opérateurs linéaires sur les EVNs.

Ex1: a- f est linéaire $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

• si $\lambda \in \mathbb{N}$: $f(nx) = f(\underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{f(x) + \cdots + f(x)}_{n \text{ fois}} = n f(x)$.

• $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

• $f(0) = f(nx - nx) = f(nx) + f(-nx) \Rightarrow f(-nx) = -f(nx)$.

donc $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a : $f(nx) = n f(x)$.

• si $\lambda = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $f(\frac{q}{q} x) = f(q \cdot \frac{1}{q} x) = q f(\frac{1}{q} x) \Rightarrow f(\frac{x}{q}) = \frac{1}{q} f(x)$

donc $f(\frac{p}{q} x) = p f(\frac{x}{q}) = \frac{p}{q} f(x)$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on utilise $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et la continuité de f (qu'on va montrer ultérieurement).

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists (\lambda_n) \subset \mathbb{Q}$: $\lambda = \lim \lambda_n$ alors

$f(\lambda x) = f(\lim \lambda_n x) = \lim \lambda_n f(x) = \lambda f(x)$.

b- La continuité de f. On montre par l'absurde.

on suppose que f n'est pas continue au point 0.

$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \alpha > 0 \ \exists x_\alpha \in E$ $0 < \|x_\alpha\| < \alpha$ et $\|f(x_\alpha)\| \geq \varepsilon_0$

En prenant $\alpha = \frac{1}{n}$ on obtient (x_n) : $x_n \to 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\|f(x_n)\| \geq \varepsilon_0$

comme $\|x_n\| \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda_n \in \mathbb{Q}$: $\frac{1}{2} \leq \lambda_n \|x_n\| \leq 1 \Rightarrow \lambda_n x_n \in B(0,1)$

on a $\|f(\lambda_n x_n)\| = \lambda_n \|f(x_n)\| \geq \lambda_n \varepsilon_0 \geq \frac{\varepsilon_0}{2\|x_n\|}$ qui n'est pas bornée

donc contradiction avec l'hypothèse $\Rightarrow f$ est continue au point 0.

et comme $f(x_0 + y) = f(x_0) + f(y) \Rightarrow f$ est continue sur E

Ex2. Supposons qu'il existe u et v telles que $uv - vu = Id_E$ ... (*)

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $uv^n - v^n u = n v^{n-1}$ ... (1)

comme u et v^{n-1} sont continues, alors

$n\|v^{n-1}\| \leq \|u\| \|v^n\| + \|u\| \|v^n\| \leq 2 \|u\| \|v^{n-1}\| \|v\|$

donc $(2\|u\| \|v\| - n) \|v^{n-1}\| \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\|v^{n_0 - 1}\| = 0$

Soit p_0 le plus petit nombre naturel qui vérifie $\|v^{p_0}\| = 0$

Alors $uv^{p_0} - v^{p_0} u = p_0 v^{p_0 - 1} = 0 \Rightarrow v^{p_0 - 1} = 0$

contradiction avec p_0 est le plus petit nombre naturel.

donc $\nexists$ u, v continues vérifiant (*).

Ex5: 1°- La fonction $g(t)=\int_0^t f(s)\,ds$ est une fonction primitive de $f\in F$.

• Si on pose $c=\int_0^1 g(t)\,dt$ on obtient $T_f(t)=g(t)-c$ est une primitive de $f\in F$.

On remarque que si g_1 et g_2 deux primitives de f sur $[0,1]$, alors $\exists k=cte: g_1-g_2=k$

donc $\int_0^1 g_1=\int_0^1 g_2+k$. Si $g_1, g_2\in F \Rightarrow k=0 \Rightarrow g_1\equiv g_2$.

Donc $\forall f\in E \Rightarrow \exists! T_f$ primitive $\in F$ de f.

2°: Il est clair que T est linéaire. Pour montrer la continuité de T on simplifie T_f

on a: $T_f=g(t)-c \Rightarrow c=\int_0^1 g(t)\,dt$ et $g(t)=\int_0^t f(s)\,ds$.

$\Rightarrow c=\int_0^1\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)dt=\iint_D f(s)\,ds\,dt$, $D=\{(s,t)\in\mathbb{R}^2,\ 0\le s\le t$ et $0\le t\le 1\}$.

$c=\int_0^1\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)dt=\int_0^1 f(s)\cdot\left(\int_s^1 dt\right)=\int_0^1(1-s)f(s)\,ds$.

$T_f(t)=\int_0^t f(s)\,ds-\int_0^1(1-s)f(s)\,ds=\int_0^t s f(s)\,ds-\int_t^1(1-s)f(s)\,ds$, donc

$|T_f(t)|\le\left|\int_0^t s f(s)\,ds\right|+\left|\int_t^1(1-s)f(s)\,ds\right| \le \|f\|\left(\int_0^t s\,ds+\int_t^1(1-s)\,ds\right)=\|f\|\left(t^2-t+\frac{1}{2}\right)$

Donc $\|T_f\|=\sup_{0\le t\le 1}|T_f(t)|\le\|f\|\sup_{t\in[0,1]}\left(t^2-t+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\|f\|$.

Donc T est continue.

3°- $\|T\|\le\frac{1}{2}$ —— (1)

soit $f_0\equiv 1$.

$T_{f_0}(t)=\int_0^t s\,ds-\int_t^1(1-s)\,ds=\int_0^1 s\,ds-\int_t^1 ds=t-\frac{1}{2}$

donc $\|T_{f_0}\|=T_{f_0}(1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \|T\|=\frac{1}{2}$.

Ex4: 1°- $T_n\in E'$:

$|T_n(f)|\le\|f\|_\infty\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{n}{n^2+x^2}\,dx\le\|f\|_\infty\frac{2}{\pi}\int_0^{1/n}\frac{1}{1+y^2}\,dy$ $\quad \frac{x}{n}=y\Rightarrow dx=n\,dy$

$\le\|f\|_\infty\cdot\operatorname{Arctang}\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{\pi}\le\|f\|_\infty$

2°. $|T_n(f)-f(0)|=\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{1/n}\frac{1}{1+y^2}[f(ny)-f(0)]+\frac{2}{\pi}\int_{1/n}^{\infty}\frac{1}{1+y^2}f(0)\right|$

comme $f\in C([0,1]) \Rightarrow f$ est uniformément continue sur $[0,1]$.

$\forall\varepsilon>0, \exists\eta>0$ $\forall y\in V(0): |y-0|<\eta \Rightarrow |f(y)-f(0)|<\varepsilon \Rightarrow \sup_y|f(ny)-f(0)|<\varepsilon$ $\ ny<1$

alors $|T_n(f)-f(0)|\le\varepsilon+\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\infty-\operatorname{arctan}\frac{1}{n}$

or $\lim|T_n(f)-f(0)|\le\varepsilon+0$ donc $\lim T_n(f)=f(0)$.

Ex6: $\delta_0 f=f(0)$.

• pour $\|\cdot\|_\infty$: on a $|f(0)|\le\sup_{[0,1]}|f(x)| \Rightarrow \delta_0$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$.

$\int_0^1|f(t)|\,dt=\int_0^{1/n}(1-nt)\,dt=t-\frac{1}{2}nt^2\Big|_0^{1/n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}\longrightarrow 0.$

$|T_K f(x)| \leq \int_{\Omega} |K(x,y)|^{\frac{1}{p}} w(y)^{\frac{1}{pq}} f(y) \, w^{-\frac{1}{pq}} |f|^{\frac{1}{q}}(y) \, k(x,y)^{\frac{1}{q}} \, dy$

$\leq \left(\int_{\Omega} |K(x,y)| \, w^{\frac{1}{q}} |f|\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\Omega} |K(x,y)| \, w^{-\frac{1}{p}} |f|\right)^{\frac{1}{q}}$

$\leq C^{\frac{1}{p}} w^{\frac{1}{pq}} |f|^{\frac{1}{p}} \cdot C^{\frac{1}{q}} w^{\frac{-1}{pq}} |f|^{\frac{1}{q}} = C|f|$

donc $\left(\int_{\Omega} |T_K f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \|f\|_{L^p}$

Donc $T_K \in L(L^p, L^p)$.

Ex 7: Dire que $(e_n)_{n \geq 1}$ est une base algébrique de E signifie que $E = \bigcup_{n \geq 1} F_n$ tel que $\dim F_n = n < \infty$, il est fermé. comme E est complet, d'après le Th de Baire $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset$. Mais le seul s.e.v. d'intérieur non vide est E lui même [Si $B(x_0, r) = x_0 + B(0,r) \subset F$, par translation, et par homothétie $\forall x \in E \Rightarrow x \in F$]

Donc $E = F_N$ pour certain $N \geq 1$ et $\dim E = N$, contradiction.

Ex 8: 1) D n'est pas continue car $\exists f_n(x) = x^n(1-x)$: $f_n \xrightarrow{c.u} 0$ sur $[0,1]$ mais $f_n'\left(\frac{n-1}{n+1}\right) \to e^{-2}$

or $0 \neq e^{-2} \Rightarrow D$ n'est continue.

2) $\Gamma(D)$ est fermé car si : $f_n \xrightarrow{c.u} f \,(\in C^1([0,1]))$ et $f_n' \xrightarrow{c.u} g$ alors $f \in C^1(0,1)$ et $f' = g$

d'après le Th de Weierstrass. Donc $\Gamma(D)$ est fermé

3- Cela ne contredit pas le Théorème du graphe fermé car $C^1([0,1])$ n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Ex 9: Vérifions que le graphe de T ($\Gamma(T)$) est fermé.

Soit $x_n \to x$ et $Tx_n \to f$ on a : $\langle Tx_n - Ty, x_n - y \rangle \geq 0$ et à la limite

on obtient $\langle f - Ty, x - y \rangle \geq 0 \; \forall y \in E$

choisissons $y = x + tz$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $z \in E$.

$\langle f - Tx - tTz, -tz \rangle = \langle f - Tx, -tz \rangle + t^2 \langle Tz, z \rangle \geq 0 \; \forall y \in E$

a- Si $t > 0 \Rightarrow \langle f - Tx, z \rangle \geq t \langle Tz, z \rangle$, on fait $t \to 0$ on obtient :

$\langle f - Tx, z \rangle \geq 0$ —— ①

b- Si $t < 0 \Rightarrow \langle f - Tx, z \rangle \leq t \langle Tz, z \rangle$ / $t \to 0$

$\langle f - Tx, z \rangle \leq 0$ —— ②

Donc $f = Tx$ c.à.d $\Gamma(T)$ est fermé.