4°. Si T est unitaire, T est en particulier inversible, donc bijective, de plus, l'égalité $T^*T = Id_H$ montre que T est une isométrie.
Inversement, si T est une isométrie surjective, T est bijective $T^* = T^{-1}$; on a: $T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = Id_H$. Comme on a vu au 1° que $T^*T = Id_H$; on a forcément $T^* = T^{-1}$ par exemple parce que $T^* = T^*(T \circ T^{-1}) = T^*T T^{-1} = T^{-1}$ donc $T^*.T = T T^* = Id_H$ et T est unitaire.

Serie N° 3.

opérateur non borné et opérateur adjoint.

Ex 1: 1°- $N(T^*) = R(T)^{\perp}$ et $N(T) \subset R(T^*)^{\perp}$?

. Soit $v \in N(T^*) \iff T^*v = 0 \implies \langle T^*v, u\rangle = 0 \ \forall u \in D(T)$

$\iff \langle v, Tu\rangle = 0 \ \forall u \in D(T)$

$\iff v \in R(T)^{\perp}$.

. Soit $u \in N(T) \iff Tu = 0 \implies \forall v \in D(T^*)$ on a $\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle = 0$

$\implies u \in R(T^*)^{\perp}$.

2°/ T est fermé $\implies N(T) = R(T^*)^{\perp}$.

on suppose $\exists x \in R(T^*)^{\perp}$ et $x \notin N(T)$, alors $\forall v \in D(T^*)$ on a: $\langle x, T^*v\rangle = 0$

Si $x \in D(A)$ alors $\langle Tx, v\rangle = 0 \ \forall v \in D(T^*) \implies Tx = 0 \implies x \in N(T)$.

Si $x \notin D(A)$, comme $\overline{D(T)} = E \implies \exists x_n \in D(T)$: $x_n \to x$ et $Tx_n \to y$

comme T est fermé $\implies Tx_n \to Tx = y$, alors:

$$\left.\begin{array}{l} \langle x_n, T^*v\rangle \longrightarrow \langle x, T^*v\rangle = 0 \\ \langle Tx_n, v\rangle \longrightarrow \langle Tx, v\rangle \end{array}\right\} \implies \langle x, T^*v\rangle = \langle Tx, v\rangle = 0$$

donc $x \in N(T)$.

Ex 2: $T : E \to E'$; $\overline{D(T)} = E$, $\exists c > 0$: $\langle Tx, x\rangle \geq -c\|Tx\|^2 \ \forall x \in D(T)$.

on veut montrer que $N(T) \subset N(T^*)$.

Rappellons que $N(T^*) = R(T)^{\perp}$.

1°- soient $u \in N(T)$ et $v \in D(T)$; on a:

$\langle T(u+tv), u+tv\rangle \geq -c\|T(u+tv)\|^2 \ \forall t \in \mathbb{R}$, alors

$t\langle Tv, u\rangle + t^2\langle Tv, v\rangle \geq -c\, t^2\|Tv\|^2$

on obtient $\langle Tv, u\rangle = 0$ et donc $u \in R(T)^{\perp} = N(T^*)$

2°. $D(A)$ muni de la norme du graphe est un Banach, $R(A)$ muni de la norme induite par E^* est un Banach, l'opérateur $T : D(T) \to R(T)$ vérifie les hypothèses du Théorème de l'application ouverte. Donc il existe $C > 0$:

$\forall f \in R(T)$, $\exists v \in D(T)$: $Tv = f$ et $\|v\|_{D(A)} \leq c\|f\|$

en particulier $\|v\|_E \leq c\|f\|$.

Soit $u \in D(A)$, on applique ce qui précède à $f = Tu$, il $\exists v \in D(T)$: $Tu = Tv$

et $\|v\| \leq \|Tu\|$. Comme $u - v \in N(T) \subset R(T)^{\perp}$ on a:

$\langle Tu, v\rangle = \cancel{\langle Tv, u\rangle} = \langle Tv, v\rangle \geq -\|Av\|\,\|v\| \geq \|Au\|(c\|Au\|) = -C\|Au\|^2$.

Ex 4 : 1°- on distingue deux cas.

cas a : $f(a)=1$.

alors $x \in N(T) \Leftrightarrow Tx=0 \Leftrightarrow x=f(x).a \Rightarrow N(T)=\mathbb{R}a=\langle a\rangle$.

$y \in R(T) \Leftrightarrow \exists x \in E : y = x - f(x).a \Rightarrow f(y)=0 \Rightarrow R(T)=N(f) = \overline{N(f)} = E$

cas b $f(a) \neq 1$.

. $x \in N(T) \Leftrightarrow Tx=0 \Leftrightarrow f(x)(1-f(a))=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow N(T)=\{0\}$.

. $y \in R(T) \Leftrightarrow \exists x \in E : y = x - f(x).a \Rightarrow f(y)=f(x)(1-f(a))$

$f(y-\lambda x)=0$; $\lambda = 1-f(a) \neq 0$. $\Rightarrow R(T)=E$.

[f est discontinue $\Rightarrow \overline{\operatorname{Ker} f}=E$].

2°- $G(T)$ n'est pas fermé ; sinon on déduit du théorème du graphe fermé que T est borné. or T n'est pas borné car f n'est pas continue.

3°- $D(T^*)=\{v \in E^* : |\langle v, Tx\rangle| \leq c\|x\|\} = \{v \in E^* : \langle v, a\rangle = 0\}$ et $T^*v = v$. $\forall v \in D(T^*)$.

4°- $N(T^*)=\{v \in D(T^*) : T^*v = v = 0\} \Rightarrow N(T^*)=\{0\}$ et $R(T^*)=\{v \in D(T^*)\} = \{v \in E^* : \langle v, a\rangle = 0\}$

5°- $R(T)^{\perp}=\{0\} \Rightarrow R(T^*)^{\perp}=[a]=\mathbb{R}a$. Donc $N(T^*)=R(A)^{\perp}$ et $N(T) \subsetneq R(T^*)^{\perp}=\mathbb{R}a$

6°- on voit que si T n'est fermé, il peut se produire que $N(T) \subsetneq R(T^*)^{\perp}$ (c'est le cas

Ex 5 : 1) soit $U \in \ell^1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$ et $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |u_n| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ ($N_0 \to \alpha$)

~~$\lim |u_n| = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$ (~~

Soit $v=(v_n)$: $v_n = \begin{cases} u_n & \text{si } n < N_1 \\ \dfrac{u_n}{n+1} & \text{si } n > N_1 \end{cases}$

donc $(v) \in \ell^1$ et $(nv_n) \in \ell^1$ car : $\lim_{n\to\infty} (nv_n = \frac{n}{n+1} u_n) = 0$ et $\sum_{N_1+1=n}^{\infty} |nv_n| < \sum_{N_1+1=n} |u_n|$

donc $\overline{D(T)}=E$.

. vérifions que T est fermé.

soit $(U^j) \in D(T)$: $U^j \to U$ dans E et $TU^j \to f$. Il résulte que :

$\begin{cases} U_n^j \to U_n & ; j \to +\infty \\ nU_n^j \to f_n & ; j \to +\infty \end{cases}$

donc $nu_n = f_n$ $\forall n$: par suite $U \in D(T)$ et $TU = f$.

2°- $D(T^*)=\{v=(v_n) \in \ell^{\infty} : (nv_n) \in \ell^{\infty}\}$

$T^*v = (nv_n)_n$ et $\overline{D(T^*)}=c_0$: l'ensemble des suites ayant 0 comme limite.

Ex6:

1- Si $f \in L^2$, d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz que T est continu. et T^* ?
$\forall u \in D(T), \forall v \in D(T^*)$: $\langle u, T^* v\rangle = \langle Tu, v\rangle = \langle u, f\rangle \langle u_0, v\rangle = \langle u, \langle v, u_0\rangle f\rangle$
donc $T^* v = \langle v, u_0\rangle f$.

· Si $f \notin L^2$. T est cependant à domaine dense (les fonctions $\in C_c^\infty$ dans $D(T)$), d'après le Lemme de Riesz, on a $\overline{D(T)} = L^2$. L'ensemble $\langle u, f\rangle$: pour $\|u\| = 1$ dans $D(T)$ n'est pas borné pour que $|\langle v, Tu\rangle| \leq c\|u\|$ ssi $D(T^*) = u_0^{\perp}$.
et donc $T^* \equiv 0$ sur $D(T^*)$.

Ex8: 1- a : $\overline{T(E)} = F \Rightarrow T^*$ est injectif ?
Soit $\varphi \in F^*$: $T^*\varphi = 0$. $\forall x \in E$, on a alors $\varphi(Tx) = \langle \varphi, Tx\rangle = \langle T^*\varphi, x\rangle = 0$
ainsi φ s'annule sur TE. comme $\overline{T(E)} = E$, on obtient $\varphi = 0 \Rightarrow T^*$ est injectif.

b : Pour tout $\varphi \in F^*$ s'annulant sur $T(E)$, on a : $\langle T^*\varphi, x\rangle = \langle \varphi, Tx\rangle = 0$ $\forall x \in E$
c.à.d $T^*\varphi = 0$, comme T^* est injectif alors $\varphi \equiv 0$. Alors d'après le corollaire 2.2.1. on obtient $T(E)^{\perp} = \{0\} \Rightarrow \overline{T(E)} \equiv F$.

* Si $T(E)$ n'est pas dense, il existe $y_1 \in F$: $y_1 \notin \overline{T(E)}$. Le Théorème de Hahn-Banach dit qu'il existe alors 1 forme linéaire continue $\varphi_0 \in F^*$ qui s'annule sur $\overline{T(E)}$ et telle que $\varphi_0(y_1) = 1$. Mais $\varphi_0 \not\equiv 0 \Rightarrow T^*$ n'est injectif. contradiction.

2- Il suffit de prendre l'injection canonique : $i_1 : L^2_{[0,1]} \to L^1$ ou : $i_2 : l_1 \to l_2$
elles sont continues, de norme 1, pas surjectives : $i_1^* : L^\infty \to L^2$, $i_2^* : l_2 \to l_\infty$
sont les injections canoniques.

Ex9: 1- $|Tf(x)|$ existe pour tout $x \in [0,1]$. grâce à $\leq$ de Cauchy Schwartz (C.S)
$\int_0^x |f(t)|dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |1_{[0,x]}(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{L^2}\sqrt{x} \leq 1 \cdot \|f\|_{L^2} < +\infty$.
De plus $Tf \in L^2([0,1])$ car T est continue, donc mesurable, car d'après $\leq$ de Cauchy Schwartz
$|Tf(x) - Tf(x')| \leq \sqrt{|x-x'|}\,\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$
et d'autre part : $\int_0^1 |Tf(x)|^2 dx \leq \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)dt\right|^2 dx \leq \|f\|_{L^2} \Rightarrow \|Tf\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$
$\Rightarrow T$ est continue.

2- Par définition l'adjoint T^* de T est caractérisé par :
$(Tf, g) = (f, T^*g)$ $\forall f, g \in L^2([0,1])$.
or $(Tf, g) = \int_0^1 Tf(x) \cdot g(x)\,dx = \int_0^1\int_0^1 f(t) \cdot 1_{[0,x]}(t)\, g(x)\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x) 1_{[t,1]}(x)\,dx\right) f(t)\,dt$
par le Théorème de Fubini que l'on peut appliquer car :
$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(t) \cdot g(x) 1_{[0,x]}(t)\,dt\right) dx \leq \int_0^1 |f(t)|dt \int_0^1 |g(x)|dx \leq \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2} < +\infty$

donc $(T^*g)(t) = \int_t^1 g(x)dx = \int_0^1 g(x) - \int_0^t g(x)dx \Rightarrow T^*g = [Tg(1)]\mathbb{1} - Tg$.

Ex 10 : 1°- $i \Rightarrow i'$? Si T est inversible, $\exists\, T^{-1} \in L(H)$: $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = Id_H$; alors $(T^{-1})^* T^* = (TT^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^* = Id_H$ donc T^* est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

$i' \Rightarrow i$? on montre de la même façon que si T^* est inversible $\Rightarrow T^{**} = \bar{T} = T$ est inversible ($T^{**} = T$ car T est fermé).

($i \Rightarrow ii$) 2°- si T est inversible, son inverse T^{-1} est continu, on a donc $\|T^{-1}y\| \leq \|T^{-1}\|\|y\|$ pour tout $y \in H$. En particulier, pour tout $x \in H$ on a :
$\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|$ d'où $\|Tx\| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}\|x\|$.
de même T^* est inversible, on a : $\|T^*x\| \geq \frac{1}{\|T^{*-1}\|}\|x\|$ on a donc ii avec $c = \min\left(\frac{1}{\|T^{-1}\|}, \frac{1}{\|T^{*-1}\|}\right)$.

3°- $ii \Rightarrow i$?

a) Montrons que $R(T)$ est fermé. Soit $x_n \in H$: $Tx_n \to y \in H$. La suite (Tx_n) est en particulier de Cauchy i.e $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n,m \geq N_0$ on a : $\|Tx_n - Tx_m\| \leq \varepsilon$
Il résulte de (ii) que $\|x_n - x_m\| \leq \frac{\varepsilon}{c}$ donc (x_n) est Cauchy dans (H complet), elle converge vers x et on a : $Tx_n \to Tx$ (T continue) $\Rightarrow y = Tx \in R(T)$.

b) Montrons que $R(T)$ est dense. Il suffit pour cela de montrer que $R(T)^{\perp} = \{0\}$
comme on a : $R(T)^{\perp} = \operatorname{Ker} T^*$ ($ii \Rightarrow T^*$ est injectif) $\Rightarrow R(T)^{\perp} = \{0\} \Rightarrow \overline{R(T)} = H$.
comme $R(T)$ est fermé donc $R(T) = H \Leftrightarrow T$ est surjectif. $ii \Rightarrow T$ est injectif $\Rightarrow T$ est bijective et T^{-1} est continu car $\forall y \in H$ $\|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{c}\|y\|$ et $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$
par conséquent T est inversible.

Ex 11 :

1°- Si $T^*T = Id_H$, alors $\forall x, y \in H$, on a : $(Tx, Ty) = (T^*Tx, y) = (x, y)$.
inversement, si T conserve le produit scalaire, on a : $(T^*Tx, y) = (Tx, Ty)$ pour tout $x, y \in H$; donc $T^*Tx = x$ (car $T^*Tx - x \in H^{\perp} = \{0\}$) pour tout $x \in H$ c.à.d $T^*T = Id_H$. $i \Leftrightarrow ii$.

• si l'on a ii en prenant $x = y$ on obtient $\|Tx\| = \|x\|$ donc T est 1 isométrie.
Inversement, si T est une isométrie, on a : $\|T(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2$, donc en développant : $\|T(x+y)\|^2 = \|Tx\|^2 + \|Ty\|^2 + 2\mathrm{Re}(Tx, Ty) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x,y)$, comme $\|Tx\| = \|x\|$
on obtient $\mathrm{Re}(x,y) = \mathrm{Re}(Tx, Ty)$.
Dans le cas complexe, on remplace y en iy ; on obtient

$\mathrm{Im}(Tx, Ty) = \mathrm{Re}(-i(Tx, Ty)) = \mathrm{Re}(Tx, iTy) = \mathrm{Re}(Tx, Tiy) = \mathrm{Re}(x, iy) = \mathrm{Im}(x,y)$
donc $(Tx, Ty) = (x, y)$.

2°- pour tout $x = (x_n)_{n \geq 1}$ et $y = (y_n)_{n \geq 1}$ dans l_2 ; on a $(S^*x, y) = (x, Sy) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n (Sy)_n$
$(S^*x, y) = x_1 \cdot 0 + \sum_{n \geq 2} x_n y_{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1} y_n$. Donc $S^*x = (x_{n+1})_{n \geq 1} = (x_2, x_3, \ldots)$

3°- on a $S^*S(x_1, \ldots) = S^*(0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$; $\Rightarrow S^*S = Id_{l_2}$
vu le 1°, puisque S est une isométrie. Dans l'autre sens, on a $SS^*(x_1, \ldots, x_n) = S(x_2, \ldots) = (0, x_2, \ldots)$; donc SS^* est la projection orthogonale sur le $E_1 = \{x = (x_n)_{n \geq 1} \in l_2 : x_1 = 0\}$