0$, il existe $c > 0$ et une sous-suite que nous noterons encore (x_n) telle que $\|Tx_n\| \geq c$. T compact $\Rightarrow$ T faiblement continue $\iff$ fortement continue, la suite $Tx_n \xrightarrow{w} 0$ dans F. La suite (x_n) bornée et l'opérateur T compact, il existe une sous suite (x_{n_k}) telle que la suite (Tx_{n_k}) ~~converge~~ converge fortement ds F. Posons $y = \lim_{k \to \infty} Tx_{n_k}$, on a $\|y\| \geq c$ et $y = 0$ car $Tx_{n_k} \xrightarrow{w} 0$ Ceci absurde.