Série n° 2

Théorèmes de Hahn Banach et espace dual.

Ex 1 1°) Puisque tout espace normé est $\simeq \mathbb{K}^n$ on peut considérer que l'on a $T(\Pi) = \mathbb{K}^n \subset F$. Pour $i \in \{1, ..., n\}$, soit $p_i : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ la projection canonique. Alors $f_i = p_i \circ T$ est une forme linéaire continue sur $\Pi$. D'après le Théorème de Hahn Banach, il existe une forme linéaire continue $\tilde{f}_i$ sur $E$ prolongeant $f_i$. Soit $S = (\tilde{f}_1, ..., \tilde{f}_n)$ alors $S$ est une application linéaire continue de $E$ dans $\mathbb{K}^n$ prolongeant $T$.

2°) a- Comme $E/\Pi$ est de dimension finie $\Rightarrow$ $E/\Pi$ est fermé. Il existe un s.e.v $H \simeq \frac{E}{\Pi}$ tq : $\Pi \oplus H = E$ algébriquement (supplémentaires algébriques).

Soit $\Pi_2 : E \longrightarrow H \simeq \frac{E}{\Pi}$ et $\Pi_1 : E \longrightarrow \Pi$ des projections algébriques sur $\frac{E}{\Pi}$ et $\Pi$ respectivement. Comme $E/\Pi$ et $\Pi$ sont fermés alors $\operatorname{Ker}\Pi_2 = \Pi$ et $\operatorname{Ker}\Pi_1 = H$ sont fermés $\Leftrightarrow$ $\Pi_1$ et $\Pi_2$ sont continues, alors $\Pi \oplus H$ sont supplémentaires topologiques.

b- Soit $S = T \circ \Pi_1$ est une application continue de $E$ dans $F$ prolongeant $T$.

---

Ex 2 : C.N : $|T(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i)| = |\sum_{i=1}^n \lambda_i T x_i| \leq |\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)| \leq \|T\| \, \|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\| \leq C \|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\|$.

C.S : Notons $F = [A]$ s.e.v et soit $x \in F$.

Si $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_j \mu_j y_j$ où $x_i, y_j \in A$, $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{K}$

on a d'après $(*)$ $|\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) - \sum_{j=1} \mu_j f(y_j)| \leq C \|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i - \mu_j y_j\| = 0 \Rightarrow T$ est une application.

On peut dé

on peut définir une application $S : F \longrightarrow \mathbb{K}$.

$Sx = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ si $x = \sum_i \lambda_i x_i$. $S$ est linéaire ( $S(\lambda x + \mu y) = \lambda Sx + \mu Sy$ )

$(*) \Rightarrow S$ est une forme linéaire continue $\|S\| \leq c$. Donc on utilise le Théorème de Hahn Banach pour conclure.

2°- Résultat de 1° en prenant $A = \bigcup_{i \in I} \{x_i\}$ et $f(x_i) = a_i$

---

Ex 3 1°) D'après le Théorème, $\exists f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\forall (a, b) \in A \times B$, on ait $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$. Supposons qu'il existe $b_0 \in B$ : $f(b_0) = \alpha$. Soit $x_0 \in E$ : $f(x_0) = 1$ $\Rightarrow \|x_0\| = 1$. Donc $\exists \varepsilon > 0$ : $\|x - b_0\| < \varepsilon \Rightarrow x \in B$ alors

Soit $x_0 = b_0 - \varepsilon \frac{x_0}{\|x_0\|} \in B$ car $\|x_0 - b_0\| = \varepsilon$ $\Rightarrow f(x_0) = f(b_0) - \varepsilon = \alpha - \varepsilon < \alpha$

contradiction $\Rightarrow \forall b \in B$ $f(b) > \alpha$ i.e $f$ sépare $A$ et $B$ au sens strict.

2°) Comme $\mathring{A}$ est convexe ouvert et $\bar{A} = \bar{\mathring{A}}$, alors $\exists f \in E'$ : $\forall a_n \in \mathring{A}$ $\forall b \in B$ on ait :

$f(a_n) < \alpha \leq f(b)$ or $\forall a \in \bar{A}$ on a $f(a) = \lim f(a_n)$, $a_n \in \mathring{A}$

donc par passage à la limite $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$ $\forall a \in \bar{A}$ et $\forall b \in B$.

Ex4: $\mathring{C} \neq \emptyset$, par translation on peut supposer que $0 \in \mathring{C}$. $C$ est un voisinage convexe fermé de 0 dont la jauge est définie. La fonction $f$ est donc continue en tout point $x \neq 0$.

On a d'autre part : $\|f(x)\| \leq J_c(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ (continuité de la jauge en 0).

$\Rightarrow f$ est continue.

Étant donné $a \in S^{n-1}$, considérons la demi-droite $D_a = \{\lambda a : \lambda \geq 0\}$. On a :

$$f(\lambda a) = J_c(\lambda a) \cdot \frac{\lambda a}{\|\lambda a\|} = \lambda J_c(a) \cdot a$$

et ceci prouve que $f$ induit sur $D_a$ une homothétie de rapport $J_c(a)$.

Observons que $J_c(a) \neq 0$. En effet, supposons $\exists x : J_c(x) = 0 \Rightarrow x \in \lambda C \; \forall \lambda > 0$

d'où $C$ étant borné i.e. $\exists r > 0$ : $\frac{1}{\lambda}\|x\| \leq r$ et par conséquent $x = 0$.

On remarque que $\lambda a \in D_a \cap C$ signifie que $\lambda J_c(a) \leq 1$ et ceci montre que :

$f(D_a \cap C) = D_a \cap B(0,1)$. Autrement dit, l'application $f$ induit une bijection continue de $C$ sur $B$. Donc un homéomorphisme d'après la compacité de $C$.

---

Ex5: Dual topologique de $l^1$.

1°- Soit $x = (x_n) \in l^\infty$. Soit $T_x : (l^1, \|\cdot\|_1) \longrightarrow K$ : $T_x(y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$.

On a : $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_\infty \cdot \|y\|_1 < +\infty \Rightarrow T_x$ est bien définie.

Soit $y = (y_n)_{n \geq 0}$, $z = (z_n)_{n \geq 0} \in l^1$ et $\lambda \in K$. On a $T_x(y + \lambda z) = \sum x_n y_n + \lambda \sum x_n z_n = T_x y + \lambda T_x z$

donc $T_x$ est linéaire.

On a : $|T_x(y)| \leq \|x\|_\infty \cdot \|y\|_{l^1} < \infty$ et on a : $\|T_x\| \leq \|x\|_\infty$.

D'autre part on a : $T_x(e_n) = x_n$ et $\|e_n\|_1 = 1$, d'où $\|T_x\| \geq |x_n|$, donc on a $\|T_x\| \geq \|x\|_\infty$

par conséquent on a : $\|T_x\| = \|x\|_\infty$.

On a montré que $T$ est aussi isométrique, donc

2°- Il est clair que $T$ est linéaire. On a montré que $T$ est isométrique, il reste à montrer que $T$ est surjective. Soit $f$ une forme linéaire continue sur $l^1$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $x_n = f(e_n)$ on a $|x_n| = |f(e_n)| \leq \|f\| \cdot \|e_n\| = \|f\|$ donc $x = (x_n) \in l^\infty$.

Pour tout $n \geq 0$ on a $T_x(e_n) = x_n = f(e_n)$, donc $T_x = f$ sur $C_0$. On a $\overline{C_c(K)} = L^p$ $1 \leq p < \infty$

donc $\overline{C_c} = \overline{C_c(N)} = l^p$, donc on a $T_x = f$. Par conséquent $T$ est surjective.

NB : $c_0 \subset l^p \subset c_0 \subset l^\infty$.

---

Ex6 : (Dual de $c_0$).

1°- Soit $y = (y_n) \in l^\infty$. $|T_x(y)| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1 \Rightarrow \|T_x\| \leq \|x\|_1$.

D'autre part $y_n = \begin{cases} \frac{x_n}{|x_n|} \\ 0, \text{ si } x_n = 0 \end{cases} \in l^\infty$

$T_x\left(\frac{x_n}{|x_n|}\right) = \sum |x_n| = \|x\|_1 \Rightarrow \|T_x\| \geq \|x\|_1 \Rightarrow \|T_x\| = \|x\|_1$.

2°- Soit $f \in C_0^*$. Soit $x \in C_0$ : $x = (x_n)_n$ : $\lim x_n = 0$ soit $\alpha_n = f(e_n) \Rightarrow f(x) = x_n f(e_n) = \sum x_n \alpha_n$

$x_n = \begin{cases} \frac{\alpha_n}{|\alpha_n|} & \alpha_n \neq 0 \\ 0 & \alpha_n = 0 \end{cases}$ $\quad f(x) = \sum \frac{\alpha_n}{|\alpha_n|} \cdot \alpha_n = \sum |\alpha_n| = \|\alpha\|_1 = \|T_\alpha\|$.

3°. Puisque $C_0$ est 1 s.e.v fermé dans $l^\infty$, et $C_0 \neq l^\infty$, d'après le Théorème de Hahn Banach il existe $f \in (l^\infty)^*$ : $f \neq 0$ et $f|_{C_0} \equiv 0$.
Si $f$ provenant d'un élément de $l^1$, d'après la proposition - on aurait $f = 0$ ce qui est impossible. Par conséquent $l^1$ est inclu strictement dans $(l^\infty)^*$.
Donc $l^1$ n'est pas reflexif.

Ex 7: 1°. S'il existe $T \in L(l^2, l^1)$ surjective, alors $T^* : (l^1)^* \longrightarrow l^{2*} = l^2$ est injective (homéomorphe sur son image. Or on a $(l^1)^* = l^\infty$ et $l^2$ est séparable ($T^*(l^\infty)$ = fermé $\Rightarrow l^\infty \subset l^2 \Rightarrow l^\infty$ est séparable contradiction.

2°. Supposons $\exists\ T : C_0 \longrightarrow l^1$ continue $\Rightarrow \exists\ T^* : (l^1)^* = l^\infty \longrightarrow C_0^* = l^1$
donc $l^\infty \subset l^1$ qui est séparable $\rightarrow l^\infty$ séparable contradiction.

Ex 8: On considère l'application $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ définie par :
$F(u) = [T(u), T_1(u), \dots T_n(u)]$.
Il résulte d'après l'hypothèse que $a = (1, 0, 0 \dots, 0) \notin R(F)$. On peut donc séparer strictement $\{a\}$ et $R(F)$ par un hyperplan dans $\mathbb{R}^{n+1}$ i.e $\exists\ \lambda_i : i = \overline{1,n}$
$\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\lambda < \alpha < \lambda T(u) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i(u) \quad \forall u \in X \text{ ev.}$$

Par suite, on a :

$$\lambda T(u) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T_i(u) = 0 \ \forall u \in X \quad \text{et } \lambda < 0 \text{ (d'où } \lambda \neq 0).$$

$$\text{donc } T(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} T_i(u) \quad \forall u \in X.$$