République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Univesité D'Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques

Cours Mathématiques

Intoduction à La Théorie des Opérateurs Linéaires

Année 2016/2017

Introduction

Ces cours sont considérés comme un manuel pour un premier cour en théorie des opérateurs linéaires au niveau de la dernière année du premier cycle ($L3$) ou première année de deuxième cycle ($Master1$). Vue l'importance des opérateurs linéaires dans plusieurs diciplines ; ces cours s'adressent soient aux étudiants en mathématiques (pures, appliquées ou statistiques) soient aux étudiants en sciences et génie. Dans ce but, nous avons illustré le texte avec des exemples variés. De plus nous avons préféré l'approche classique pour qu'un étudiant ayant déjà une bonne maîtrise de l'analyse réelle, de la topologie et de l'algèbre linéaire puisse facilement suivre ces cours. C'est pourquoi nous ne donnons pas de références.

À la fin des chapitres, le lecteur trouve des exercices dont le but est de vérifier si l'étudiant a bien compris et assimilé le contenu du texte. Ce sont donc des exemples ou des applications directes de la matière qu'on a vue dans le chapitre et qui sont faciles à résoudre.

Table des matières

Chapitre 1

Opérateurs linéaires

Dans l'analyse fonctionnelle, la notion d'opérateur linéaire est une notion fondamentale puisque, en grande partie, l'analyse fonctionnelle s'est développée en étudiant des opérateurs linéaires donnés par certaines équations intégrales. Nous donnons ici les définitions et les propriétés de base des opérateurs linéaires sur un espace vectoriel linéaire.

1.1 Opérateurs linéaires sur un espace normé

Définition 1.1.1. *Soient X et Y deux espaces linéaires sur le même corps $\mathbb{K}$. Une application $T : X \longrightarrow Y$ est additive si :*

$$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2 \quad \forall (x_1, x_2) \in X^2$$

est homogène si :

$$T(\lambda x) = \lambda T x, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X.$$

Une application : $T : X \longrightarrow Y$ est linéaire si elle est additive et homogène.
Dans le cas particulier : $Y = \mathbb{K}$. T est dite fonctionnelle (forme) linéaire.

Exemple 1.1.1.

1. Soit $T : (E, B) :\longrightarrow (F, B') : dimE = n$, $dimF = p$, sur le même corps : $\mathbb{C} = \mathbb{K}$.
   T est représenté par une matrice $M(T, B, B') = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}$:
   $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$.

2. $T : C([a,b])$ sur $\mathbb{C}$ et soit k une fonction intégrable sur le quaré $[a,b]^2$. et à valeurs en $\mathbb{C}$. tq :

$$(Tf)(t) = \int_a^b k(t,x)f(x)\,dx, \quad t \in [a,b],\ \forall t \in [a,b],$$

est un opérateur linéaire. k est dite le noyau de T.

3. $T : C_c^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C_c^\infty(\mathbb{R})$: définies par :

$$(T(f))(t) = \frac{df}{dt}(t),$$

est un opérateur linéaire.

1.1.1 Propriétés des opérateurs linéaires

On considère dans toute la suite les notions suivantes

Notations 1.1.1. — *$(X, \|.\|_1)$ et $(Y, \|.\|_2)$ sont deux espaces normés sur le même corps.*

— *$L_a(X,Y)$ est l'espace des opérateurs linéaires T définis de X dans Y muni seulement d'une structures algébrique.*
— *$L_0(X,Y)$ est le sous-espace de $L_a(X,Y)$ dont le rang est fini.*

— *T un opérateur linéaire de $L_a(X,Y)$.*

Théorème 1.1.1. *Soient X, et Y deux espaces linéaires et $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. Alors :*
i) $T0 = 0$.
ii) $ImT = TX$ es tun sous espace linéaire de Y .
iii) $kerT$ est un sous espace linéaire de X .
iv) T est injective si et seulement si (ssi) : $kerT = \{0\}$.

Définition 1.1.2. *L'opérateur T est continu à $x_0 \in X$ ssi :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \|x - x_0\|_1 < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\|_2 < \varepsilon \tag{1.1}$$

Définition 1.1.3. *L'opérateur T est borné ssi :*

$$\exists M > 0 : \textit{telle que } \|Tx|\|_2 \leq M\|x\|_1 : \forall x \in X \tag{1.2}$$

Remarque 1.1.1. *Comme tout espace normé admet le 1^{ier} axiome de dénombrabilité ; alors T est continu si et seulement si T est séquentiellement continu i.e.*
$\forall (x_n)_n \subset X$: *si* $x_n \xrightarrow{X} x_0 \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{Y} Tx_0$.

Théorème 1.1.2. *L'opérateur $T \in L_a(X,Y)$ est continu sur X si et seulement s'il est borné.*

Preuve. $(1.2) \overset{?}{\Rightarrow} (1.1)$:

Soit $x_0 \in X$: $(1.1) \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| \leq M\|x - x_0\|$. Donc il suffit de choisir $\delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$;

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \leq \frac{\varepsilon}{M} : \|Tx - Tx_0\| \leq M\|x - x_0\| \leq \varepsilon$$

$(1.1) \overset{?}{\Rightarrow} (1.2)$. Utilisons la contraposé et supposons donc que T n'est pas borné alors,

$$\exists (x_n) \subset X : x_n \longrightarrow x_0, \|x_n\| = 1, \text{ et } \|Tx_n\|_2 \geq n\|x_n\|_1 = n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

.

Donc la suite $y_n = \frac{x_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{X} 0$, mais puisque $\|Ty_n\| > \sqrt{n}$ donc $(Ty_n)_n$ ne converge pas vers $T0 = 0$. ce qui veut dire que T n'est pas continu.

Exemple 1.1.2. *Soit* $T \in L_a(L^1(\mathbb{R}), \overline{C_0^0}(\mathbb{R}))$; $\quad (C_0^0(\mathbb{R}), \|.\|_{\mathbb{R}})$ *défini par :*

$$(Tf)(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)dx, \ \forall f \in L^1(dt) \ sur \ \mathbb{R}.$$

il est clair que $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ *T est donc un opérateur continu.*

Exemple 1.1.3. *Soit* $T \in L_a(C_b^\infty(\mathbb{R}; C_b^\infty(\mathbb{R}))$, *défini par :*

$$(Tf)(t) = \frac{df}{dt}(t), \forall f \in (C_b^\infty; \|.\|_\infty).$$

Alors nous avons : $\exists (f_n(t)) = sin \ nt \in C_b^\infty$: $\|f_n\|_\infty = 1$ *et* $\|Tf_n\|_\infty = \|n \ cos \ nt\| = n$.
Donc T n'est pas borné donc n'est pas continu sur $C_b^\infty(\mathbb{R})$.

• Notons par $L(X,Y) \subset L_a(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de X dans Y.

Théorème 1.1.3. *Soit $T \in L_a(X,Y)$. Alors les énoncés suivantes sont équivalentes :*

i) T est continu sur X.

ii) T est uniformément continu sur X.

iii) T est continu à l'origine.

iv) Si A est un ensemble borné dans X, alors $T(A) \subset Y$ est un ensemble borné dans Y .

Preuve.

Nous allons montrer les implications suivantes :

$(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (i)$ et $(ii) \implies (iv) \implies (iii)$.

$i \Rightarrow ii$: Nous avons, d'après l'équivalence entre bornéture et continuité de $T, \exists M > 0 \|T(x-y)\|_2 \leq M\|x-y\|_1 \forall x,y \in X$. (Donc $\forall \varepsilon > 0$, il suffit de prendre $\delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$).

$ii \Rightarrow iii$: Il suffit de prendre $y \equiv 0$.

$iii \Leftrightarrow i$:T est continu à l'origine i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x : \|x\| \leq \delta \Rightarrow \|Tx\| \leq \varepsilon,$$

soient $\varepsilon = 1$ et $0 \neq x \in X$. Soit y=$\delta\frac{x}{\|x\|}$ alors $\exists M = \frac{1}{\delta}$:$\|Tx\| \leq M\|x\|, x \in X$. d'après le théorème 1.1.2 T est continu sur X.

$ii \Rightarrow iv$: On montre par l'absurde : soit $A = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ borné dans $(X, \|.\|_1)$.

On considère $x_n \to x_0$. Comme T est continu $\Rightarrow Tx_n \to Tx_0 \Rightarrow Tx_n$ est borné dans $(Y, \|.\|_2)$, contradiction, donc TA est borné.

$iv \Rightarrow iii$: $\overline{(iii)} \Rightarrow \overline{(iv)}$:

Soit T est discontinu à l'origine, $\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X\backslash\{0\}$ telle que : $x_n \xrightarrow{\|.\|_1} 0$ et $lim_{n\to monstrationinfty} Tx_n \neq T0 = 0$.

Alors $\exists \{x_{n_k} = y_k; k \in \mathbb{N}\} \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$: $Ty_k \neq 0$ et $lim Ty_k = y_0 \in Y\backslash\{0\}$.

Posons $z_k = \frac{y_k}{\|y_k\|_1} \subset \mathcal{S}(0,1)$ or $\|z_k\|_1 = 1$ et $\|Tz_k\|_2 > \frac{\epsilon}{\|y_k\|_1} \longrightarrow +\infty$.

$A = \{z_k\}$ borné, mais TA n'est pas borné c.à.d $\overline{iii} \Rightarrow \overline{iv} \Leftrightarrow iv \Rightarrow iii$.

Théorème 1.1.4. *Tout opérateur linéaire sur un espace normé de dimension algébrique finie est continu.*

1.1.2 L'espace $L(X, Y, \|.\|)$

Soit $(X, \|.\|_1)$ et $(Y, \|.\|_2)$ deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$.

$L(X, Y)$ signifie l'ensemble des opérateurs linéaires continus de X dans Y, qui est un sous-espace linéaire de l'espace $L_a(X, Y)$.

Théorème 1.1.5. *L'application :* $\|.\| : L(X, Y) \longrightarrow \mathbb{R}^*$*, données par :*

$$\|T\| = sup\{\|Tx\|_2 : x \in X \ \ et \ \ \|x\|_1 \leq 1\},$$

est une norme pour $L(X, Y)$*.*

Preuve. Pour tout $T \in L(X, Y), 0 \leq \|T\| < \infty$ et

* Si $\|T\| = 0$, alors $Tx = 0, \forall x \in X$. En effet pour $x \neq 0$,
$\|Tx\|_2 = \|x_1\|\|T\frac{x}{\|x_1\|}\|_2 = 0 \Rightarrow Tx = 0$ sur X et $T \equiv 0$.
* $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\|\lambda T\| = |\lambda| \, \|T\|$, car :

$$\begin{aligned}\|\lambda T\| &= sup\{\|(\lambda T)x\|_2; \|x\|_1 \leq 1\} \\ &= sup\{|\lambda| \, \|Tx\|_2 \ : \|x\|_1 \leq 1\} = |\lambda| \, \|T\|.\end{aligned}$$

Enfin, $\forall x \in X$: $\|x\|_1 \leq 1$, on a :
$\|(T_1 + T_2)x\|_2 = \|T_1x + T_2x\|_2 \leq \|T_1x\|_2 + \|T_2x\|_2 \leq \|T_1\| + \|T_2\|$.

Remarque 1.1.2. *Soit* $T \in L(X, Y)$*, on a :*

$\Leftrightarrow \inf\{M : \|Tx\|_2 \leq M\|x\|, \forall x \in X\}$

Exemple 1.1.4. *Soit* $T : L^1(dt) \longrightarrow (\overline{C}_0(\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$*, telleque :*
$(Tf)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) \, dt$*. Montrer que* $\|T\| = 1$*.*
En effet :
On a : $\|Tf\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t) \, dt| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|f\| \, dt = \|f\|_{L^1}$

$$\|T\| = sup\frac{\|f\|_{L^1}}{\|f\|_{L^1}} \leq 1$$

D'autre part : pour $f \geq 0$ $f \in L^1$*, on a :*

$$\|Tf\|_\infty \geq (Tf)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, dt \ = \|f\|_1,$$

donc $\|T\| = 1$*.*

Théorème 1.1.6. *Soient* $(X, \|.\|_1)$ *un espace normé et* $(Y, \|.\|_2)$ *un espace de Banach. Alors* $L(X, Y)$ *est un espace de Banach.*

Preuve. On sait déjà que $L(X, Y)$ est un espace normé. Il nous reste à montrer que $L(X, Y)$ est complet.

Soit $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0(\varepsilon) > 0 : \forall n, m > N_0(\varepsilon) \Rightarrow \|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Pour $x \in X$ fixé, l'inégalité $\|T_n x - T_m x\|_2 \leq \|T_n - T_m\|$
$|x\|_1 < \varepsilon\|x\|_1$. Montrons que :
$\{T_n x,\ n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ est une suite de Cauchy dans $(Y, \|.\|_2)$ qui est complet donc $T_n x$ est convergente, i.e $\exists lim_{n\to+\infty} T_n x \quad \forall x \in X$.
Définissons l'application : $T : X \longrightarrow Y$ par $Tx = lim_{n\to+\infty} T_n x,\ \forall x \in X$.

Montrons que $T \in L(X, Y)$
* T est linéaire (claire).
* D'autre part, Nous avons $\|T_n x\|_2 \leq M\|x\|_1\ \forall x \in X$, qui entraîne, pour $n \longrightarrow +\infty$, que
$\|Tx\|_2 \leq M\|x\|_1$, et donc $T \in L(X, Y)$.
Enfin, montrons que $T_n \overset{\|.\|}{\to} T$.
Nous avons $\|T_m x - T_n x\|_2 \leq \|T_m - T_n\|\ \|x\|_1 < \varepsilon\|x\|_1$, si $n, m > N_0(\varepsilon)$ et pour tout $x \in X$.
En fixons t_n, nous obtenons pour
$m \to +\infty$ $\|Tx - T_n x\|_2 \leq \|T - T_n\|\ \|x\|_1 < \varepsilon\|x\|_1$, si $n > N_0(\varepsilon)$, et donc $\|T - T_n\| < \varepsilon$ si $n > N_0(\varepsilon)$ c-à-d $T_n \xrightarrow{\|.\|} T$.

Corollaire 1.1.1. *Soit* $(X, \|.\|_1)$ *un espace normé. Alors l'espace dual Topologique* $X^* = L(X, \mathbb{K})$ *est un espace de Banach.*

Exemple 1.1.5. *Considérons l'espace de Banach* $X = Y = (\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$. *Pour* $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, *nous avons :*
$\|Tx\|_\infty \leq \|T\|\ \|x\|_\infty$ *et* $\|T\| = Max_{1\leq i\leq m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$, *où* $(a_{ik})_{m\times n} = \mathcal{M}(T; B)$, *donc* $\mathcal{M}_{m\times n}$ *est un Banach.*

Prolongement par continuité

Rappel 1.1.1. ***Complété d'un espace métrique*** *Nous avons vu en topologie que tout espace métrique peut-être plongé dans un espace métrique complet.*

Théorème 1.1.7. *Soit (X, d) un espace métrique métrique. Il existe un espace métrique complet $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ et une application isométrique $f : X \longrightarrow \widetilde{X}$ d'image dense .*

Théorème 1.1.8. *Soit $T \in L(X, Y)$ où $(X, \|.\|_1)$ et $(Y, \|.\|_1)$ sont deux espaces normés sur le même corps $\mathbb{K}$. Soient $(\widetilde{X}, \widetilde{\|.\|_1})$ et $(\widetilde{Y}, \widetilde{\|.\|_2})$ les deux espaces de Banach complétés correspondants aux $(X, \|.\|_1)$ et $(Y, \|.\|_2)$ respectivement. Alors, il existe $\widetilde{T} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{Y}$ tq $\widetilde{T} \in L(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) : \|\widetilde{T}\| = \|T\|$.*

Preuve. On sait que les éléments de $\widetilde{X}$ sont les classes des suites de Cauchy de X équivalentes, i.e ayant la même limite.
Soit donc $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset X$ une suite de Cauchy. Pour $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ telleque $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \in \widetilde{x}$, nous posons $\widetilde{T}\widetilde{x} = lim_{n\to+\infty} Tx_n$. Alors $\widetilde{T}$ est bien définie et $\widetilde{T} \in L_a(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$. En effet,

$\|Tx_n - Tx_m\|_2 \leq \|T\| \; \|x_n - x_m\|_2 \longrightarrow 0 \quad n, m \longrightarrow +\infty$, donc $\{Tx_n, \; n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ est une suite de Cauchy. Il existe alors un seul élément $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}$ tel que :
$\{Tx_n; \; n \in \mathbb{N}\} \subset \widetilde{Y} : \quad \widetilde{T}\widetilde{x} = \widetilde{y}$, donc $\widetilde{T}$ est bien définie.

$\widetilde{T}(\alpha\widetilde{x}_1 + \beta\widetilde{x}_2) = lim_{n\to+\infty}(T(\alpha\widetilde{x}_{1,n} + \beta\widetilde{x}_{2,n}) = \alpha\widetilde{T}\widetilde{x}_1 + \beta\widetilde{x}_2$, pour tout $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in \widetilde{X}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

de plus $\widetilde{T} \mid_X = T$, puisque $x \in X$, alors on prend la suite de Cauchy $\{x; x; x; ...\} \subset X$ et $\widetilde{T}\widetilde{x} = lim_{n\to+\infty} Tx = Tx$.
Montrons que $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Puisque : $\widetilde{T} \mid_X = T \Rightarrow \|\widetilde{T}\| \geq \|T\|$. D'autre part, $\|\widetilde{T}x^2\| = \|lim_{n\to+\infty} Tx_n\| \leq \|T\| lim_{n\to+\infty}\|x_n\| = \|T\| \; \|\widetilde{x}\|$, donc $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$ alors : $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Convergence dans l'espace L(X,Y)

Dans ce paragraphe, nous étudions trois genres de convergence des suite d'opérateurs linéaires et deux genres de convergence des suites dans un espace normé.

Soit $(X, \|.\|_1)$ et $(Y, \|.\|_2)$ deux espaces normés et $L(X, Y)$ l'espace normé des opérateurs linéaires et continus de X dans Y.

Définition 1.1.4. *Soit $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X, Y)$ et $T \in L(X, Y)$.*

a- La suite $\{T_n; \; n \in N\}$ converge en norme, vers T si

$lim_{n\to+\infty}\|T_n - T\| = 0$ *et nous écrivons* $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$.
b-La suite $\{T_n;\ n \in N\}$ *converge uniformément, vers* T *si*
$lim_{n\to+\infty}\|T_n x - Tx\|_2 = 0$ *et nous écrivons* $T_n \xrightarrow{c.u} T$.
c- La suite $\{T_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *converge ponctuellement (simplement) vers* T *si*
$lim_{n\to\infty} T_n x = Tx, \forall x \in X$ *et nous écrivons* $T_n \xrightarrow{s} T$.
d- La suite $\{T_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *converge faiblement vers* T *si*
$f(T_n x) \longrightarrow f(Tx), \forall x \in X, f \in Y' = \{$*l'ensemble des formes linéaires continus de* $Y \longrightarrow \mathbb{K}\}$
et nous écrivons :$T_n \xrightarrow{w} T$ *ou* $T_n \rightharpoonup T$.

Rappel 1.1.2. *(Topologie faible)*
Soit X *un espace normé.*

Définition 1.1.5. *La topologie faible de* X *est la topologie la moins fine (moins d'ouverts) pour laquelle toutes les formes linéaires continues* $\varphi \in X^*(X')$ *restent continue.*
On la note $\sigma(X, X^*)$ $\quad (\sigma(X, X'))$ *ou plus simplement* w.

Proposition 1.1.1. *Une base de voisinages pour la topologie faible de* $x_0 \in X$ *est donnée par les parties.*
$V_{\varepsilon,\varphi_{i,i=\overline{1,n}}}(x_0) = \{x \in X :\ |\varphi_j(x - x_0)| \le \varepsilon, \forall j = \overline{1,n}\}$ *avec* $\varepsilon > 0,\ n \ge 1$ *et* φ_i $i = \overline{1,n} \in X^*$ *arbitraires.*

Proposition 1.1.2. *La suite* $(x_n)_{n\ge1}$ *converge vers* x *pour la topologie faible si et seulement si :*

$$\varphi(x_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x) \qquad \forall \varphi \in X^*,$$

et on écrit :

$$x_n \overset{w}{\longrightarrow}_{n\to+\infty} x,$$

ou

$$x_n \rightharpoonup x,$$

ou

$$x_n \overset{\sigma(X,X^*)}{\longrightarrow} x \text{ ou } w - lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

Proposition 1.1.3. *Soit* X *un espace de Banach muni de la topologie faible,* X *est un espace vectoriel topologique, localement convexe et séparé.*

Exemple 1.1.6. ***EX1*** *: Soient* $X = L^1([0,1])$ *et* $Y = (C([0,1], \|.\|_{[0,1]})$. *Soient* $k_n(t,x)$ *et* $k(t,x)$ *des fonctions continues sur le carré* $[0,1]^2$, *et*
$\|k_n\|_{[0,1]\times[0,1]} \leq 1,\ n \in \mathbb{N}$.

Considérons les applications $T_n, T : L^1 \longrightarrow C([0,1], \|.\|_\infty)$ *par*
$T_n f(t) = \int_0^1 k_n(t,x)f(x)\,dx$ *et* $Tf(t) = \int_0^1 k(t,x)f(x)\,dx$

Alors T_n *et* T *sont des opérateurs linéaires continues. Nous avons*
$T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$ *si* $\sup_{t\in[0,1]} |\int_0^1 (k_n(t,x)f(x) - k(t,x)f(x))\,dx| \leq \varepsilon\|f\|_1$,*pour* $n > n_0(\varepsilon)$, *et pour tout* $f \in L^1$. *C'est le cas lorsque* $k_n \longrightarrow k$ *uniformément sur* $[0,1]^2$ *;*

$T_n \xrightarrow{s} T$ *si* $lim_{n\to+\infty} \int_0^1 k_n(t,x)f(x)\,dx = \int_0^1 k(t,x)f(x)\,dx \quad \forall f \in L^1$ *;*

$T_n \xrightarrow{w} T$ *si* $lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (\int_0^1 k_n(t,x)f(x)\,dx)\,d\mu(t)) = \int_0^1 \int_0^1 k(t,x)f(x)\,dx\,d\mu(t)$.

pour tout $f \in L^1$ *et pour toute mesure* μ *sur la* σ*-algèbre de Borel sur* $[0,1]$ *.*

• *Maintenant nous montrons quelques relation entre ces types de convergence .*

Théorème 1.1.9. *Sur la boule d'unité on a une équivalence entre la convergence en norme et la convergence uniforme i.e. on a* $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T \Rightarrow T_n x \longrightarrow Tx$ *uniformément sur* $\{x : \|x\|_1 \leq 1\} \subset X$.

Preuve. *"*$\Rightarrow$*" Supposons que* $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$, *donc pour* $x \in \overline{B(0,1)}$ *on a*
$\sup_{x\in B(0,1)} \|T_n x - Tx\| \leq \|T_n - T\|\,\|x\|_1 \leq \|T_n - T\|_n \longrightarrow 0$, *si* $n \longrightarrow +\infty$.

Ce qui entraîne la convergence uniforme de $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ *sur* $\overline{B(0,1)}$.

"$\Leftarrow$*" Supposons que* $\{T_n x,\ n \in \mathbb{N}\}$ *uniformément vers* Tx *sur* $\overline{B(0,1)}$. *Puisque* $\|T_n - T\| = \sup_x\{\|T_n - T)x\|_2;\ \|x\|_1 \leq 1\}$, *la suite converge en norme vers* T.

Théorème 1.1.10. *Soit* $T_n,\ T \in L(X,Y)$.

a- Si $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$ *entraîne que* $T_n \xrightarrow{s} T$.
b- Si $T_n \xrightarrow{s} T$ *entraîne que* $T_n \xrightarrow{w} T$.

Preuve. *a- Nous avons pour tout* $x \in X$ *:*
$\|T_n x - Tx\|_2 = \|(T_n - T)x\|_2 \leq \|T_n - T\|\,\|x\|_1 \to 0$, *si* $n \to +\infty$.

b- Nous avons pour tout $f \in Y^*$ *et pour tout* $x \in X$ *fixé :*
$|f(T_n x) - f(Tx)| = |f(T_n - T)x| \leq \|f\|_{Y^*}\|T_n x - Tx\|_2 \longrightarrow 0 \quad n \to +\infty$.

Remarque 1.1.3. $T_n \xrightarrow{s} T$ *n'entraîne pas* $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$, *et* $T_n \xrightarrow{w} T$ *n'entraîne pas* $T_n \xrightarrow{s} T$.

Exemple 1.1.7. *1/ Considérons* $X = Y = \ell^2 = \{x = (x_n)_{n\in N} : \|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$,

et soit $T_n \in L(X,Y)$ *la projection orthogonale de* X *sur* $< e_{n+1}, e_{n+2}, ... >$ *i.e*

$T_n(x_1, x_2, ...) = (\underbrace{0, ..., 0}_{nfois}, x_{n+1}, x_{n+2}, ...)$.

Alors nous avons pour tout $x \in X$,

$\|T_n - 0)x\|_{\ell^2}^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \longrightarrow 0$ *si* $n \longrightarrow +\infty$.

et donc $T_n \xrightarrow{s} T$. *Mais d'autre part,*

$\|T_n\| = \sup_x\{\|T_n x\|_{\ell^2} : \|x\|_{\ell^2} = 1\} \geq \|T_n e_{n+1}\|_{\ell^2} = 1 \nrightarrow 0$

c-à-d $T_n \overset{\|.\|}{\nrightarrow} T = 0$.

2/ Considérons $X = Y = \ell^2$ *et* $\{T_n = (T_s)^n;\ n \in \mathbb{N}\} \in L(X)$ *ou*

$T_s : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ *l'opérateur de déplacement* $\in L(X)$ *défini par*

$T_s(x) = T_s(x_1, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$.

$T_n x = T_n((x_1, x_2, ...)) = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{nfois}, x_1, x_2, ...)$.

Considérons $f \in X^* = \ell^2$ *représenté par* $f = (f_1, f_2, ...) \in \ell^2$. *Alors*

$$\begin{aligned} |f(T_n(x))| &= |T_n x, f)| = |\sum_{k=1}^{\infty} f_{k+n}.x_k| \\ &= (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{1/2} (\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k|^2)^{1/2} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &= \|x\|_{\ell^2} (\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k|^2)^{1/2} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Donc $T_n \xrightarrow{w} T = 0$.

D'autre part nous avons pour tout $x \in X$ $\|T_n x\|_{\ell^2} = \|x\|_{\ell^2}$ *et donc* $T_n \overset{s}{\nrightarrow} T$.

- *Cas où la convergence en norme et faible sont équivalentes.*

Théorème 1.1.11. *Si la dimension algébrique de l'espace* $(X, \|.\|)$ *est fini alors la convergence en norme est équivalente à la convergence faible.*

Preuve. *Soit* $e_1, ..., e_m$ *une base algébrique de* X *et supposons que* $x_n \xrightarrow{w} x$, *où* $x_n = \sum_{j=1}^{m} \xi_{nj} e_j$ *et* $x = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j$.

considérons les formes linéaires $x'_j \in X$, $1 \leq j \leq m$ *qui satisfait à :*

$x'_j(e_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i,j \leq m.$

En effet : pour tout $x \in X$, *on a* $x = \sum_{j=1}^m \xi_j e_j$, *si* $x' \in L_a(X, \mathbb{K})$ *on a* $x'(x) = \sum_{j=1}^m \xi_j x'(e_j)$.

donc x' *est déterminée de façon unique par les nombres* $x'(e_j)$ $j = \overline{1,m}$.

Montrons qu'on peut construire les formes linéaires $x'_j \in L_a(X, \mathbb{K})$, *telles que* $x'_j(e_k) = \delta_{jk} \quad 1 \leq j,k \leq m$.

[En effet , nous définissons $x'_j(x) = x'_j(\sum_{k=1}^m \xi_k e_k) = \xi_j \quad j = \overline{1,m}$.

évidement x'_j *sont des formes linéaires et de plus indépendantes, donc* $dim L_a(X, \mathbb{K}) \geq m$.

D'autre part si $x' \in L_a(X, \mathbb{K})$, *alors on a pour tout* $x \in X$,

$x'(\sum_{k=1}^m \xi_k e_k) = \sum_{k=1}^m \xi_k x'(e_k) = \sum_{k=1}^m \xi_k \lambda_k = \sum_{k=1}^m \lambda_k x'_k(x)$ *donc*

$x' = \sum_{k=1}^m \lambda_k x'_k$ *c-à-d dim* $L_a(X, \mathbb{K}) = m$. *Puisque chaque espace linéaire sur le corps* $\mathbb{K}$, *de dimension algébrique* m, *est isomorphe à l'espace linéaire* $\mathbb{K}^m$, *toute forme linéaire* $x' \in L_a(X, \mathbb{K})$ *est déterminé dans une base donnée pour* $L_a(X, \mathbb{K})$ *par un* m*-uplet* $(\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$, *ou* $\lambda_j = x'(e_j)$ $j = \overline{1,m}$*].*

Alors nous avons pour

$$1 \leq j \leq m \qquad lim_{n \to \infty} \xi_{n_j} = lim_{n \to +\infty} x'_j(x_n) = x'_j(x) = \xi_j,$$

et l'égalité $\|x_n - x\| = \| \sum_{j=1}^m (\xi_{n_j} - \xi_j) e_j)\| \leq \sum_{j=1}^m |\xi_{n_j} - \xi_j \ \| e_j\|$, *ce qui montre que* $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

1.2 Principe de la borne uniforme (théorème de Banach Steinhauss)

1.2.1 Théorème de Banach Steinhauss

Théorème 1.2.1. *Soient* E, F *deux espaces de Banach Soit* $(T_i)_{i \in I}$ *:* I *une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continues de* E *dans* F. *On suppose que :*

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\|_F \leq +\infty \forall x \in E. \tag{1.3}$$

Alors

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{L(E,F)} < +\infty \qquad . \tag{1.4}$$

Autrement dit : Si $\{T_i \in I\} \subset L(E,F)$ *telles qu'il existe pour tout* $x \in E$ *un nombre* $M(x)$ *tel que pour tout* $i \in I$, *on ait* $\|T_i x\|_F \leq M(x)$.

Alors il existe un $0 \leq k + \infty$ *tel que :* $\|T_i\|_{L(X,Y)} \leq k \quad i \in I$.

Preuve. *Pour chaque entier* $n \geq 1$ *on pose*

$$x_n = \{x \in E; \forall i \in I \|T_i x\| \leq n\}$$

de sorte que x_n *est fermé est grâce à* (1.3) *on a :* $\cup_{n\geq} X_n = E$

Il résulte du théorème de Baire que $IntX_{n0} \neq \varnothing$ *pour un certain* $n_0 \geq 0$. *Soient* $x_0 \in E$ *et* $r > 0$ *tels que* $B(x_0, r) \subset X_{n_0}$, *on a*

$$\|T_i(x_0 + rz)\| \leq n_0 \quad i \in I, \forall z \in B(0,1).$$

Par conséquent il vient pour tout $z \in B(0,1)$

$$\|T_i(rz)\| \leq \|T_i x_0\| + \|T_i(x_0 + rz)\| \Rightarrow r\|T_i z\|_F \leq n_0 + \|T_i x_0\|_F.$$

donc $\|T_i\|_{L(E,F)} \leq (\frac{n_0}{r} + \sup_i \|\frac{\|t_i x_0\|}{r})$.
$sup_{\|z\|\leq 1}\|T_i z\|_F = \|T_i\|_{L(E,F)} \leq \frac{1}{r}(\frac{n_0}{r} + \sup_i \|T_i x_0\|_F)$.

Corollaire 1.2.1. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach. Soit* (T_n) *une suite d'opérateurs linéaires et continues de* E *dans* F *tels que :*
$\forall x \in E \; lim_{n\to+\infty} T_n x = Tx$. *Alors*

$(a) \quad \sup_n \|T_n\|_{L(E,F)} < +\infty$,
$(b) \quad T \in L(E,F)$,
$(c) \quad \|T\|_{L(E,F)} \leq lim_n \, inf \|T_n\|_{L(E,F)}$.

Preuve. (a) $T_n x \longrightarrow Tx \; \forall x \in E \Rightarrow \|T_n x\| \leq M(x) \; \forall x \in E$ *d'après le th.B.Stei on a*

$\sup_n \|T_n\|_{L(E,F)} < c$.

(b) *On a* $(a) \Rightarrow \exists c > 0 : \; \|T_n x\|_F \leq c\|x\|_E \quad \forall n \geq 0, \forall x \in E$.

Par passage à la limite $(n \longrightarrow +\infty)$ *on obtient :* $\|Tx\|_F \leq c\|x\| \; \forall x \in E$, *donc* $T \in L(E,F)$.

(c) *Enfin on a :* $\|T_n x\|_F \leq \|T_n\|_{L(E,F)}\|x\| \; \forall x \in E \overset{n\to+\infty}{\Rightarrow} lim\frac{\|T_n x\|}{\|x\|} \leq inf \; \|T_n\|_{L(E,F)}$

$\|T\|_{L(E,F)} \leq lim_{n\to+\infty} \inf \|T_n\|_{L(E,F)}$.

Corollaire 1.2.2. *Soit* G *un espace de Banach et soit* B *un sous-ensemble de* G. *On suppose que :*

Pour tout $f \in G^*$ *l'ensemble* $f(B) = U_{x\in B}\{< f, x >\}$, *est borné (dans* $\mathbb{R}$*). Alors* B *est borné.*

Preuve. *On applique le théorème de B.Stei, avec $E = G^*$, $F = \mathbb{R}$, et $I = B$. Pour chaque $b \in B$ on pose : $T_b(f) = f(b), f \in E = G^*$.*

de sorte que : $\sup_{b\in B} |T_b(f) < +\infty \in E$.

Grâce au th.B.Stei il existe une Cte $c > 0$ tq : $|f(b)| \leq c\|f\|_{G^*},\ \forall f \in G^*, \forall b \in B$.

Par conséquent on a : $\|b\|_E \leq c \quad \forall b \in B \Leftrightarrow B$ est borné.

$\xrightarrow{ch2} [\forall x \in E \quad : \|x\|_E = \sup_{f\in E^*, \|f\|\leq 1} | < f, x > | = Max_{f\in E, \|f\|\leq 1} \|f(x)|]$.

Remarque 1.2.1. *Ce corollaire signifie que pour vérifier qu'un ensemble est borné. Il suffit de le "regarder" à travers toutes les formes linéaires continues. C.à.d Faiblement borné $\Rightarrow$ fortement borné.*

Corollaire 1.2.3. *(l'énoncé dual du Corollaire 1.2.2)*

Soit G un espace de Banach et soit B' un sous-ensemble de G^*. On suppose que :

Pour tout $x \in G$ l'ensemble $< B', x >= \cup_{f\in B'} < f, x >$ est borné (dans $\mathbb{R}$). Alors

B' est borné.

Preuve. *On applique le th de B.Stei avec $E = G$, $F = \mathbb{R}$ et $I = B'$. Pour chaque $f \in B'$ on pose $T_f(x) =< f, x > \quad (x \in G = E)$*

et on conclut qu'il existe une cte $c > 0$ telle que :

$| < f, x > | \leq c\|x\| \quad \forall f \in B' \quad \forall x \in G$.

$\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} | < f, x > | \leq c \qquad \forall f \in B'$ *est borné.*

Application

Soit E un espace de Banach et F un espace normé. Il existe une autre version du th de B.Stei qui est la suivante :

Pour toute famille d'opérateurs $T_i \in L(E, F), i \in I$, on a l'alternative suivante :

(i) Soit il existe $M < +\infty$ tel que : $\|T_i\| \leq M \quad \forall i \in I$.

(ii) Soit il existe une partie dense G de E (qui est une intersection dénombrable d'ouverts denses) dont tout élément x vérifie $\sup_{i\in I} \|T_i x\|_F = +\infty$.

Par exemple : Il existe un ensemble de fonctions $L^1(0, 1)$ dont la série de Fourrier ne converge pas pour la norme de $L^(0, 1)$.

1.3 Opérateurs inversibles, théorème du graphe fermé

Définition 1.3.1. *Soient X et Y deux espaces normés. Un opérteur $T \in L(X,Y)$ est invesible (régulier), si (1) T est surjectif, (2) T^{-1} existe sur y et $T^{-1} \in L(Y,X)$. Cet ensemble est noté par $L_r(X,Y)$.*

Évidement, si f^{-1} existe et est continue sur Y_i elle est ouverte. En particulier un opérateur régulier est ouvert.

Théorème l'application ouverte

Définition 1.3.2. *Soient X et Y deux espaces normés (ou métriques) une application $f \in F(X,Y)$ est une application ouverte si l'image de tout ensemble ouvert de X est un ensemble ouvert de Y.*

Évidement, si f^{-1} existe et est continue sur Y_i elle est ouverte. En particulier un opérateur régulier est ouvert.

Théorème 1.3.1. ***(de l'application ouverte)*** *Soient X et Y deux espaces de Banach. Si $T \in L(X,Y)$ et $Y = TX$ (surjective) T est un opérateur ouvert.*

Preuve. *Puisque X, Y sont des espaces normés et T est linéaire, il suffit de montrer que $\exists \delta > 0 : B_Y(0,\delta) \subset T(B_X(0,1))$ i.e $\exists \delta > 0$, tq $: \forall y : \|y\| < \delta \Rightarrow y = Tx : \quad \|x\| < 1$.*

Notons d'abord que $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} nB_X(0,1)$ et montrons que $Y = \cup_{n\in\mathbb{N}} n\overline{TB_X(0,1)}$.

En effet pour $y \in Y$, il existe $x \in X : y = Tx$ (T est surjectif). Si $\|x\|_X < k \in \mathbb{N}, y \in T(kB_X(0,1) = kT(B_X(0,1))$. Y est un Banach $\Rightarrow Y = \cup_{k\geq 1} \overline{kT(B_X(0,1))}$ ($\mathring{Y} \neq \varnothing \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \overline{BT(B_X(0,1)} \neq \varnothing$ Baire).

D'après le théorème de Baire $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:$\overline{T(n_0 B_X(0,1))} = n_0 \overline{T(B_X(0,1)}$ contient un ouvert non vide U.

Puisque T est linéaire $TB_X(0,1)$ et $\overline{TB_X(0,1)}$ sont convexes et $-U \subset n_0 \overline{TB_X(0,1)}$ (si $y = Tx \in TB_X(0,1) \Rightarrow -Tx = -y \in TB(0,1)$) implique que.

$U_1 = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(-u) \subset n_0 TB_X(0,1)$. Notons que U_1 est ouvert contient 0 l'origine, c-à-d U_1 est un voisinage de $0 \Rightarrow \exists \delta' > 0$ tq $B_Y(0,\delta') \subset U_1 \subset n_0 TB_X(0,1)$ et en posant

$\delta_1 = \frac{\delta'}{n_0}$, *nous obtenons* $B_Y(0,\delta_1) \subset \overline{TB_X(0,1)}$, *ce qui équivaut pour* $\delta = \frac{\delta_1}{2^+}$ *à*

$$B_Y(0,\delta) \subset \overline{TB_X(0,1/2)} \tag{1.5}$$

Il nous reste à montrer que $\overline{TB_X(0,1/2)} \subset TB_X(0,1)$, *et Th est établi.*

Fixons $y \in \overline{TB_X(0,1/2)} \Rightarrow \exists x_1 : \|x_1\| < 1/2 : \ \|Tx_1 - y\| < \delta/2$,

(d'aprés (2.19) $\forall \varepsilon > 0, \exists z \in E : \|z\|_E < 1/2$ *et* $\|y - Tz\| \leq \varepsilon$*)*

donc $y_1 = -Tx_1 + y \in B_Y(0,\delta/2) \subset \overline{TB_X(0,1/2^2)}$.

D'après le même argument, il existe un x_2, $\|x_2\| < 1/4$, *tel que*

$\|Tx_2 - y_1\| = \|Tx_2 + Tx_1 - y\| < 2^{-2}\delta$ *et* $y_2 = -Tx_2 - Tx_1 + y \in B_Y(0,2^{-2}\delta) \subset \overline{TB_X(0,2^{-3})}$.

Nous continuons de cette façon et nous obtenons une suite $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ *telle que*

(a) $\|x_n\| < 2^{-n}$ *(b)* $\|T(\sum_{k=1}^{n} x_k) - y\| < 2^{-n}\delta$.

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k; n \in \mathbb{N}$. *Puisque* $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *est une suite de Cauchy et* X *un espace de Banach, la suite* $\{S_n; n \in \mathbb{N}\}$ *converge vers un élément* $x : \|x\| < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{+^{-k}} = 1$.

Puisque T *est continu, nous obtenons de* (b) *ci-haut que* $Tx = y$.

Théorème 1.3.2. ***Théorème de Banach*** *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* $T : E \longrightarrow F$ *une application linéaire continue et bijective. Alors* T^{-1} *est automatiquement continue.*

Preuve. *D'après le Théorème précédent :* T *est ouvert* $\Leftrightarrow \exists c > 0 : B_F(0,c) \subset TB_X(0,1)$.

c-à-d $T^{-1}(B_F(0,c)) \subset B_E(0,1)$.

Soit $\|y\| < c \Rightarrow \|T^{-1}y\| \leq 1$

Par conséquent, par homogénéitie :$\|y\| \leq 1 \Rightarrow \|T^{-1}y\| \leq 1/2 \Rightarrow \|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{c}\|y\| \ \forall y \in F$.

Corollaire 1.3.1. *Soit* E *un e.v muni de 2 normes telles que* E *soit complet pour chacune d'elles. Supposons de plus que ces deux normes sont comparables. Alors elles sont équivalentes.*

Théorème du graphe fermé

Définition 1.3.3. *Soient* X *et* Y *deux espaces normés et* $T \in L_a(X,Y)$. *Alors* T *est un opérateur linéaire avec un graphe fermé si pour tout* $(x_n), x_0 \in$

X, si

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0 et T x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} y_0 \Rightarrow y_0 = Tx_0. \tag{1.6}$$

Observons que $T \in L_a(X, X)$ est un opérateur linéaire avec un graphe fermé ssi si son graphe $G = \Gamma(T)\{(x, Tx) : \ x \in X\} \subset X \times Y$ est un ensemble fermé dans $X \times Y$. En effet (1.6) entraîne que tout point d'adhérence de G appartient à G. inversement si G est un ensemble fermé de $X \times Y$ et si

$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$, alors $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} y_0$, alors $(x_0, y_0) \in \overline{G}$, donc $(x_0, y_0) \in G$ i.e $y_0 = Tx_0$.

Cette propriété caractérise les opérateurs linéaires continus dans les espaces de Banach.

Théorème 1.3.3. ***(Théorème du graphe fermé (1929))*** *Soit E et F deux espaces de Banach et*

$T : E \longrightarrow F$ une application linéaire, si le graphe de T est fermé dans $E \times F$, alors T est continue.

Preuve. *Munissons E d'une second norme $\|.\|_T$ définie par*

$$\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F \quad \forall x \in E.$$

Elle est plus fine que $\|.\|_E$ et la condition disant que le graphe G_T fermé entraîne que $(E, \|.\|_T)$ est un espace complet (car G_T fermés dans l'espace complet $E \times F$), donc est lui-même complet). Ces deux normes sont équivalentes i.e $\exists c > 0$

$\|x\|_T \leq c\|x\|_E \quad \forall x \in E \Rightarrow \|Tx\|_F \leq (c-1)\|x\|_E \quad \forall x \in E$ i.e T est continue.

Remarque 1.3.1. *On voit que ce théorème rend la vérification de la continuité plus facile.*

Remarque 1.3.2. *Il y a des opérateurs linéaires avec un graphe fermé qui ne sont pas continus.*

Exemple 1.3.1. *Soit $X = Y$ l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ muni de la norme $\|.\|_{|z|\leq 1}$, évidemment X et Y ne sont pas des espaces de Banach.*

Définissons $T \in L_a(X)$ par :

$T(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$.

Supposons que $\{P_n \in X; n \in \mathbb{N}\}$ converge en norme vers $p \in X$ et que $\{TP_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ converge en norme vers $q \in X$. Alors $q = TP$. D'autre part T n'est pas continue. En effet

$\exists P_n(z) = z^n : \|P_n\| = 1$ mais $\|Tz^n\| = n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ ($\|P_n\| \longrightarrow 1$ mais $\|TP_n\| = n \longrightarrow +\infty$).

Propriétés de l'ensemble $L_r(X)$.

Théorème 1.3.4. *Soient $T_1, T_2 \in L_r(X)$, alors $T_1 o T_2 \in L_r(X)$ et $\lambda T_1 \in L_r(X)$ pour tout $\lambda \in K \setminus \{0\}$.*

Théorème 1.3.5. *Soit $T \in L_r(X)$ où $(X, \|.\|)$ est un espace de Banach. Si $\|T\| < 1$, alors $I - T \in L_r(X)$ et $(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.*

Preuve. *On sait que la série $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ converge localement uniformément et absolument dans $|z| < 1$. De plus $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$.*

Parce que $\|T\| < 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$, où $\mathring{T} \approx I$ est convergente en norme.

Posons $U = \sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1-\|T\|} < +\infty. \qquad (\|T\| < 1)$.

Ce qui entraîne que $U \in L(X)$. Montrons que $U = (I-T)^{-1}$ et donc $I - T \in L_r(X)$.

Soit $U_n = \sum_{k=0}^{n} T^k$. Alors nous avons

$$U_n o(I-T) = (I-T)oU_n = I - T^{n+1}.$$

Puisque $U_n \xrightarrow{\|.\|} U$ et $T^{n+1} \xrightarrow{\|.\|} 0$ (en norme), nous obtenons : $Uo(I-T) = (I-T)oU = I$ et donc $I - T \in L_r(X)$.

Exemple 1.3.2. *Considérons $X = \mathbb{R}^*$ muni de la norme euclidienne $\|.\|_2$ et la transformation T de X sur X qui se compose d'un contraction d'un facteur r $0 < r < 1$ et d'une rotation autour de l'origine avec l'angle φ. La matrice A qui représente T par rapport à la base (1,0)(0,1) est :*

$$A \begin{pmatrix} r\ cos\varphi & r\ sin\varphi \\ -r\ sin\varphi & r\ cos\varphi \end{pmatrix}$$

Puisque $\frac{1}{r}T$ préserve la norme, nous avons $\|T\| = r < 1$. Donc $I - T$ est inversible et possède la représentation :

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 - r\ cos\theta & -r\ sin\theta \\ r\ sin\theta & 1 - r\ cos\theta \end{pmatrix}$$

Nous allons vérifier si $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$

En effet : calcul direct donne :

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{1 - 2rcos\theta + r^2} \begin{pmatrix} 1 - r\ cos\theta & r\ sin\theta \\ -r\ sin\theta & 1 - r\ cos\theta \end{pmatrix}$$

D'autre part :

$$A^n = \begin{pmatrix} r^n\ cos\ n\varphi & r^n\ sin\ n\varphi \\ -r^n\ sin\ n\varphi & r^n\ cos\ n\varphi \end{pmatrix}$$

et nous obtenons : en posons $z = re^{i\varphi}$

$$\sum_{n\geq 0} A^n = \begin{pmatrix} \sum Re\ z^n & \sum Im\ z^n \\ -\sum Im\ z^n & \sum Re\ z^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Re\ \frac{1}{1-z} & Im\ \frac{1}{1-z} \\ -Im\ \frac{1}{1-z} & Re\ \frac{1}{1-z} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|1-z|^2} \begin{pmatrix} Re\ (1-\overline{z}) & Im\ (1-\overline{z}) \\ -Im\ (1-\overline{z}) & Re\ (1-\overline{z}) \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{1-2r\cos\ \theta + r^2} \begin{pmatrix} 1 - r\ cos\theta & r\ sin\theta \\ -r\ sin\theta & 1 - r\ cos\theta \end{pmatrix} = (I-A)^{-1}.$$

Théorème 1.3.6. *Soient* $T_1, T_2 \in L(X)$ *et* $T \in L_r(X)$. *Si* $\|T_1 - T_2\| < \frac{1}{\|T_1^{-1}\|}$. *Alors* $T_2 \in L_r(X)$.

De plus

$$T_2^{-1} = T_1^{-1} + T_1^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} ((T_1 - T_2) o T_1^{-1})^k. \tag{1.7}$$

Preuve. *En effet nous avons*

$$\|I - T_2 o T_1^{-1}\| = \|(T_1 - T_2) o T_1^{-1}\| \leq \|T_1 - T_2\|\ \|T_1^{-1}\| < 1.$$

d'où $T_2 o T_1^{-1} \in L_r$ *et on a* $(T_2 o T_1^{-1}) o T_1 = T_2 \in L_r(X)$.

De plus $(T_2 o T_1^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} (I - T_2 o T_1^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} ((T_1 - T_2) o T_1^{-1})^k = T_1 o T_2^{-1}$

et on a : $(T_2^{-1} = T_1^{-1} o \sum_{k=0}^{\infty} ((T_1 - T_2) o T_1^{-1})^k$ ...(1)

Corollaire 1.3.2. *L'ensemble* $L_r(X)$ *est ouvert par rapport à la topologie induite par la norme sur* $L(X)$.

Théorème 1.3.7. *L'opération* $T \longmapsto T^{-1}$ *est une opération continue dans* $L_r(X)$.

Preuve. *Soit* $T_1 \in L_r(X)$ *et* $T_2 \in L_r(X)$ *tels que :* $\|T_1 - T_2\| < \frac{1}{\|T_1^{-1}\|}$,
d'après (1.7)

$$\|T_2^{-1} - T_1^{-1}\| \leq \|T_1^{-1}\| \sum_{k=1}^{\infty} (\|T_1 - T_2\| \, \|T_1^{-1}\|)^k$$

$$= \frac{\|T_1 - T_2\| \, \|T_1^{-1}\|}{1 - \|T_1 - T_2\| \, \|T_1^{-1}\|} \|T^{-1}\|,$$

d'où $lim_{T_2 \to T_1} T_2^{-1} = T^{-1}$.

Opérateurs inversibles à droite (à gauche) et supplémentaire topologique

Définition 1.3.4. *Soit* $G \in E$ *un sou-espace fermé d'un espace de Banach* E*. On dit qu'un sous-espace* L *de* E *est supplémentaire topologique de* G *si :*

(i) L *est fermé.*

(ii) $G \cap L = \{0\}$ *et* $G + L = E$.

Dans ce cas tout $z \in E$ *s'écrit de façon unique* $z = x + y$ *avec* $x \in G$ *et* $y \in L$.

Corollaire 1.3.3. *du Th de Banach* *Si* E *est un espace de Banach et si* E_1 *et* E_2 *sont deux supplémentaires algébriques (i.e* E_i *e.v fermés de* E *tel que :* $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ *et* $E_1 + E_2 = E$*). Alors :* E_1 *et* E_2 *sont supplémentaires topologiques (i.e les projections associes-continues).*

Preuve. *Munissons le produit* $E_1 \times E_2$ *de la norme* $\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_E + \|x_2\|_E$*. Comme* E_1 *et* E_2 *sont fermé, donc complets,* $E_1 \times E_2$ *est complet, et donc est un Banach pour cette norme or l'application linéaire*

$$\begin{aligned} T : & E_1 \times E_2 \longrightarrow E \\ & (x_1 x_2) \longmapsto x_1 + x_2 \end{aligned}$$

est bijective (car E_1, E_2 *sont en somme directe algébrique) et continue (*$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *la définition de la norme sur* $E_1 \times E_2$*). Par le th des isomorphes de Banach, il existe c tel que :* $\|x_1 + x_2\| \geq c(\|x_1\|_E + \|x_2\|_E)$*; donc* $\|x_1 + x_2\| \geq c\|x_1\|$ *et* $\|x_1 + x_2\| \geq c\|x_2\|$*, ce qui est bien la continuité des projections.*

Exemple 1.3.3. *1) Tout sous espace G de dimension finie admet un supplémentaire topologique. En effet soit $B = \{e_i,\ i = \overline{1,n}\}$ une base de G on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et on définit $\varphi_i(x) = x_i$, on prolonge chaque φ_i en une forme linéaire continue $\widetilde{\varphi}_i$ sur E (voir Ch II) on plus précisément (un corollaire) on vérifie aisément que : $L = \cap_{i=1}^{n}(\widetilde{\varphi}_i)^{-1}(0)$ est supplémentaire topologique de G.*

2) Tout sous-espace fermé G de codimension finie admet un supplémentaire topologique. En effet il suffit de choisir n'importe quel supplémentaire algébrique (il est automatiquement fermépuisque de dimension finie).
voici un exemple. Soit $M \subset E^*$ un sous espace de dimension p. Alors

$$M^{\perp} = \{x \in E; \langle f, x\rangle = f(x) = 0\ \forall f \in M\}$$

est fermé et de codimension finie.

En effet soit $\{f_i;\ i = \overline{1.p}\}$ une base de M, alors il exist $\{e_i;\ \ i = \overline{1.p}\} \subset E$ tels que

$$\langle f_i, e_j\rangle = \delta_{ij};\ \forall i, j = \overline{1.p},$$

considérons l'application $\overrightarrow{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}^p$ définie par

$$\overrightarrow{\varphi}(x) = \big(\,\langle f_1, x\rangle, \langle f_2, x\rangle, \cdots \langle f_p, x\rangle\,\big);\ \forall i, j = \overline{1.p}\big).$$

L'application $\overrightarrow{\varphi}$ est surjective -sinon par le théorème de Hahn Banach (deuxième forme géométrique voir CH 2) on pourait trouver $\overrightarrow{\alpha} = \big(\alpha_{1,2}\,, \cdots, \alpha_p,\big) \neq 0$ tel que

$$\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\varphi}(x) = \langle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i f_i, x\rangle = 0,\ \forall x \in E,$$

ce qui est absurde-.
On vérifie aisement que que les $(e_i)_{i=\overline{1.p}}$ sont linéairement indépendantes et que l'espace engendré par $(e_i)_{i=\overline{1.p}}$ est un supplémentaire de G.

3) Dans un espace de Hilbert tout sous espace fermé G admet un supplémentaire topologique.

Remarque 1.3.3. *Même dans les espaces réflexifs on peut construire des sous-espaces fermés qui ne possèdent aucun supplémentaire topologique.*

Théorème 1.3.8. *Soit T un opérateur linéaire continu et surjectif de E dans F. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) T admet un inverse à droite (S).

ii) $kerT = T^{-1}(0)$ admet un supplémentaire topologique dans E.

Preuve. *$i) \Rightarrow ii)$ On vérifie aisément que $Im(S) = S(F)$ est un supplémentaire de $kerT$.*

$ii) \Rightarrow i)$ Soit L un supplé-topo de $kerT$. On désigne par P_L la projection de E dans L (P_L est un opérateur linéaire continu). Étant donné $f \in F$, on désigne par x l'une des solutions de l'équation $Tx = f$ et on pose $Sf = P_L x$; on notera que S est indépendant du choix de x. On vérifie aisément que S est opérateur linéaire continue tel que $ToS = Id_F$.

Théorème 1.3.9. *Soit T un opérateur linéaire continu et injectif de E dans F. Les propriétés suivantes sont équivalentes .*

i) T admet un inverse à gauche (S).

ii) $R(T) = T(E)$ est fermé et admet un supplémentaire topologique dans F.

Preuve. *$i) \Rightarrow ii)$ Il est facile de vérifie que $R(T)$ est fermé et $ker(S)$ est supplé-topo de $R(T)$.*

$ii) \Rightarrow i)$ Soit P_T un projection de F sur $R(T)$ (continu). Soit $f \in F$; comme $P_T f \in R(T)$ il existe un $x \in E$ unique (T injectif) tel que $Tx = P_T f$, on définit $Sf = x$.

Il est clair que $SoT = Id_E$ d'autre part S est continue grâce au Th de Banach.

Projets

1-Espaces fontionnels.
-Topologies de différent types de convergence.
-Théorèmes d'Ascoli.
-Théorème de Stone-Weierstrass.
*

Série 1- Opérateurs linéaires sur les EVN-

EX 1 : *Soient E et F deux EVN sur le coprs $\mathbb{R}$, et f une application de E dans F vérifie (i) et (ii) :*
(i)-$\forall (x, y) \in E^2$ on a $f(x + y) = f(x) + f(y)$
(ii)- f est bornée sur la boule unité.
Montrer que $f \in L(E, F)$.

EX 2 : *Soit E un espace normé.Montrer qu'il n'existe pas deux applications f et g linéaire continues telles ques :*

$f \circ g - g \circ f = Id_E$.

EX 3 : *Soit* $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme de convergence uniforme* $(\|\cdot\|_\infty)$*. On pose* $F = \{f \in E : \int_0^1 f(t)dt = 0\}$.
1-Montrer que toute $f \in F$ *admet une primitive* T_f *dans* F.
2-Montrer que $T : E \to E : f \mapsto T_f$ *est dans* $L(E)$.
3-Calculer $\|T\|$.

EX 4 : *Soit* $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme de convergence uniforme. Soit :*
$T_h : E \to \mathbb{R} : f \mapsto T_n f = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{h}{x^2+h^2} f(x)dx$.
1-Montrer que $T_h \in E^* = L(E,\mathbb{R})$.
2-Montrer que pour toute $f \in E$ *on a* $\lim_{h\to 0} T_h f = f(o)$.

EX 5 : *Soit* $\delta_0 : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *la forme linéaire définie par :* $\delta_0 f = f(0)$. *Montrer qu'elle est continue pour la* $\|\cdot\|_\infty$ *mais pas pour la* $\|\cdot\|_{L^1}$*.(aide)*

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, \ si & 0 \geq t \leq \frac{1}{n} > 0, \\ 0 \quad si & \frac{1}{n} \geq t \leq 1 \end{cases}$$

EX 6 : *Soit* (Ω, μ) *un espace mesuré et on suppose que* μ *est* σ*-finie (pour appliquer le Th de Fubini).On fixe un noyau* K *sur* Ω*, c.à.d une fonctinnelle sur* $\Omega \times \Omega$ *vérifie le test de Schur i.e.*
Soit $p, q \in [1,\infty] : \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. *On suppose qu'il existe*
$W : \Omega \to \mathbb{R}$ *strictement positive, mésurable et une constante* $C > 0$ *telles que les deux propriétés suivantes soient vérifieés :*
(a)-$\int_\Omega |K(x,y)| W^{\frac{1}{p}}(y) d\mu(y) C W^{\frac{1}{p}}(x), \forall x \in \Omega p.p.$
(b)-$\int_\Omega |K(x,y)| W^{\frac{1}{q}}(x) d\mu(y) C W^{\frac{1}{q}}(y), \forall y \in \Omega p.p.$
Montrer que $T_K : f \mapsto T_K f(x) = \int_\Omega K(x,y) f(y) d\mu(y) \in L\big(L^p, L^q\big)$.

EX 7 : *Montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base algébrique dénombrable.(raisoner par l'absurde : si* $(e_{n\geq 1}$ *est une base algébrique. (utilser le théorème de Baire avec* $F_n = [e_i, i = 1, 2, ...n]$*).*

EX 8 : *Soit* $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ *espace des fonctions dérivables sur* $[0,1]$ *muni de la norme de convergence uniforme. Soit :*
$D : E \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : f \mapsto Df(t) = f'(t)$.
1-Montrer que le graphe de D *est fermé.*

2-Montrer D n'est pas continu. (soint $(f_n)_n :\ f_n(x) = x^n(1-x)$.
3-Pourquoi cela ne contredit-il pas le théorème du graphe fermé ?

EX 9 : *Soit E un espace Banach et soit $T : \to E \to E^*$, un opérateur tel que : $\langle Tx, x\rangle \geq 0 \forall x \in E$.*
Montrer que T est continu en utilisant le théorème du graphe fermé.

EX 10 : *Soient X, Y, Z trois espaces de Banach et $B :\ X \times Y \to Z$ application bilinéaire.*
1-Montrer que B est continu ssi $\exists M > 0 : \|B(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|, (x,y) \in X \times Y$.
2-On suppose que B est séparement continue, c.à.d $\forall (x,y) \in X \times Y$, les applications linéaires : $B_x : y \mapsto B_x(y) = B(x,y) \in Z$ et $B_y : y \mapsto B_y(x) = B(x,y) \in Z$ sont continues. Montrer que B est continue (Utiliser le th de Banach-Steinhauss).

EX 11 : *Soient E_1, E_2 et F des EVN. Montrer que $L\big(E_1 \times E_2, F\big)$ et $L\big(E_1, L(E_2, F)\big)$ sont isomorphes.*

EX 12 : *Soint E, F deux espaces de Banach et soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L(E,F)$. On suppose que $\forall x \in E$ on a $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$.*
1-Montrer que T est continu.
2-Montrer que $T_n x_n \to Tx$ dans F.

EX 13 : *Soint $(H_1, \langle,\rangle_1)$ et,$(H_2, \langle,\rangle_2)$ deux espaces de Hilbert. $T : H_1 \to H_2$ une application linéaire, on suppose qu'il existe une autre application linéaire $S : H_2 \to H_1$ teq : $\langle x, Sy\rangle_1 = \langle Tx, y\rangle_2 \forall (x,y) \in H_1 \times H_2$.*
Montrer que T et S sont continues.

Chapitre 2

Théorème de Hahn-Banach et espace dual

2.1 Notion de Formes linéaires

2.1.1 Formes linéaires algébriques

Définition 2.1.1. *Soit X un e.v linéaire, une application linéaire $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite forme linéaire.*

$L_a(X, \mathbb{K}) = X^{'}$ *:=*{*l'ensemble des formes linéaires sur X*} *est l'espace dual de X .*

$L_a(X, \mathbb{K})$ *: s'appelle le dual algébrique.*

$L_a(L_a(X, \mathbb{K}), \mathbb{K})$ *: s'appelle le bidual.*

Théorème 2.1.1. *Si $f \in L_a(X, \mathbb{K})$, alors ou bien $f \equiv 0$ ou bien $f(X) = \mathbb{K}$.*

Preuve. *Si $f \neq 0$, alors il existe $x_0 \in X : f(x_0) \neq 0$.*

posons $x_1 = \frac{x_0}{f(x_0)}$, donc $f(x_1) = 1$, et pour $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$f(\lambda x_1) = \lambda f(x_1) = \lambda \qquad c.f.d$$

Corollaire 2.1.1. *Pour tout $f \in L_a(X, \mathbb{K})$, on a ou bien $f(x) = 0$ ou bien $f(x) = 1$.*

Théorème 2.1.2. *Si $f \in L_a(X, \mathbb{K})$, $f \neq 0$, alors son noyau :*

$$ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

est une sous espace vectoriel linéaire maximal.

Preuve. *Soit* $x_0 \in X \backslash kerf$. *(Montrons que* $kerf$ *est un s.espace linéaire maximal, i.e codim*$kerf = 1$*).*

Soit $x_0 \in X \backslash kerf$, *donc* $f(x_0) \neq 0$.*(l'existence d'un tel* x_0 *est assuré par* $f \neq 0$*). et soit* $y \in X$ *arbitraire. Posons* $x = y - \frac{f(y)}{f(x_0}x_0$. *Alors,*

$$f(x) = f(y) - \frac{f(y)}{f(x_0)} f(x_0) = 0,$$

donc $x \in kerf$. *En d'autre mots , nous avons pour tout* $y \in X$, *la représentation*

$$y = x - \frac{f(y)}{f(x_0)} f(x_0), \quad ou\, x \in kerf,$$

donc, $X = kerf \oplus [x_0]$, *et* $kerf \cap [x_0] = \{0\}$, *c-à-d* $X = kerf \oplus [x_0]$. *Puisque* $1 = dim[x_0] = codimkerf$, *l'espace* $kerf$ *est un s.e.maximal de* X.

Le résultat réciproque est donnée par :

Théorème 2.1.3. *Soit* $x_0 \in X \backslash X_0$, *un élément fixé. Alors tout vecteur* $x \in X$ *s'écrit de façon unique sous la forme* $x = y + \lambda x_0$ *ou* $y \in X_0$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, *i.e* $(X = X_0 \oplus [x_0])$.

L'application : $f : X \longmapsto \mathbb{K}$ *définie par :* $f(x) = f(y + \lambda x_0) = \lambda$ *est une forme linéaire sur* X *de plus* $kerf = X_0$.

Théorème 2.1.4. *Soit* X_0 *un s.e linéaire maximal de l'espace* X. *Alors il existe une forme linéaire* $f \in L_a(X, \mathbb{K})$, *telle que* $kerf = X_0$.

Théorème 2.1.5. *Soit* f_1 *et* $f_2 \in L_a(X, \mathbb{K})$, $f_1 \neq 0$ *et* $f_2 \neq 0$,
si $kerf_1 = kerf_2$, *alors :* $f_2 = \lambda f_1, \lambda \in \mathbb{K}$.

Preuve. *Supposons que* $kerf_1 = kerf_2 \neq 0$, *et choisissons* $x_0 \in X \backslash kerf_1$. *Alors,* $x \in X$ *possède une décomposition unique* $x = y + \lambda x_0$, $y \in kerf_1$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Les égalités : $f_1(x) = \lambda f_1(x_0), \quad f_2(x) = \lambda f_2(x_0)$,
entraînent pour tout $x \in X$ *:*

$$f_2(x) = \frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)} . f_1(x) = \lambda^* f_1(x),$$

2.1.2 Formes linéaires topologiques (continues)

Sur un espace vectoriel normé

L'existence d'une norme sur l'espace X nous permet de trouver des propriétés intéressantes pour les formes linéaires continues.

Définition 2.1.2. *Soit $(X, \|.\|)$ un e.v.n , et soit $f \in L_a(X, \|.\|)$, on dit f est borné, s'il existe un $M > 0$ tel que :*

$$|f(x)| \leq M\|x\| \qquad \forall x \in X,$$

Théorème 2.1.6. *L'ensemble X^* est un E.V sur $\mathbb{K}$ normé par la norme :*

$$\|f\|^* = sup_{\|x\|\leq 1}\|f(x)\|,$$

Définition 2.1.3. *On appelle l'espace X^* muni de la norme définie ci-dessus l'espace dual Topologique de X. De plus l'espace dual topologique de X^* est X^{**} s'appelle l'espace bidual topologique.*

Théorème 2.1.7. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, et soit f une forme une forme linéaire sur X. Les quatres énoncés suivants sont équivalents :*

i) *f est bornée.*

ii) *f est uniformément continue sur X.*

iii) *f est continue à l'origine.*

iv) *$ker f$ est fermé.*

Preuve. **ii**) $\Rightarrow$ **iv**), *soit $x_0 \in \overline{ker f}$. Alors il existe une suite*

$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset ker f$ et $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$. Puisque $f(x_n) = 0$, et f est uniformément continue sur X, on a $f(x_0) = 0$, d'où $x_0 \in ker f[|f(x_0) - f(x_n)| \leq \|f\|\|x_n - x_0\| \Rightarrow f(x_0) = 0 \; \underline{i.e. x_0} \in ker f]$.

iv) $\Rightarrow$ **iii**) *: Montrons $\overline{\textbf{iii)}} \Rightarrow \overline{\textbf{iv)}}$: soit f discontinue à l'origine, donc $\exists\{(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset X\backslash\{0\}$, telle que : $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ et $\lim f(x_n) \neq f(x_1) \neq 0$. Alors $\exists\{(x_{n_R}) = y_R : R \in \mathbb{N}\} \subset \{(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$, telle que $f(y_R) \neq 0$ et $lim f(y_R) = \alpha \in \overline{R}\backslash\{0\}$ $(\overline{\mathbb{C}}\backslash\{0\})$. Posons : $z_n = \frac{y_R}{f(y_R)}$. Alors $z_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ et $f(z_R) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc $f(z_R - z_1) = 0$, d'où $z_R - z_1 \in ker f$, $\forall R \in \mathbb{N}$. Montrons : $\lim_{R\to+\infty}(z_R - z_1) = -z_1 \notin ker f$, donc $ker f$ n'est pas fermé.*

Exemple 2.1.1. *Soit X l'ensemble des fonctions sur $[-1,1]$ qui sont des restrictions des fonctions holomorphes dans $\{z : |z| < 1\}$. En d'autres termes $f \in X$ peut être développée dans une série de Taylor à l'origine dont le rayon de convergence est au moins égal à un. Nous munissons X de la norme $\|f\| = \sup_{|x|\leq \frac{1}{2}} |f(x)|$. On vérifie aisément (principe d'identité) que $(X, \|.\|)$ est un espace normé mais pas complet, considérons maintenant la forme linéaire φ définie par $\varphi(f) = f''(0)$. Alors nous avons :*

$$\sup_{\|f\|\leq 1} |\varphi(f)| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi(\cos nx)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} n^2 = +\infty.$$

Donc φ n'est pas bornée. D'autre part $f_n = \frac{1}{n}\cos nx$ converge en norme vers $f \equiv 0$, mais $\varphi(f_n) = n$ ne converge pas vers $\varphi(0) = 0$. Donc φ n'est pas continue à l'origine.

Pour vérifier que φ n'est pas continue à aucune $g \in X$, il suffit de considérer $f_n = g + \frac{1}{n}\cos nx$. Finalement, vérifions que $ker\varphi$ n'est pas fermé. En effet, $g_n(x) = [\cos(x) - \frac{\cos nx}{n^2}] \in ker\varphi$, mais $\lim_{n\to\infty} g_n \notin ker\varphi$.

Sur un espace de Hilbert

Théorème 2.1.8. *(Théorème de représentation de Riesz pour un Hilbert)*

Si H est un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{K}$ et si $f \in H^*$, alors, il existe un et un seul élément $y \in H$, tel que :

(1) $\quad f(x) = (x, y)$, *pour tout* $x \in H$,

et de plus

(2) $\quad \|f\|^* = \|y\|$.

Réciproquement, pour tout élément $y \in H$, la formule (1) définit une forme linéaire continue f sur H, et on a l'égalité (2).

Preuve.

a) Montrons d'abord l'existence de y, soit $f \in H^*$. Si $f \equiv 0$, prenons $y = 0$. Soit donc $f \neq 0$, on sait que $kerf$ est un s.e.maximal et fermé de H. Alors, $(kerf)^\perp \neq \{0\}$, choisissons un $z \in (kerf)^\perp \backslash \{0\}$ et posons $y = \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} z$.

De plus soit P la projection orthogonale de H sur le sous espace $kerf$. Alors pour tout $x \in H$, on a :

$$(x, y) = \frac{(x, \overline{z})}{\|z\|^2} f(z) = \frac{((I - P + P)x, \overline{z})}{\|z\|^2} f(z) \quad = \frac{((I - P)x, \overline{z})}{\|z\|^2} f(z),$$

Mais $(I-P)x \in (kerf)^{\perp}$ *et* $dim(kerf)^{\perp} = 1$ *entraîne que*

$$(I-P)x = \lambda z$$

Nous avons donc

$$(x,y) = \frac{\lambda(z,\overline{z})}{\|z\|^2} f(z) = \lambda f(z). \tag{2.1}$$

D'autre part :

$$f(x) = f((I-P)x + Px) = f((I-P)x) = f(\lambda z) = \lambda f(z).$$

Ce qui montre que $f(x) = (x,y)$.

b) Montrons maintenant l'unicité de y. *Soit* $f(x) = (x,y) = (x,y_1)$, *pour tout* $x \in H$. *Alors :*

$$(x, y - y_1) = 0 \quad sur \quad H,$$

et pour $x = y - y_1$ *nous obtenons* $y = y_1$.

c) De plus $|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$ *on a* $\|f\|^* \leq \|y\|$, *et* $f(y) = \|y\|^2$ *entraîne que* $\|f\|^* \geq \|y\|$, *donc l'égalité (2) est vérifiée.*

d) Réciproquement $f(x) = (x,y)$ *pour un* $y \in H$ *fixé est une forme linéaire, la continuité s'ensuit de* $|f(x)| = |(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$ *et de c nous avons* $\|f\|^* = \|y\|$.

Corollaire 2.1.2. *Considérons l'espace de Hilbert* $L^2(du)$ *sur* X *avec le produit scalaire*

$$(f,g) = \int_X f\overline{g}du,$$

Alors si $\phi \in (L^2dt)^*$ *il existe une fonction* $g \in L^2(du)$ *telle que* $\phi(f) = \int_X f\overline{g}dt$, *pour tout* $f \in L^2(du)$. *De plus* g *est u-presque partout unique.*

Théorème 2.1.9. *Si* X *est un espace normé de dimension finie, alors toute forme linéaire sur* X *est continue, i.e.* $L_a(X,\mathbb{K}) = X^*$.

Preuve. *Soient* $B = \{e_i, i = \overline{1,n}\}$ *une base algébrique pour* X, *et* $x \in X$: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Soit $f \in L_a(X, \mathbb{K})$, alors

$$|f(x)| = |\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)| \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|)(\sum_{i=1}^{n} f(e_i))$$

$$\leq \qquad \|x\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|(\sum_{i=1}^{n} |f(e_i)|) \leq \|x\|_\infty BM$$

où $M = \sum_{i=1}^{n} |f(e_i)| \qquad B = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|/f(e_i) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{i,k} e'_k$.

Remarque 2.1.1. *Si* $dimX = m \Rightarrow dimL_a(X, \mathbb{K}) = m$, *en effet*

i) $\forall x \in X$, *on a* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, *si* $f \in L_a(X, \mathbb{K})$

on a : $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$. *Donc f est déterminée de façon unique pour les nombres* $f(e_i)$ $i = \overline{i, m}$. *Montrons qu'on peut construire des formes linéaires* $f_i \in L_a(X, \mathbb{K})$ *telles que :*

$$f_i(e_k) = \delta_{i,k} \quad 1 \leq i, k \leq m.$$

En effet, on définit $f_i(x) := f_i(\sum_{k=1}^{m} x_k e_k) = x_i \quad \forall i = \overline{i, m}$.

Évidement f_i sont des formes linéaires et de plus indépendantes donc $dimL_a(X, \mathbb{K}) \geq m$.

D'autre part si $f \in L_a(X, \mathbb{K})$, *alors on a pour tout* $x \in X$,

$$f(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x),$$

donc $f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i$ *c-à-d* $dimL_a(X, \mathbb{K}) = m$.

2.2 Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences

2.2.1 Forme Analytique

La forme analytique du théorème de Hahn-Banach est un théorème permettant de prolonger des formes linéaires définies sur un sous espace vectoriel, en gardant un contrôle sur le prolongement quand il y en avait un sur la forme de départ ; en particulier si l'espace est normé et la forme linéaire est continue, on peut la prolonger en une forme linéaire continue sur tout l'espace, et en gardant la norme.

Définition 2.2.1. *Soient E un espace vectoriel sur le coprs $\mathbb{R}$ et $p :\ E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant*

$$p(x+y) = p(x) + p(y),\ \forall x, y \in E \tag{2.2}$$

et

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall x \in E, \quad et \quad \lambda > 0. \tag{2.3}$$

p est dite une sous-norme.

Théorème 2.2.1. (Hahn-Banach, forme analytique) *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit p une semi-norme sur E. Soit G un sous-espace vectoriel de E et $\varphi_0 : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire telles que :*

$$|\varphi_0(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in G.$$

Alors il existe une forme linéaire $\varphi = \widetilde{\varphi}_0 : E \longrightarrow \mathbb{K}$ prolongent φ_0 et telle que :

$$|\varphi(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in E.$$

Théorème 2.2.2. (Hahn-Banach, forme analytique forte) *Soit E un espace vectoriel réel et p une sous-norme sur E. Soit G un sous-espace vectoriel de E et $\varphi_0 : G \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire vérifiant $\varphi_0(x) \leq p(x),\ \forall x \in G$. Alors il existe une forme linéaire $\varphi = \widetilde{\varphi}_0 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ prolongeant φ_0 et vérifiant encore : $\varphi(x) \leq p(x), \forall x \in E$.*

Nous avons besoin aux résultats suivants :

Proposition 2.2.1. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. L'application*

$$\begin{aligned} T :& E_{\mathbb{C}}^* = L(E, \mathbb{C}) \longrightarrow E_{\mathbb{R}}^* = L(E, \mathbb{R}) \\ & f \longmapsto Re\ o f \end{aligned}$$

est $\mathbb{R}$-linéaire, bijective et isométrique. L'application inverse T^{-1} est définie par : pour tout $g \in E_{\mathbb{R}}^*$, on a $T^{-1}(g)(x) = g(x) - ig(ix)$, pour tout $x \in E$.

Preuve. Il est claire que T est $\mathbb{R}$-linéaire. Vérifions que T est isométrique. Soit $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$. On a $|T(f(x))| = |Re(f(x))| \leq |f(x)| \leq \|f\|\|x\| \leq \|f\|$. Donc on a : $\|T(f)\| \leq \|f\|$. Par ailleurs, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $f(x) = e^{i\theta}|f(x)|$, d'où on a $f(e^{-i\theta}x) = |f(x)|$, et donc $(Tf)(e^{-i\theta}x) = (Reof)(e^{-i\theta}x) = |f(x)|$. Comme on a : $\|e^{-i\theta}x\| = |e^{-i\theta}|\|x\| = \|x\| \leq 1$, alors $\|T(f)\| \geq |f(x)|$. Par conséquent, on a $\|T(f)\| \geq \|f\|$, d'où $\|T(f)\| = \|f\|$. On en déduit que T est injective. Soit $g \in E^*_{\mathbb{R}}$, pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = g(x) - ig(ix)$, alors $f \in E^*_{\mathbb{C}}$ et on a $T(f) = g$, donc T est surjective, par conséquent, T est bijective.

Lemme 2.2.1. *(Lemme de Zorn) Tout ensemble ordonné, inductif, non vide, admet un élément maximal. On dit que P est inductif si tout sous ensemble tôtalement ordonné de P admet un majorant.*

Preuve.(du Théorème 2.2.2)

1^{ier} **cas (cas réel)**

Soit $B = \{h : H = D_h \to \mathbb{R},$ h linéaire, H sous espace vectoriel de E et$G \subseteq H, h\backslash G = \varphi_0$ et $h(x) \leq p(x),\ \forall x \in H\}$, on muni B de la relation d'ordre définie par : $h_1 < h_2 \Leftrightarrow D_{h_1} \leq D_{h_2}$ et h_2 prolonge h_1. Alors,

(a) $B \neq \varnothing$ car $\varphi_0 \in B$

(b) B est inductif f car si Q est une partie totalement ordonnée de B, on pose : $H_m = \cup_{h\in Q} D_h$ et $h_m(x) = h(x)$ si $h \in Q$ et $x \in D_h$.

Comme Q est totalement ordonnée, H_m est un sous espace vectoriel de E ; de plus, $h_m : H_m \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien définie et est une forme linéaire sur H_m, visiblement, h_m est un majorant de Q. Soit alors, φ un élément maximal de B.

Il reste à voir que $D = D_\varphi$ est égal à E tout entier. Supposons que non : $D \neq E$. On peut alors choisir un $x_0 \notin D$. On va chercher $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que, si l'on pose : $H = D + \mathbb{R}x$.

$\Psi(x + tx_0) = \varphi(x) + t\alpha,\ x \in D,\ t \in \mathbb{R}$. Alors $\Psi \in B$. Cet élément Ψ serait un majorant de Q, avec $\Psi \neq \varphi$ (puisque $D_\Psi = H$ contient x_0 qui n'est pas dans $D = D_\varphi$) : cela contredirait la maximalité de φ. Cette contradiction montre que $D = E$ et donc le théorème 2.

Pour obtenir cet α, remarquant que $\Psi \in B$ ssi :

$$\varphi(x) + t\alpha \leq p(x + tx), \forall x\ D, \forall t \in \mathbb{R}$$

Mais, pour avoir cela, il suffit de l'avoir pour $t = 1$ et $t = -1$

$\varphi(x) - \alpha \leq p(x - x_0),\qquad$ et

$\varphi(x)+\alpha \leq p(x+x_0) \qquad \forall x \in D$

En effet, on aura alors :

$$\varphi(x)+t\alpha = \begin{cases} t[\varphi(\frac{x}{t})+\alpha] \leq tp(\frac{x}{t}+x_0) = p(x+tx_0), \text{ si } t>0 \\ t[\varphi(\frac{-x}{t})-\alpha] \leq (-t)p(\frac{-x}{t}-x_0) = p(x+tx_0), \text{ si } t<0 \\ \end{cases}$$

et si $t=0$: $\varphi(x) \leq p(x)$ car $\varphi \in B$.

Il suffit donc de pouvoir choisir α tel que :

$$\sup_{x\in D}\{\varphi(x)-p(x-x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{y\in D}\{p(y+x_0)-\varphi(y)\}$$

Ce qui est possible car :

$$\varphi(x)+\varphi(y) = \varphi(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x-x_1)+p(y+x_1),$$

pour tout $x, y \in D$.
Le théorème 2 est donc prouvé.

$2^{ième}$ **cas (cas complexe)**

D'après la proposition 2.2.1 toute forme linéaire v s'écrite sous la forme :

$$v(x) = \mu(x) - i\mu(ix) \quad \text{où} \quad \mu = Rev : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Appliquons alors le théorème 2.2.1 à $E_{\mathbb{R}}$ pour obtenir $\mu : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ prolongeant $Re\varphi_0$ et telle que $|\mu(x)| \leq p(x)$, pour tout $x \in E$. La forme linéaire complexe v associée prolonge alors φ_0, grâce a la formule 4.3.1. De plus, si $\theta = \theta_x \in \mathbb{R}$ est tel que $|v(x)| = e^{-i\theta x}v(x)$, on a :

$$|v(x)| = e^{-i\theta}v(x) = v(e^{-i\theta}x) = \mu(e^{-i\theta}x),$$

car $v(e^{-i\theta}x) \in \mathbb{R}$, et donc :

$$|v(x)| = \mu(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x).$$

2.2.2 Quelques conséquences de la forme analytique du théorème de Hahn-Banach

Nous allons donner une série de conséquences du théorème de Hahn-Banach, toutes très importantes. Dans ce qui suit, E sera désormais un espace normé.

Théorème 2.2.3. *Toute forme linéaire continue sur un sous-espace G de E se prolonge en une forme linéaire continue sur E entier avec la même norme.*

Preuve. Soit $\varphi_0 \in G^*$ et $C = \|\varphi_0\|_{G^*}$. Il suffit d'appliquer le théorème de Hahn-Banach avec la semi-norme $p(x) = C\|x\|_E$.

Théorème 2.2.4. *Pour tout $x \in E$ non nul, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(x) = \|x\|$.*

Preuve. Il suffit de prendre la norme pour p, $G = \mathbb{K}x$ et $\varphi_0(\lambda x) = \lambda\|x\|$, donc $\|\varphi\| = \|\varphi_0\| = 1$.

Corollaire 2.2.1. *Pour $A \subseteq E$, on pose :*

$$A^\perp = \{\varphi \in E^* :< \varphi, x >= 0, \forall x \in A\}.$$

Alors $A^\perp = E^*$ si et seulement si $A = \{0\}$.

Corollaire 2.2.2. *Pour tout e.v.n E, le dual E^* sépare les points de E.*

Preuve. Si $x_1 \neq x_2$, alors $x = x_1 - x_2 \neq 0$, il existe alors $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = \|x\| \neq 0$, donc $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.

Corollaire 2.2.3. *On a :*

$$\|x\| = \sup_{\|\varphi\|_{E^*} \leq 1} |\varphi(x)|$$

C'est une conséquence immédiate du théorème 2.2.2. Notons que la borne supérieure est atteinte. C'est à comparer avec l'égalité :

$$\|\varphi\|_{E^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)| \tag{2.5}$$

Qui est une définition, et dans la quelle la borne supérieure n'est pas atteinte en général.

Remarque 2.2.1. *Le sup dans* (2.5) *est atteint si E est un Banach réflexif. Un théorème affirme que si le sup dans* (2.5) *est atteint (E Banach) alors, E est réflexif.*

Corollaire 2.2.4. *L'application canonique $i : E \longrightarrow E^{**} \qquad x \longmapsto \widetilde{x}$: $\widetilde{x}(\varphi) = \varphi(x), \forall \varphi \in E^*$, est une isométrie. Cette application i est donc en particulier injective. Par contre, elle n'est pas surjective en général ; nous verrons un peu plus loin (quand elle l'est).*

Preuve.
$\|\widetilde{x}\|_{E^{**}} \overset{déf}{=} \sup_{\|\varphi\|_{E^*}\leq 1} |\varphi(x)| \overset{Coro(2.2.3)}{=} \|x\|$.

Théorème 2.2.5. *Si F est un sous-espace vectoriel fermé de E et $x \notin F$, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = 1$ et $\varphi(x) = 0, \forall x \in F$ (c-à-d $F \subseteq ker$).*

Preuve. Prenons $G = F + \mathbb{K}x_0$ et définissons une forme linéaire
$\varphi_0 : G \longrightarrow \mathbb{K}$ par $\varphi_0(x + \lambda x_0) = \lambda$, pour tout $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in F$. Comme F est fermé, on a $\delta = dis(x_0, F) > 0$; donc :

$$|\varphi_0(x + \lambda x_0)| = |\lambda| = \frac{1}{\delta} dist(\lambda x_0, F) \leq \frac{1}{\delta}\|\lambda x_0 + x\| := p(x),$$

de sort que l'on peut prolonger φ_0 en $\varphi \in E^*$.

Corollaire 2.2.5. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $x_0 \in F$ si et seulement si pour toute $\varphi \in E^*$, on a :*

$$\varphi(x) = 0, \forall x \in F \Rightarrow \varphi(x_0) = 0,$$

En particulier, F est dense dans E si et seulement si, pour toute $\varphi \in E^*$:

$$\varphi(x) = 0 \text{ sur } F \Rightarrow \varphi \equiv 0.$$

2.2.3 Formes géométriques

Il est y a plusieurs énoncés géométriques, avec différentes hypothèses. Bien que certains aient des versions "complexes" (pour les e.v complexes). C'est essentiellement un théorème "réel". Il permet de séparer des convexes (compacts, fermés, ouverts,...) disjoints par des hyperplans affines fermés. Commençons par quelques préliminaires sur les hyperplans. Dans toute la suite E désigne un e.v.normé .

Définition 2.2.2. *Un hyperplan (affine) est un ensemble de la forme :*

$$H = \{x \in E, f(x) = \alpha\},$$

Où f est une forme linéaire (pas nécessairement continue) sur E, non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On dit que H est un hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.

Proposition 2.2.2. *L'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ est fermé si et seulement f est continue.*

Preuve. Il est clair que si f est continue alors, H est fermé. Réciproquement, supposons que H est fermé. Le complémentaire CH de H est ouvert et non vide.

(Puisque $f \neq 0$). Soit $x \in CH$ et supposons (pour fixer les idées) que $f(x_0) < \alpha$.Soit $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset CH$ où

$$B(x_0, r) = \{x \in E : \|x - x_0\| < r\}$$

On a

$$f(x) < \alpha \quad \forall x \in B(x_0, r) \tag{2.6}$$

En effet supposons que $x_0 \in B(x_0, r) : f(x_1) > \alpha$. Le segment

$\{x_t = (1-t)x_0 + tx_0; t \in [0,1]\}$ est contenu dans $B(x_0, r)$ et donc $f(x_t) \neq 0 \forall t \in [0,1]$; par ailleurs $f(x_t) = \alpha$ pour $t = \frac{f(x_1)-\alpha}{f(x_1)-f(x_0)}$, ce qui absurde avec (2.6) et (2.6) est démontré.

Il résulte de (2.6) que $f(x_0 + rz) < \alpha \; \forall z \in B(0,1)$.
Par conséquent f est continue et $\|f\| < \frac{1}{r}(\alpha - f(x_0))$.

Définition 2.2.3. *Soient $A \subset E$ et $B \subset E$. On dit que l'hyperplan H d'équation $[F = \alpha]$ sépare A et B au sous large si l'on a :*

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A \quad et \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B.$$

On ait que H sépare A et B au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A \quad et \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon, \; \forall x \in B.$$

Géométriquement la séparation exprime que A et B se situent, de part et d'autre de H.

Théorème 2.2.6. *(Première forme géométrique) Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensemble convexes, non vides et disjoints. On suppose que A est ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.*

La démonstration du ce théorème est basée sur les deux lemmes suivants.

Lemme 2.2.2. *(Jauge d'un convexe)*

Soit $C \subset E$ un convexe ouvert avec $0 \in C$. Pour tout $x \in E$ on pose :

$$p(x) = inf\{\alpha > 0; \alpha^{-1}x \in C\}.$$

On dit que p est la jauge de C. Alors p est une sous-norme

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E \; p(\lambda x) \leq \lambda p(x) \; \forall x \in E, \; \forall \lambda > 0] \tag{2.7}$$

et vérifie : il existe $M > 0$ tel que :

$$0 \leq p(x) \leq M\|x\| \; \forall x \in E \tag{2.8}$$

$$C = \{x \in E : p(x) < 1\} \tag{2.9}$$

Preuve. Soit $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset C$; il est claire que : $p(x) \leq \frac{1}{r}\|x\|, \forall x \in E$, d'où (2.8). [En effet $\forall x \in E$: $\|\frac{x\bar{r}}{\|x\|}\| = \bar{r} \Rightarrow \frac{\bar{r}x}{\|x\|} \in B(0, r) \subset C$, soit $\alpha^{-1} = \frac{\bar{r}}{\|x\|}$ donc $\forall x \in E$: $p(x) \leq \alpha = \frac{1}{r^-}\|x\|]$.

Supposons d'abord que $x \in C$; Comme C est ouvert, $(1+\varepsilon)x \in C$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Donc $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$, inversement si $p(x) < 1$ il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $\alpha^{-1}x \in C$ et donc $x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)0 \in C$ d'où d'où (2.9).

Soient $x, y \in E$ et soit $\varepsilon > 0$. D'après d'où (2.8) et d'où (2.9) on sait que $\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C$ et $\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$. Donc $\frac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\varepsilon} \in C \; \forall t \in [0, 1]$. En porticulier pour $t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$ on obtient $\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$. On en déduit grâce à (2.3) et (2.9) que :

$$p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

D'où (2.7).

Lemme 2.2.3. *Soit $C \in E$ un convexe non vide et soit $x_0 \in E$ avec $x_0 \notin C$. Alors il existe $f \in E'$ tel que $f(x) < f(x_0) \; \forall x \in C$. En particulier l'hyperplan d'équation $[f = f(x_0)]$ sépare $\{x_0\}$ et C au sens large.*

Preuve. Par translation on peut toujours supposer que $0 \in C$ et introduire la jauge de C. (lemme 2.2.2) noté p. On considère $G = \mathbb{R}x_0$ et la forme linéaire g définie sur G par :

$$g(tx_0) = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que $g(x) \leq p(x)$ $\forall x \in G$ [prendre $x = tx_0$ et distinguer les cas $t < 0$ et $t > 0$]. Grâce au théorème de Hahn-Banach, f analytique, il existe une forme linéaire f sur E, qui prolonge g, et telle que :

$$f(x) \leq p(x) \quad x \in E.$$

En particulier $f(x_0) = g(x_0) = 1$, et f est continue grâce à (2.8). D'autre part on déduit de (2.9) que :

$$f(x) < 1 \quad \forall x \in C.$$

Preuve.(du théorème 2.2.6)

On pose $C = A - B$ de sorte que C est convexe (A et B convexes), C au y est (noter que $C = \cup_{y \in B}(A - y)$) et $0 \notin C$ car $A \cap B = \varnothing$. D'après lemme précédent il existe $f \in E'$ tel que :

$$f(z) < 0 \quad \forall z \in C,$$

c-à-d

$$f(x) < f(y) \quad \forall x \in A \quad \forall y \in B.$$

On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ avec :

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{B} f(y),$$

et donc l'hyperplan d'équation $[f \equiv \alpha]$ sépare aux sens large A et B.

Théorème 2.2.7. *(Deuxième forme géométrique). Soit $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides, disjoints. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.*

Preuve.

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon)$ et $B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon)$ de sorte que A_ε et B_ε sont convexes, ouverts, et non vides. De plus pour ε assez petit A_ε et B_ε sont disjoints. Car A est fermé et B compact tels que $A \cap B = \varnothing$, alors $d(A, B) = r > 0$, d'où $[(A + B(0, r/3)) \cap (B + B(0, r/3)) = \varnothing]$.

D'après le théorème 2.2.6, il existe un hyperplan fermé d'équation $[f = \alpha]$ qui sépare A_ε et B_ε au sens large. On a donc :

$$f(x + \varepsilon z) \leq \alpha \leq f(y + \varepsilon z) \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad \forall z \in B(0, 1).$$

Il en résulte que :

$$f(x) + \varepsilon\|f\| \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon\|f\|, \quad \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

On conclut que A et B séparés au sens strict par l'hyperplan $[f = \alpha]$ car $\|f\| \neq 0$.

Corollaire 2.2.6. *Soit $F \subset E$ un s.e.v de E tel que $\overline{F} \neq E$. Alors il existe une forme linéaire $0 \neq f \in E^*$ telle que*

$$\langle f, x \rangle = 0 \quad \forall x \in E. \tag{2.10}$$

Preuve. Soit $x_0 \in E$, $x_0 \notin \overline{F}$. On applique le théorème précédent, avec $A = \overline{F}$ et $B = \{x_0\}$, il existe donc $F \in E^*$, $F \neq 0$ tel que l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ sépare au sens strict $\overline{F}$ et $\{x_0\}$. On a

$$< f, x > < \alpha << f, x_0 > \quad \forall x \in F.$$

D'où il résulte que $< f, x >= 0 \quad \forall x \in F$, puisque $\lambda < f, x >< \alpha$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.2.2. *On applique souvent ce corollaire pour montrer qu'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est dense. On considère une forme linéaire est continue f sur E telle que $f \equiv 0$ sur F et on prouve que F est identiquement nulle sur E.*

2.3 Espace dual d'un espace normé

2.3.1 Espaces duaux de quelques espaces importants

Le dual de l'espace $\mathcal{C}_0(X)$

Théorème 2.3.1. *Soit X un espace localement compact. Pour toute forme linéaire ϕ de $\mathcal{C}_0(X)$ réelle (resp complexe), il existe une unique mesure réelle (resp complexe) μ sur $\big(X, \mathcal{B}_r(X)\big)$, régulière (c.à.d. une mesure de Radon), telle que :*

(1)$\phi(f) = \int_X f d\mu, \forall f \in \mathcal{C}_0(X)$. De plus

(2) $\|\phi\| = \|mu\|$.

En d'autre termes, si $\mathcal{M}_R(X)$ est l'ensemble de mesure de Radon sur X :

$$[\mathcal{C}_0(X)]^* \textit{ est isométrique à } \mathcal{M}_R(X).$$

La preuve est basée sur le théorème de représentation de Riesz suivant

Théorème 2.3.2. *(Théorème de représentation de Riesz pour $\mathcal{C}_c(d\mu)$) Soit X un espace séparé localement compact et soit Λ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(X)$ (espace des fonctions continues à support compact) Il existe une $\sigma-$algèbre $\mathcal{M}$ sur X, laquelle contient tous les boréliens de X et il existe une unique mesure positive μ sur $\mathcal{M}$ qui représente Λ en ce sens que*

(a)$\Lambda(f) = \int_X f d\mu, \forall f \in \mathcal{C}_c(X)$.

En outre cette mesure possède les propriétés supplémentaires

(b) $\mu(K) < \infty$ *pour tout compact* $K \subset X$.

(c) Pour tout $E \in \mathcal{M}$, *on a*

$$\mu(E) = \inf \mu(V) : E \subset V; V \textit{ ouvert},$$

(d) La relation

$$\mu(E) = \sup \mu(K) : K \subset E; K \textit{ compact}$$

a lieu pour tout E *ouvert et pour tout* $E \in \mathcal{M}$ *tel que* $\mu(E) < \infty$.

(e) Si $E \in \mathcal{M}$, $A \subset E$ *et* $\mu(E) = 0$, *alors* $A \in \mathcal{M}$.

Pour la démonstration qui est un peu longue voir [9].

Preuve.(Preuve du Théorème 2.3.1) En effet il est clair que toute $\mu \in \mathcal{M}(X)$ définit une forme linéaire continue ϕ_μ sur $\mathcal{C}_0(X)$ en posant

$$\phi_\mu(f) = \int_X f d\mu, \forall f \in \mathcal{C}_0(X), \text{ et que } \|\phi_\mu\| = \|mu\|.$$

On notera que la régularité ne sert que pour assurer l'unicité. On peut montrer que si X est métrisable et dénombrable à l'infini , alors toute mesure de Borel est régulière. Dans ce cas, $[\mathcal{C}_0(X)]^*$ est isomorphe à $\mathcal{M}(X)$. C'est en particulier le cas si$X = K$ est un compact métrique, et si $X = \mathbb{R}^n$(ou plus généralement si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

[label=arabic*.**Unicité.** soit $\mu \in \mathcal{M}(X)$ telle que :

$$\int_X f d\mu = 0, \forall f \in \mathcal{C}_0(X) = 0.$$

soit $\mu = h.|\mu|$ la décomposition polaire de μ. Comme $|h| = 1|\mu| - p.p.$, on a $h \in L^\infty(|\mu|) \subset L^1(|\mu|)$. Par densité de $\mathcal{C}_c(X)$ dans $L^1(|\mu|)$,il existe $f_n \in \mathcal{C}_c(X)$ telles que :

$$\int_X |\overline{h} - f_n| d|\mu| \to_{n\to\infty} 0.$$

Mais, comme $\int_X f_n d\mu = 0$, on a, puisque $|h| = 1$;

$$\begin{aligned} |\mu|(X) &= \int_X |h|^2 d|\mu| = \int_X \overline{h} h d|\mu| = \int_X \overline{h} d\mu \\ &= \int_X |\overline{h} - f_n| d\mu = \int_X |\overline{h} - f_n| h d|\mu| \leq \int_X |\overline{h} - f_n| d|\mu|; \end{aligned}$$

on a donc $|\mu|(X) = 0$, donc $\mu = 0$.
proof **Existence.** Soit $\phi \in [\mathcal{C}_0(X)]^*$. On peut supposer $\|\phi\| = 1$. On admet le lemme suivant pout l'instant. *Pour toute forme linéaire constinue $\phi \in [\mathcal{C}_0(X)]^*$, il existe une forme linéaire* **positive** $\Lambda \in [\mathcal{C}_c(X)]^*$ *(réelle ou complexe) telle que :*

$$|\phi(f)| \leq \Lambda(|f|) \leq \|\phi\| \|f\|_\infty, \forall f \in \mathcal{C}_c(X).$$

Le théorème de Riesz donne une mesure de Borel positive ν, on a :

$$\begin{aligned} \nu(X) &= \sup\{\Lambda(f);\ f \in \mathcal{C}_c(X)\ et\ 0 \leq f \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|f\|_\infty;\ f \in \mathcal{C}_c(X)\ et\ 0 \leq f \leq 1\} \leq 1, \end{aligned}$$

la mesure ν est bornée ; elle set donc régulière, d'après le théorème de représentation de Riesz.
D'autre part, le lemme 2.3.1 :

$$|\phi(f)| \leq \Lambda(|f|) = \int_X |f| d\nu = \|f\|_{L^1(\nu)}, \forall f \in \mathcal{C}_c(X);$$

donc ϕ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_c(X)$, continue pour la norme $L^1(\nu)$. Par densité de $\mathcal{C}_c(X)$ dans $L^1(\nu)$ elle s'étend en une forme linéaire continue $\tilde{\phi}$ sur $L^1(\nu)$ tout entier, avec la mêmme norme. On peut donc trouver $g \in L^\infty(\nu)$, avec $\|g\|_\infty = \|\phi\| = 1$; telle que :

$$\tilde{\phi}(f) = \int_X fg d\nu, \forall f \in L^1(\nu).$$

Par restriction à $\mathcal{C}_0(X)(\subset L^1(\nu)$ car ν est bornée), on obtient :

$$\phi(f) = \int_X fg d\nu, \forall f \in \mathcal{C}_0(X). \tag{2.11}$$

Cela prouve la première partie du théorème avec $\mu = g.\nu$.
De plus, puisque $\|\phi\| = 1$, (2.11) donne :

$$1 = \|\phi\| = \sup\{|\phi(f)|;\ f \in \mathcal{C}_0(X),\ \|f\|_\infty \leq 1\} \leq 1 \leq \int_X |g| d\nu.$$

Comme $\nu(X) \leq 1$ et $|g| \leq 1$, on a $\int_X |g| d\nu \leq \nu(X) \leq 1$, et l'inégalité précédente entraîne $\int_X |g| d\nu = 1$. Alors :

$$\|\mu\| = |\mu(X)| = \int_X d\mu = \int_X d(|g|.\nu) = \int_X |g| d\nu = 1 = \|\phi\|.$$

Ce qui achève la peuve du théorème.

(Preuve du lemme

$$\Lambda(f+g) = \Lambda(f) + \Lambda(g), \forall f, g \in \mathcal{C}_c^+(X).$$

Fixons pour cela $f, g \in \mathcal{C}_c^+(X)$.

- Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{C}_c(X)$ telles que $|h_1| \leq f, |h_2| \leq g$ et

$$\Lambda(f) \leq |\phi(h_1) + \epsilon,\ \Lambda(g) \leq |\phi(h_2) + \epsilon.$$

Soit $\alpha_1, \alpha_2 \mathbb{C}$, tels que $|\alpha_1| = |\alpha_2| = 1$ et

$$_j\phi(h_j) = |\phi(h_j)|,\ \ j = 1, 2.$$

Alors

$$\begin{aligned} \Lambda(f) + \Lambda(g) \leq & \quad |\phi(h_1)| + |\phi(h_2)| + 2\epsilon = \phi(_1h_1 +_2 h_2) + 2\epsilon \\ \leq & \quad \Lambda(|_1h_1 +_2 h_2|) + 2\epsilon \leq \Lambda(|h_1| + |h_2|) + 2\epsilon \\ \leq & \quad \Lambda(f+g) + 2\epsilon \end{aligned}$$

d'où $\Lambda(f) + \Lambda(g) \leq \Lambda(f+g)$.

• Soit $V = \{x; f(x) + g(x) > 0\}$.
Pour tout $h \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $|h| \leq f + g$, posons :

$$h_1(x) = \frac{f(x)h(x)}{f(x)+g(x)},\ \ h_2(x) = \frac{g(x)h(x)}{f(x)+g(x)}, \text{ si } x \in V;$$
$$h_1(x) = h_2(x) = 0, \text{ si } x \notin V.$$

Les fonctions h_1, h_2 sont alors continues sur X. C'est clair en tout point de l'ouvert V. Pour $x_0\ notinV$, on a $h_j(x_0) = 0$. La continuité de h et l'inégalité $|h_j(x)| \leq |h(x)|, \forall x \in X$, entraînent la continuité de h_j en x_0. Cette inégalité entraîne aussi que $supp(h_j) \subset supp(h)$; donc $h_j \in \mathcal{C}_c(X)$.
maintenant, puisque $h_1 + h_2 = h$ et $|h_1| \leq f, |h_2| \leq g$; on a :

$$|\phi(h)| = |\phi(h_1) + \phi(h_2)| \leq |\phi(h_1)| + |\phi(h_2)| \leq \Lambda(f) + \Lambda(g).$$

Prenant la borne supérieure pour toutes les h possibles, on obtient :

$$\Lambda(f+g) \leq \Lambda(f) + \Lambda(g).$$

2) pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$ réelle, on a :

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \in \mathcal{C}_c(X)$$
$$f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \in \mathcal{C}_c(X),$$

et on pose :

$$\Lambda(f) = \Lambda(f^+) - \Lambda(f^-).$$

Pour F complexe, on pose $\Lambda(f) = \Lambda(Ref) + i\Lambda(Imf)$.
On vérifie sans difficulté que *Lambda* est bien une forme linéaire (réelle ou complexe, selon les cas) positive sur $\mathcal{C}_c(X)$, et cela acheve la preuve du Lemme 2.3.1.

Le dual d'espace des suites

Notations

[Alph*.

1. $\ell^p = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{\ell^p} = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{1/p} \quad 1 \leq p \leq \infty\}$, si $p = \infty \to \|x\|_\infty = \sup_i\{(x_i)\ i = \overline{1,\infty}\}$

-$C_0 = C_0(\mathbb{N})$ ={s.e.des suites $\to 0$}$\subset \ell^\infty$,

-$C_b(\mathbb{N})$ ={le s.e.des suites de scalaires bornées en module}.

-C_c={le s-e $\subset C_0$ formé des suites dont tous les éléments sont nuls sauf un nombre fini}.

Théorème 2.3.3. *L'espace dual topologique de l'ensemble des suites convergentes* (C) *est isomorphe à* ℓ^1*.i.e. Pour chaque* $f \in (C)^*$*, il existe un* $a = (\alpha_1, ..., ..) \in \ell^1$ *uniquement déterminé tel que pour* $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in C, \lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi_0$*, on ait :*

1. $f(x) = \alpha_0\xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\xi_k$.
2. $\|f\|^* = \|\alpha\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|$.

Preuve.

(a) Soit $a \in \ell^1$. Alors nous avons d'après (1) :

$$|f(x)| \leq \|x\|_\infty . \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|,$$

Ce qui entraîne que $f \in C^*$, et $\|f\|^* \leq \|a\|_1$. Pour montrer l'égalité de la dernière inégalité, considérons :

$$x_n = (B_1, B_2, ..., B_n, B_0, B_0, ...) \in C_0.$$

$$B_k = \begin{cases} 0 & \text{Si } \alpha_k = 0, \\ \frac{\alpha_k}{|\alpha_k|}, & \text{si } \alpha_k \neq 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Nous avons $|f(x_n)| = |\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| + \sum_{n+1}^{\infty} \alpha_k B_0| \leq \|f\|^*$. et puisque $a \in \ell^1$, nous obtenons in passant à la limite $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \|f\|^*$.

(b) Nous montrons maintenant l'existence d'un élément unique $a \in \ell^1$, pour un $f \in (C_0)^*$ donné qui satisfait (1). Considérons l'ensemble d'éléments $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$, et $e = (1, 1, 1, ...)$, qui est un sous-ensemble de C. Alors chaque x admet la présentation :

$$x = \xi_0 e + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \xi_0)e_n \quad /x = (\xi_1, ..., \xi_n, ...) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i. \tag{2.13}$$

Où la somme converge en norme $\|.\|_\infty$.

Posons maintenant :

$$\alpha = f(e) \text{ et } \alpha_n = f(e_n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.14}$$

par la linéarité de f et de (2.13) ; nous obtenons :

$$f(x) = \xi_0 \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \xi_0| \alpha_n. \tag{2.15}$$

Il nous faut montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$. En effet, pour $x_n = (B_1, B_2, ..., B_n, 0, 0, ...)$ les B_k étant définis dans (2.12), nous avons :

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \leq \|f\|^* < +\infty \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Posons maintenant $\alpha_0 = \alpha - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n.$, et (2.15) devient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \xi_k.$$

(c) Il nous reste à montrer l'unicité de la représentation. Supposons que nous avons pour tout $x \in C_0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \xi_k = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \xi_k.$$

Alors nous avons pour $x_n = e_n, n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) = \alpha_n = B_n$, et le théorème est établir.

Le dual de l'espace L^p

Théorème 2.3.4. *(Théorème de représentation de Riesz pour $L^p(d\mu)$)*

Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesuré et μ une mesure σ-finie et positive. Alors on a pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $(L^p(d\mu)^*$ isomorphe à $L^q(d\mu)$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, c-à-d, il existe pour chaque $\varphi \in (L^p(d\mu))^*$ une fonction $g \in L^q(d\mu)$ qui est uniquement déterminée μ-p.p telle que pour tout $f \in L^p(d\mu)$, on a :

$$\varphi(f) = \int_X f g d\mu, \tag{2.16}$$

et

$$= \|g\|_{L^q}. \tag{2.17}$$

Preuve. (a) Si $g \in L^q(d\mu)$, alors $\varphi(f) = \int_X f.gd\mu$ est une forme linéaire et continue. ($|\varphi(f)| \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$ et $\|\varphi\| = \|g\|_{L^q}$.

(b) Montrons maintenant l'unicité. S'il existe deux fonctions $g_1, g_2 \in L^q(d\mu)$ qui satisfont le théorème, nous avons $a = \varphi(f-f) = \int_X f(g_1 - g_2)d\mu$ pour tout $f \in L^p$. Particulièrement, nous l'avons pour $f = \chi_A$, $A \in \mathcal{M}, \mu(A) < +\infty$, donc $g_1 \equiv g_0$ μ-p.p.

(c) Il nous reste à montrer l'existence de g et l'égalité (2.16). Si $\varphi(f) = 0$, nous prenons $g \equiv 0$, et le théorème est satisfait.

Soit donc $\|\varphi\|_* > 0$.

c_1) Nous considérons d'abord le cas où μ est une mesure positive et finie $1.2\mu(X) < +\infty$. Soit donc $A \in \mathcal{M}$, alors $\chi_A \in L^p(d\mu)$ pour tout $p \in [1, \infty]$. Nous définissons une mesure λ sur M par :

$$\lambda(A) = \varphi(\chi_A); \quad A \in \mathcal{M} \quad \lambda(\varnothing) = 0.$$

Si A_1 et $A_2 \in M$, et $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, alors $\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2)$ et λ est donc additive. De plus si $\{A_i; i \in \mathbb{N}\} \subset M$, où les A_i sont disjoints, nous posons $X_n = \cap_{i=1}^n A_n$. et nous avons :

$$\|\chi_{\cup A_i} - \chi_{X_n}\|_p = (\mu(\cup_{n+1}^\infty A_i))^{1/p} \longrightarrow 0 \quad si\ n \to +\infty.$$

Parce que φ est continue, nous obtenons que $\lambda(X_n) \to \lambda(A)$, où $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, ce qui montre que λ est σ-additive. Si $\{A_i; j \in \mathbb{N}\} \subset M$ est une partition de X, nous avons :

$$\sum_{i=1}^n |\lambda(A_i)| = \sum_{i=1}^n |\varphi(\chi_{A_i})| \leq \|\varphi\|_*(\mu(X))^{1/p} < +\infty,$$

Ce qui montre que la variation totale de λ est finie et que λ est une mesure complexe. Soit $A \in \mathcal{M}$, tel que $\mu(A) = 0$. Alors, nous avons :

$$|\lambda(A)| \leq \|f\|^*(\mu(A))^{1/p} = 0,$$

Donc λ est absolument continue par rapport à μ. D'après le théorème de Radon-Nikodyme, il existe une fonction $g \in L^1(d\mu)$ telle que :

$$f(\chi_A) \int_A g\ d\mu = \int_X \chi_A g\ d\mu, \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{M}. \tag{2.18}$$

En utilisant la linéarité de f, la relation (2.18) est satisfaite pour les fonctions simples, parce que chaque fonction $\rho \in L^\infty(d\mu)$ peut être uniformément approchée par une suite $\{\varphi_n; n \in \mathbb{N}\}$ de fonction simples, la formule (2.18) est aussi vraie pour $L^\infty(d\mu)$. Puisque les fonctions simples $\{\varphi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ convergent aussi en $(L^p, \|.\|_p)$ vers φ on a $f(\varphi_n) \longrightarrow f(\varphi)$.

Nous montrons maintenant que $g \in L^q(d\mu)$ et que (2.17) est vrai.

Si g satisfait (2.16), l'inégalité de Hölder nous donne :

$$\|f\|^* \leq \|g\|_{L^p}.$$

Pour $p = 1$, nous avons pour tout $A \in \mathcal{M}$:

$$|f(\chi_A)| = |\int_A g\ d\mu| \leq \|f\|^* \mu(A).$$

Ce qui entraîne que $|g(t)| \leq \|f\|^*$ μ-p.p, et donc $\|f\|^* = \|g\|_\infty$. En effet, soit $A = g^{-1}(|z - a| < \rho)$, l'image réciproque d'un disque qui est dans $\mathbb{C}\backslash\{|z| < \|f\|^*\}$. Il nous faut montrer que $\mu(A) = 0$. Si non, nous avons :

$$\begin{aligned} |a| - \|f\|^* \leq & \quad |\frac{1}{\mu(A)} \int_A g\ d\mu - a| = \frac{1}{\mu(A)} |\int_A (g - a)\ d\mu| \\ \leq & \quad \frac{1}{\mu(A)} \int_A |g - a|\ d\mu \leq \rho < |a| - \|f\|^*, \end{aligned}$$

ce qui est impossible.

Si $1 < p < +\infty$ soit $A_n = \{t;\ |g(t)| \leq n\}$. Posons :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad g(t) = 0 \\ \overline{g}(t)|g|^{q-2}\chi_{A_n}(t); \quad \text{si} \quad g(t) \neq 0 \\ \end{cases}$$

Alors nous avons $\varphi \in L^\infty(d\mu)$ et donc $\varphi \in L^p(d\mu)$. De plus

$$|\varphi(t)|^p = |g(t)|^{(q-1)p} = |g(t)|^q, \quad \text{pour tout} \quad t \in A_n.$$

La relation (2.18) nous donne :

$$f(\varphi) = \int_{A_n} \varphi g\ d\mu = \int_{A_n} |g|^q\ d\mu \leq \|f\|^* \|\varphi\|_p = \|f\|^* (\int_{A_n} |g|^q\ d\mu)^{1/p},$$

donc nous avons :

$$\int_X |g|^q \chi_{A_n}\ d\mu \leq \|f\|^*.$$

Parce que $g \in L^1(d\mu)$, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X\backslash\mathbb{N}$, avec $\mu(\mathbb{N}) = q$, ce qui entraîne d'après le théorème de la convergence monotone de Lebesgue que :

$$\|g\|_q \leq \|f\|^* \quad \text{et donc} \quad \|g\|_q = \|f\|^*.$$

Parce que $L^\infty(d\mu)$ est dense dans $L^p(d\mu)$, $1 \leq p < +\infty$ par rapport à la norme L^p, et parce que la relation (2.18) est satisfaite pour $L^\infty(d\mu)$, nous avons, en utilisant la continuité de f.

$$f(\varphi) = \int \varphi g \, d\mu \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in L^p(d\mu),$$

et le théorème est montré pour le cas $\mu(x) < +\infty$. (μ est finie).

c_2) Supposons maintenant que μ est σ-finie. Alors il existe des $A_i \in M$, $i \in \mathbb{N}$ qui sont disjoints et tels que $X = \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ et $\mu(A_i) < +\infty$, pour tout $i \in \mathbb{N}$. Notons que : $\|\varphi\chi_{A_i}\|_p \leq \|\varphi\|_p$. Alors il existe des fonctions g_i sur A_i telles que $\int_{A_i} |g_i|^q \, d\mu < +\infty$ et $f(\varphi\chi_{A_i}) = \int_{A_i} \varphi g_i \, d\mu$ pour tout $\varphi \in L^p(d\mu)$; $i \in \mathbb{N}$.

Posons :

$$h_i(t) = \begin{cases} g_i(t) \quad \text{pour} \quad t \in A_i \\ 0 \quad \text{pour} \quad t \in X\backslash A_i \quad , i \in \mathbb{N}. \\ \end{cases}$$

Évidement $h_i \in L^q(d\mu)$ et nous avons :

$$f(\varphi\chi_{A_i}) = \int_X \varphi h_i \, d\mu,$$

Soit $g = \sum_{i=1}^\infty h_i$

Alors :

$$f(\varphi\chi_{B_n}) = \int_X \varphi(\sum_{i=1}^n h_i) d\mu, \qquad B_n = \cup_{i=1}^n A_i,$$

et donc :

$$\|\sum_{i=1}^n h_i\|_q \leq \|f\|^*, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En appliquant le lemme de Fatou, nous obtenons donc :

$$\|g\|_q \leq \|f\|^* \quad \text{donc} \quad \|g\|_q = \|f\|^*.$$

De plus la continuité de f nous donne

$$f(\varphi) = \int_X \varphi g \, d\mu, \text{pour tout} \quad f \in L^p(d\mu),$$

et le théorème est démontré.

Le dual de l'espace ℓ^p

Corollaire 2.3.1. *L'espace dual topologique de ℓ^p $1 < p < +\infty$ est isomorphe à l'espace ℓ^q où $1/p + 1/q = 1$.*

1$^{\text{ière}}$méthode : *d'après le théorème précédent : en effet $\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_k$ est σ-finie positive.*

2$^{\text{ième}}$méthode :

- *$p = 1$ voir un exercice du TD.*
- *$1 < p < \infty$ voir la proposition suivante*

Proposition 2.3.1. *Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $1/p + 1/q = 1$.*

1 Soit $(x) = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$. L'application :*

$$T_x : (\ell^q, \|.\|_q) \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$y = (y_n)_{n\geq 0} \longrightarrow T_x(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$$

est une forme linéaire continue sur ℓ^q, de norme égale à $\|x\|_p$.

2 Soit :*

$$T : (\ell^p, \|.\|) \longrightarrow (\ell^q, \|.\|)$$

$$x \longrightarrow T_x$$

Alors T est un isomorphisme isométrique de ℓ^p sur le dual topologique de ℓ^q.

Preuve.

1* Par l'inégalité de Hölder, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$|\sum_{n=0}^{N} x_n y_n| \leq (\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p)^{1/p} (\sum_{n=0}^{N} |y_n|^q)^{1/q}$$

On fait tendre $N \longrightarrow +\infty$. on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n||y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q,$$

donc T_x est bien définie. Et on a

$$|T_x(y)| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Il est clair que T_x est linéaire, donc T_x est continue et on a $\|T_x\| \leq \|x\|_p$. Montrons que $\|T_x\| = \|x\|_p$. On peut supposer $x \neq 0$. Pour tout $n \geq 0$, il existe $\theta_n \in [0, 2\pi[$ tels que $x_n = |x_n|e^{i\theta_n}$. Pour tout n, soit $y_n = e^{-i\theta_n}\frac{|x_n|^{p/q}}{\|x\|^p}$, alors on a $\|y\|_q = 1$ et $T_x(y) = \|x\|_p$, d'où $\|T_x\| \geq \|x\|_p$, par conséquent $\|T_x\| = \|x\|_p$.

2*- L'application T est isométrique et linéaire. Il reste à montrer que T est surjective. Soit $f \in (\ell^q)^*$ et pour tout $n \geq 0$; soit $x_n = f(e_n)$. Pour tout $n \geq 0$, il existe $\theta_n \in [0, 2\pi]$ tel que $x_n = |x_n|e^{i\theta_n}$. Pour tout $N \geq 0$, soit :

$$X_N = \sum_{n=0}^{N} |x_n|^{p-1}e^{-i\theta_n}e_n = (|x_0|^{p-1}e^{-i\theta_0}, ..., |x_N|^{p-1}e^{-i\theta_N}, 0, ..., 0) \in \ell^q.$$

Alors on a :

$$\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p = f(X_N) \leq \|f\|\|X_N\|_q,$$

et

$$\|X_N\|_q = (\sum_{n=0}^{N} |x_n|^{q(p-1)})^{1/q} = (\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p)^{1/q}.$$

On en déduit que pour tout $N \geq 0$, on a :

$$(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p)^{1/p} \leq \|f\|.$$

On fait tendre $N \to +\infty$, on trouve que :

$$x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p,$$

et que l'on a :

$$\|x\|_p \leq \|f\|,$$

on a $T_x = f$.

2.3.2 Espace bidual d'un espace normé réflexifs

Définition 2.3.1. *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace normé. Le dual topologique de l'espace de Banach E^* s'appelle le bidual topologique de E et se note E^{**}.*

Proposition 2.3.2. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé. Alors on a :*

1- Pour tout $x \in E$, l'application :

$$\begin{aligned} J(x) : E^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est linéaire continue. ($J(x) \in E^{**}$).

2- L'application :

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto J(x) \end{aligned}$$

est linéaire et isométrique, appelée l'application canonique de E dans son bidual E^{**}. Ainsi, on identifie E à un s.e. normé de E^{**}.

Preuve. 1/ Il est clair que $J(x)$ est linéaire. Pour tout $f \in E^*$, on a :

$$|J(x)(f)| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\|.$$

Donc $J(x)$ est continue et on a $\|J(x)\| \leq \|x\|$.

2/ Pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, et pour tout $f \in E^*$, on a :

$$\begin{aligned} J(x + \lambda y)(f) &= f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \\ &= J(x)(f) + \lambda J(y)(f) = (J(x) + \lambda J(y))(f). \end{aligned}$$

D'où on a :

$$J(x + \lambda y) = J(x) + \lambda J(y).$$

Ainsi, J est une application linéaire. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$ par le théorème 2.2.4 conséquences du Théorème Hahn-Banach ; Il existe $f \in E^*$ tel que $\|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\|$. Alors on a :

$$\|x\| = |f(x)| = |J(x)(f)| \leq \|J(x)\|\|f\| = \|J(x)\| \leq \|x\|,$$

d'où on a $\|J(x)\| = \|x\|$. Donc J est isométrique.

Remarque 2.3.1. *(Autre construction du complété d'un espace normé).*

Soient $(E, \|.\|)$ un espace normé, et E^{**} son bidual topologique, on vient de voir que l'application $J : E \longrightarrow E^{**}$ est linéaire isométrique. Ainsi on identifie $(E, \|.\|)$ à son image $J(E)$ qui est s.e.v de E^{**} (Banach). Posons $\hat{E} = \overline{J(E)}$ l'adhérence de $J(E)$ dans E^{**}, alors $\hat{E}$ est de Banach. Donc $(E, \|.\|)$ est un s.e.v dense dans $\hat{E}$. On obtient ainsi une destription du complété de l'espace normé E.

Définition 2.3.2. *Un espace de Banach E est dit réflexif si l'application canonique* $J : E \longrightarrow E^{**} \quad : x \longmapsto J(x)$ *est bijective.*

Exemple 2.3.1. *1- Les espaces normés de dimension finies sont réflexifs.*
2- Pour tout $p \in]1, \infty[$: ℓ^p, L^p *sont réflexifs.*
3-Tout espace de Hilbert est réflexif.

Corollaire 2.3.2. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace de Banach réflexifs. Alors pour tout* $f \in E^*$*, il existe un* $x \in E$ *tel que :* $\|x\| = 1$ *et* $\|f\| = |f(x)|$*.*

2.3.3 Convergence dans l'espace X^*

Dans ce paragraphe, nous étudions trois genres de convergence des suite de formes (d'opérateurs) linéaires et deux types de convergence des suites dans un espace normé.

Rappel 2.3.1. *(Topologie faible-$*$)*

Définition 2.3.3. *On appelle topologie faible-$*$, ou topologie weak-star, sur X^* la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaire issues de X^* :*
$\widetilde{x} : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$
$\varphi \longmapsto \widetilde{x}(\varphi) = \varphi(x), \quad \forall x \in X.$
On la note $\sigma(X^*, X)$, ou plus simplement w^*. On dit aussi que c'est la topologie pré-faible sur X^*.

On a donc trois topologies sur X^* .
-La topologie de sa norme, $\|.\|_{X^*}$.

-La topologie faible $\sigma(X^*, X^{**}) = w$.

-La topologie faible-$*$ $w^* = \sigma(X^*, X)$. *on a $X^{**} \supset X$.*

D'après la définition, w^* est moins fine que la topologie faible w (qui est elle même est moins fine que la topologie de la norme).
Comme pour la topologie faible, on a :

Définition 2.3.4. *Une base de voisinage de $\varphi_0 \in X^*$ est donnée par :*
$W_{x_1,\ldots,x_n}(\varphi) = \{\varphi \in X^* : |\varphi(x_j) - \varphi_0(x_j)| \leq \varepsilon,\ 1 \leq j \leq n\}$ *pour*
$\varepsilon > 0, n \geq 1 x_j \in X : j = \overline{1, n}.$

Proposition 2.3.3. *C'est une topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe et séparé*

Proposition 2.3.4. *Une suite $(f_n) \subset X^*$ converge vers f pour la topologie faible-$*$ ssi*
$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \forall x \in X$, *et on écrit :*
$f_n \xrightarrow{*} f$ *ou* $f_n \overset{\sigma(X^*,X)}{\longrightarrow} f$, *ou* $w^* - lim f_n = f$.

La topologie faible-$*$ coïncide avec la topologie faible ssi les formes linéaires $\widetilde{x}$, pour $x \in X$, composent l'ensemble des formes linéaires continues (en norme au pour la topologie faible) sur X^*, en d'autre terme ssi X est réflexif.

Proposition 2.3.5. *Dans le cas particulier des fonctionnelles (formes) linéaires*
$X'(X^*) := L(X, \mathbb{K})$, *nous avons :*
a) $x'_n \overset{\|\cdot\|}{\to} x'$, *si* $lim_{n\to\infty}\|x'_n - x'\| = 0$.
b) $x'_n \overset{s}{\to} x'$ *si* $lim_{n\to+\infty}x'_n(x) = x'(x),\ \forall x \in X$ *(Cette convergence s'appelle la convergence faible-$*$ et notée par w^*). Alors*
$x'_n \xrightarrow{s} x' \Leftrightarrow x'_n \xrightarrow{w^*} x'$.
c) $x'_n \xrightarrow{w} x'$, *si* $x''(x'_n) \longrightarrow x''(x'),\ \forall x'' \in X^{**}$, *le bidual de* X.
Si X est réflexif i.e $X \approx X^{**}$ on a $x'_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow x'_n \xrightarrow{w^*} x$.

Projets
1-Topologies faible et faible-$*$.
2-Relation entre les différents types de convergences.
3-Théorème de Radon-Nikodym et ses applications.
4-Applications.

Série 2 **Théorème de Hahn-Banach et espace dual**

EX 01 Soient E, F deux espaces normés. M un s.e.v de E.
1- Soit $T : M \longrightarrow F$ une application linéaire continue telle que $dim(Tx) \leq +\infty$. Monter qu'il existe $S \in L(E, F)$ prolonge T telle que $S(E) = T(M)$.
2- On suppose que M est un s.e.v fermé de E tel que l'espace E/M soit de

dimension finie.
a- Monter que M admet un supplémentaire topologique.
b- Soit T une application : $M \longrightarrow F$ continue. En déduire qu'il existe une application linéaire continue : $S : E \longrightarrow F$ prolonge T.
EX 02 1/ Soit E un espace normé. A une partie de E et $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. Monter qu'il existe une forme ℓ continue $T \in E^*$ telle que $T/_A = f$ et $\|T\| \leq c$ si et seulement si :

$$|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)| \leq c\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\|, \forall n \geq 1, \forall x_i \in A,\ \lambda_i \in \mathbb{K} \quad i = \overline{1, n} \tag{2.19}$$

2/ Étant donné une famille $(x_i)_{i\in I} \subset E$ et une famille $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}$, on déduire qu'il existe $T \in E^*$ telle que $Tx_i = a_i\ \forall i \in I$ et $\|T\| \leq c$ ssi

$$|\sum_{i\in J}^{n} \lambda_i a_i| \leq \| \sum_{i\in J} \lambda_i x_i\|$$

pour toute partie finie $J \subset I$ et $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

EX 03 Soient $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$ e.v.n et A, B deux sous-ensembles convexes disjoints non vides de E.
1/Montrer que si A et B sont ouverts, il peuvent-être séparés strictement par un hyperplan affine fermé.
/2 On suppose que $\mathring{A} \neq \varnothing$. Monter que A et B peuvent être séparés largement par un hyperplan affine fermé. [on admet que : A convexe $\Longrightarrow \mathring{A}$ convexe et $\overline{A} = \overline{\mathring{A}}$].

EX 04 Soit c un convexe compact de $\mathbb{R}^n$, $\mathring{e} \neq \varnothing$. Monter que c est homéomorphe à la boule unité B de $\mathbb{R}^n$. [on peut supposer c est un voisinage de 0, et considérer l'application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par, $f(0) = 0$ et $f(x) = J_c(x)\frac{x}{\|x\|}$, si $x \neq 0$, où J_c la jauge de c. vérifier sa continuité et monter qu'elle induit un homéomorphe de c sur B].

EX 05 1/ Soit $x = (x_n)_n \in \ell^\infty$. Soit $T_x : (\ell^1, \|.\|_1) \longrightarrow \mathbb{K} : T_x(y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$.
Montrer que $T_x \in (\ell^1)^*$ de norme égale à $\|x\|_\infty$. 2/ Soit $T : (\ell^\infty, \|.\|_\infty) \longrightarrow ((\ell^1)^*, \|.\|) : x \longmapsto Tx$.
Monter que T est isomorphisme de ℓ^∞ sur $(\ell^1)^*$. [c.à.d $(\ell^1)^* \approx \ell^\infty$].

EX 06 1/ Soit $(x_n) \in \ell^1$, soit l'application $Tx : (\ell^\infty, \|.\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{K} : y \longmapsto Tx(y) = \sum_{n\geq 0} x_n y_n$.
Montrer que Tx est une f.ℓ. continue sur ℓ^∞ de norme égale à $\|x\|_1$.

2/ On note Tx la restriction de Tx à ℓ_0, et considérons l'application suivante :

$$T : (\ell^1, \|.\|_1) \longrightarrow (\ell_0^*, \|.\|) : x \longmapsto Tx.$$

Montrer que T est un isomorphisme isométrique de (ℓ^1) sur le dual topologique de $(C_0, \|.\|_\infty)$ (i.e $\ell^1 \approx C_0^*$). 3/ Montrer l'existence d'un élément non nul $f \in (\ell^\infty)^*$ tel que f/C_0 est nulle. En déduire que f ne provient pas d'une élément de ℓ^1, et que ℓ^1 n'est pas réflexif.

EX 07 1/ Montrer qu'il n'existe aucun (f.ℓ.c) $T \in L(\ell^2, \ell^1)$ surjective. 2/ Montrer qu'il n'existe pas d'application bijective de $L(C_0, \ell^1)$.

EX 08 Soit E un espace localement convexe séparé de dimension infinie. Montrer que E^* est de dimension infinie [considerer un espace $F \subset E$ de dimension n et utiliser le Th de Hahn-Banach].

EX 09 Soient $T_i :\ i = \overline{1.n}, T$ des formes linéaires sur un espace vectoriel telles que $T_1x = T_2x = \cdots = T_nx = 0$ implique que $Tx = 0$, alors T est une combinaison linéaire des formes $T_i :\ i = \overline{1.n}$.

Chapitre 3

Opérateurs non-bornés et adjoints

3.1 Définitions et proriétés générales

Définition 3.1.1. *Soient E et F deux espaces de Banach. On appelle opérateur linéaire non-borné de E dans F toute application linéaire :*
$T : D(T) \subset E \longrightarrow F$ définie sur un sous-espace vectoriel $D(T) \subset E$, à valeurs dans F, $D(T)$ est le domaine de T.
On dit que T est borné s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|Tx\| \leq C\|x\|, \forall x \in D(T).$$

Définition 3.1.2. *Le graphe $\Gamma(T)$ de l'opérateur T est le sous-ensemble de $E \times F$ défini par :*

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx);\ x\text{ß}D(T).$$

Remarque 3.1.1. *En pratique, la plupart des opérateurs non-bornés que l'on rencontrera sont fermés (fermables) et à domaine dense dans E.*

Définition 3.1.3. *On dit qu'un opérateur T_1 est une extension d'un opérateur T si : $\Gamma(T) \subset \Gamma(T_1)$. On écrit alors $T \subset T_1$.*

Définition 3.1.4. *Un opérateur T est fermable s'il possède une extension fermée. Si c'est le cas, il possède une plus petite extension fermée (au sens de l'inclusion des graphes) appeléefermuture de t et nptée $\overline{T}$.*

Remarque 3.1.2. *Il peut se produire que la fermuture de $\Gamma(T)$ ne soit pas le graphe d'un opérateur linéaire, et dans ce cas T n'est fermable. ona en effet le résultat suivant :*

Proposition 3.1.1. *T est fermable si et seulement si $\overline{\Gamma(T)}$ est le graphe d'un opérateur linéaire, et on a alors $\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}$.*

Preuve. $\overline{\Gamma(T)}$ étant un espace vectoriel , c'est le graphe d'une application linéaire si et seulement si : $(0, \psi) \in \overline{\Gamma(T)} \Rightarrow \psi = 0$.
Si $\overline{\Gamma(T)}$ est un graphe , soit R l'opérateur de domaine $D(R) = \{\phi, \exists\psi, (\phi, \psi) \in \overline{\Gamma(T)}\}$, et défini par $R(\phi) = \psi$ ($\phi \in D(R)$ étant donné, il existe exactement un ψ tel que $(\phi, \psi) \in \overline{\Gamma(T)}$.
Le graphe de l'opérateur R est clairement $\overline{\Gamma(T)}$ et $(R, D(R))$ est donc une extension fermée de T. Si S est une extension fermée de T, alors $\Gamma(S)$ est unfermé contenant $\Gamma(T)$, donc aussi $\overline{\Gamma(T)}$. Il résulte que $R = \overline{T}$.
Si T est fermable, soit S une extension fermée. Puisque $\overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S)$, la caractérisation prouvée au début de la démonstration montre que $\overline{\Gamma(T)}$ est un graphe.

3.2 Relation d'orthogonalité

Notations 3.2.1. *Soit X un espace de Banach. Si $M \subset X$ est un s.e.v on pose :*

$$M^{\perp} = \{f \in X^* :< f, x >= 0 \quad \forall x \in M\},$$

est l'orthogonal de M est un s.e.v fermé de X^*. Si $N \subset X^*$ est un sous espace.v on pose :

$$N^{\perp} = \{x \in X :< f, x >= 0 \quad \forall f \in N\}.$$

est l'orthogonale de N est un s.e.v de X.

Proposition 3.2.1. *Soit $M \subset X$ un s.e.v. Alors on a :*

$$(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}.$$

Soit $N \subset X^*$ un s.e.v. Alors on a :

$$\overline{N} \subset (N^{\perp})^{\perp}.$$

Preuve. Il est clair que $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$ et comme $(M^{\perp})^{\perp}$ est fermé, on a $\overline{M} \subset (M^{\perp})^{\perp}$ inversement montrons que $(M^{\perp})^{\perp} \subset \overline{M}$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $x_0 \in (M^\perp)^\perp$ tel que $x_0 \notin \overline{M}$. On sépare alors $\{x_0\}$ et $\overline{M}$ au sens strict par un hyperplan fermé. Donc il existe $f \in X^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$$< f, x >< \alpha << f, x_0 > \quad \forall x \in M. \tag{3.1}$$

Comme M est un s.e.v, il en résulte que $< f, x >= 0 \quad \forall x \in M$. Donc $f \in M^\perp$ et par suite $< f, x_0 >= 0$ ce qui contredit (3.1), donc $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$. Il est clair que $\overline{N} \subset (N^\perp)^\perp$.

Remarque 3.2.1. *Dans le cas général $\overline{N} \neq (N^\perp)^\perp$, mais si X est réflexif $(N^\perp)^\perp = \overline{N}$.*

Supposons X est réflexif mais $\overline{N} \neq (N^\perp)^\perp$ c-à-d $\exists f_0 \in (N^\perp)^\perp$ et $f_0 \notin \overline{N}$. Alors $\exists$ hyperplan fermé dans X^{**} sépare $\{f_0\}$ et $\overline{N}$ aux sens strict. Donc $\exists \varphi \in X^{**}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\varphi(f) < \alpha < \varphi(f_0), \forall f \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

On a $\varphi(f) = 0 \quad \forall f \in \overline{N} \Rightarrow \exists x_0 \in X := X^{**} : \varphi(f) =< f, x_0 >= 0 \quad \forall f \in \overline{N}$
($\Rightarrow x_0 \in \overline{N}^\perp \subset N^\perp$ et $\varphi \in N^\perp \Rightarrow \varphi(f_0) =< f_0, x_0 >= 0$)
$\Rightarrow f_0 \in \overline{N}$,
contradiction avec (3.2), donc $\overline{N} = (N^\perp)^\perp$.

Proposition 3.2.2. *Soient G et L deux s.e.fermés de X, on a :*
(1) $G \cap L = (G^\perp + L^\perp)^\perp$.
(2) $(G \cap L)^\perp \supset \overline{(G^\perp + L^\perp)}$.
(3) $(G^\perp \cap L^\perp) = (G + L)^\perp$.
(4) $(G^\perp \cap L^\perp)^\perp = \overline{(G + L)}$.

Théorème 3.2.1. *Soient G et L deux s.e.fermés de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(a) $G + L$ est fermé dans X.
(b) $G^\perp + L^\perp$ est fermé dans X^*.
(c) $G + L = (G^\perp \cap L^\perp)^\perp$.
(d) $G^\perp + L^\perp = (G \cap L)^\perp$.
Pour la démonstration voir H.Brézis.

3.3 Opérateurs adjoints sur les espaces de Banach

3.3.1 Adjoints des opérateurs linéaires non-bornés

Définition 3.3.1. *Deux opérateurs $(S, D(S))$ et $(T, D(T))$ sont dits adjoints si :*

$$\forall (u, v) \in D(S) \times D(T), \langle Su, v\rangle = \langle u, Tv\rangle.$$

sans conditions suplémentaires sur l'opérateur T, celui-ci possède en général plusieurs adjoints. Si par contre le domaine de T est dense, il existe pour T un unique adjoint maximal (au sens que c'est une extension de tout autre adjont), qui est défini de la façon suivante :

Définition 3.3.2. *(L'adjoint A^*) Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur non-borné à domaine dense. On va définir un opérateur non-borné $A^* : D(A^*) \subset E^* \longrightarrow E^*$ comme suit : on pose :*

$$D(A^*) = \{v \in F^*; \exists c \geq 0 \text{ tel que } | < v, Ax > | \leq c\|x\| \ \forall x \in D(A)\}.$$

$D(A^*)$ est s.e.v de F^*. On va définir A^*v pour $v \in D(A^*)$. Étant donné $v \in D(A^*)$ et considère $g : D(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(x) =< v, Ax >$, $x \in D(A)$, on a $|g(x)| \leq c\|x\| \ \forall x \in D(A)$.

Grâce au Th de Hahn-Banach (forme analytique) il existe $f \in E^*$ prolonge g et $|f(x)| \leq c\|x\| \ \forall x \in E$.

Par suite $f \in E^*$. Ce prolongement est unique car f est continue sur E et $\overline{D(A)} = E$. On pose :

$$A^*v = f \ [\forall x \in D(A), \forall v \in D(A^*), \ A^*(v)x = v(Ax)].$$

Il est clair que A^* est linéaire. L'opérateur $A^* : D(A^*) \subset F^* \longrightarrow E^*$ est appelé l'adjoint de A.
On a par conséquent la relation fondamentale suivante qui lié A et A^* :

$$< v, Ax >_{F^*F} =< A^*v, x >_{E^*E} \quad \forall x \in D(A), \ \forall v \in D(A^*). \tag{3.3}$$

Si T est à domaine dense, son adjoint T^* est bien défini, mais son domaine n'est pas forcément dense (il peut même être réduit à 0) voir Ex 2 TD).

Proposition 3.3.1. *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur non-borné à domaine dense. Alors A^* est fermé. i.e $G(A^*)$ est fermé dans $F^* \times E^*$.*

Preuve. Soit $v_n \in D(A^*)$ tel que $v_n \longrightarrow v$ dans F^* et $A^*v_n \longrightarrow f$ dans E^*. Il s'agit de prouver que :

$$v \in D(A^*) \quad \text{et } A^*v = f.$$

Or on a :

$$< v_n, Ax >=< A^*v_A, x > \quad \forall x \in D(A).$$

D'où à la limite il vient :

$$< v, Ax >=< f, x > \quad \forall x \in D(A).$$

Par conséquent $v \in D(A^*)$ et $A^*v = f$.

Remarque 3.3.1. *Les graphes de A et A^* sont liés par une relation d'orthogonalité très simple. $J(G(A^*)) = G(A)^\perp$ où J est définie comme suit :*

$$J : F^* \times E^* \longrightarrow E^* \times F^* : \quad J([v, f]) = [-f, v].$$

En effet : on a

$$\begin{aligned} [v, f] \in G(A^*) \Leftrightarrow & \qquad\qquad < f, u >=< v, Au > \forall u \in D(A) \\ \Leftrightarrow & \quad - < f, u >_{E^*E} + < v, Ax >_{F^*F}= 0 \;\forall u \in D(A), \\ \Leftrightarrow & \qquad\qquad [-f, x] \in G(A)^\perp. \end{aligned}$$

Si T^* est aussi à domaine dense, on peut définir $T^{**} = (T^*)^*$ on a alors la proposition.

Proposition 3.3.2. *T est fermable si et seulement si T^* est à domaine dense, et dans ce cas on a l'identité :*

$$(T^*)^* = T^{**} = \overline{T}.$$

Preuve. Suppossons $D(T^*)$ non dense. Il existe alors $v \neq 0$, $v \in D(T^*)^\perp$. Il en résulte que $(-v, 0) \in \Gamma(T^*)^\perp$, et donc que $(0, v)J(T^*)^\perp$. D'après la remarque 3.3.1 $\overline{\Gamma(T)}$ n'est pas un graphe d'application linéaire, et t est non fermable d'après la proposition 3.1.1.
Supposons réciproquement que $D(T^*)$ soit dense. Alors $(T^*)^*$ existe , et d'aprés la remarque 3.3.1

$$\Gamma(T^{**}) = J(\Gamma(T^*))^\perp = \overline{\Gamma(T)},$$

$\overline{\Gamma(T)}$ est donc un graphe, celui de T^{**}, d'oùil résulte que T est fermable, et que $\overline{T} = T^{**}$.

Proposition 3.3.3. *Si T est fermable à domaine dense, $(\overline{T})^* = T^*$.*

Preuve. On a :$(\overline{T})^* = (T^*)^{**} = \overline{T^*} = T^*$.

Il est commode d'introduire l'espace $X = E \times F$ de sorte que $X^* = E^* \times F^*$ et de considérer les sous espaces $G = G(A)$, $L = E \times \{0\}$ dans X.

On peut écrire $R(A)$ $N(A)$,$R(A^*)$ et $N(A^*)$ en termes de G et L.
(1') $N(A) \times \{0\} = G \cap L$.
(2') $E \times R(A) = G + L$.
(3') $\{0\} \times N(A^*) = G^\perp \cap L^\perp$.
(4') $R(A^*) \times F^* = G^\perp + L^\perp$.

Corollaire 3.3.1. *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = E$ Alors on a :*
(i) $N(A) = R(A^*)^\perp$.
(ii) $N(A^*) = R(A)^\perp$.
(iii) $N(A)^\perp \supset \overline{R(A^*)}$.
(iv) $N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$.

Preuve. (i) d'après (4') et grâce à (4) de la proposition 3.2.2 ; on a :

$$R(A^*)^\perp \times \{0\} = (G^\perp + L^\perp)^\perp = G \cap L \tag{3.4}$$
$$= N(A) \times \{0\} \quad \text{(grâce à (1'))} \tag{3.5}$$

(ii) d'après (2′) et grâce à (2) de la proposition 3.2.2 on a :

$$\{0\} \times R(A)^\perp = (G + L)^\perp \tag{3.6}$$
$$= \{0\} \times N(A^*) \quad \text{(grâce à (3'))}. \tag{3.7}$$

(iii) On utilise (i) et appliquer la proposition 3.2.1.
(iv) on utilise (ii) et appliquer la proposition 3.2.1.

3.3.2 Opérateurs à image fermée, opérateurs surjectifs

Théorème 3.3.1. *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = E$.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $R(A)$ *est fermé.*
(ii) $R(A^*)$ *est fermé.*
(iii) $R(A) = N(A^*)^\perp$.
(iv) $R(A^*) = N(A)^\perp$.

Preuve. $(i) \Leftrightarrow G + L$ est fermé dans X $(2')$.

$(ii) \Leftrightarrow G^{\perp} + L^{\perp}$ est fermé dans X^* $(4')$.

$(iii) \Leftrightarrow G + L = (G^{\perp} \cap L^{\perp})^{\perp} \quad ((2)'$ et $(3)')$.

$(iv) \Leftrightarrow (G \cap L)^{\perp} = \overline{(G^{\perp} + L^{\perp})} = G^{\perp} + L^{\perp}$ grâce à la proposition 3.2.2 et $(1)' - (4)'$.

On conclut grâce à la proposition 3.2.1

Remarque 3.3.2. *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ opérateur non-borné, fermé, Alors $R(A)$ est fermé ssi $\exists c > 0 : dist(x, N(A)) \leq c\|Ax\|, \forall x \in D(A)$.*

Théorème 3.3.2. *Soient E, F deux Banach et soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) A est surjectif i.e. $R(A) = F$.

(b) Il existe une constante $c \geq 0$ telle que : $\|x\| \leq c\|A^*v\| \quad \forall v \in D(A^*)$.

(c) $N(A^*) = \{0\}$ et $R(A^*)$ est fermé.

Preuve.

$(a) \Leftrightarrow (c)$ C'est une conséquence directe du corollaire 3.3.1 et théorème 3.3.1.

$(b) \Leftrightarrow (c)$ Soit w_n une suite de Cauchy : $(w_n) \subset R(A^*) \Rightarrow \exists (v_n) \in D(A^*)$ de Cauchy :$w_n = A^*v_n$. car $\|v_n - v_R\| \leq c\|w_n - w_R\|$, comme F^* est un Banach $\Rightarrow (v_n) \longrightarrow v$ et on a :

$$< A^*v_n, x > = < v_n, Ax > \quad \forall x \in D(A), \forall v_n \in D(A^*)$$

or

$$< A^*v_n, x > = < v_n, Ax > \quad \forall x \in D(A)$$

et

$$\exists c > 0 | < v_n, Ax > | \leq c\|x\|, \quad \forall x \in D(A), \quad \forall v_n \in D(A^*).$$

Puisque

$$\|A^*v_n - A^*v\|_{E^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} | < A^*v_n - A^*v, x > | \tag{3.8}$$

$$= \sup_{\|x\| \leq 1} | < v_n - v, Ax > |, \forall x \in D(A), \tag{3.9}$$

$$\leq c\|v_n - v\| \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \quad \forall x \in D(A), \tag{3.10}$$

$$\leq c\|v_n - v\|\|A\|, \tag{3.11}$$

donc $v_n \longrightarrow v \Rightarrow A^*v_n \longrightarrow Av \Rightarrow R(A^*)$ est fermé.

$(c) \Rightarrow (b)$: Comme on a : $\{0\} \times N(A^*) = L^\perp \cap G^\perp$ et $R(A^*) \times F^* = L^\perp + G^\perp$ (fermé dans un Banach).

alors, $\forall z \in L^\perp + G^\perp$ décompose de manière unique : $z = z_1 + z_2$: $z_1 \in L^\perp, z_2 \in G^\perp$.

Soit $v \in D(A^*)$, alors $z = [A^*v, 0] = z_1 + z_2$ avec $z_1 = [A^*v - v] \in G^\perp, z_2 = [0, v] \in \{0\} \times F^* = L^\perp$ donc les projections :$\pi_1 : L^\perp + G^\perp \longrightarrow G^\perp$ et $\pi_2 : L^\perp + G^\perp \longrightarrow L^\perp$ sont continues

$$\Rightarrow \exists c : \|z_2\|_{F^*} \leq c\|z\|_{L^\perp + G^\perp} = c\|A^*v\|_{E^*},$$

ce qui preuve $(c) \Rightarrow (b)$.

Théorème 3.3.3. *Soient E, F deux Banach et soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ (deux Banach) un opérateur, fermé avec : $\overline{D(A)} = F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) A^* est surjectif i.e. $R(A^*) = E^*$.

(b) il existe une constante c telle que $\|X\| \leq c\|Ax\| \quad \forall x \in D(A)$.

(c) $N(A) = \{0\}$ et $R(A)$ est fermé.

Remarque 3.3.3. *Si l'on suppose que $dimE < +\infty$ ou bien $dimF < +\infty$ alors, on a les équivalentes :*

A surjectif $\Leftrightarrow A^*$ injectif.

A^* surjectif $\Leftrightarrow A$ injectif.

En effet $R(A)$ et $R(A^*)$ sont alors de dimension finie est donc fermés.

Dans le cas général on a seulement les implications :

A surjectif $\Rightarrow A^*$ injectif.

A^* surjectif $\Rightarrow A$ injectif.

3.3.3 Caractérisation de opérateurs bornés

Définition 3.3.3. *(Simple) Soient E, F deux espaces norméset $T \in L(E, F)$. L'application :*

$$\begin{aligned} F^* &\longrightarrow E^* \\ f &\mapsto f \circ T \end{aligned}$$

est appelée la transposée ou l'adjoint de T et on la note ${}^tT$ ou T^*.

Exemple 3.3.1. *Soit E un espace normé, H un s.e.v. de E et $i : H \hookrightarrow E$ l'injection canonique. Alors $i^* : E^* \to H^*$ est l'application de restriction. Autrement dit, pour tout $f \in E^*$, on a $i^*(f) = f_{|H}$.*

Remarque 3.3.4. *Soient* $(E, \|.\|)$ *un espace normé et* $J : E \to E^{**}$*l'application canonique. Aors l'application adjoint* $J^* : E^{**} \to E^*$ *est surjective.*
En effet, notons d'abord que pour tout $\Lambda \in E^{***}$*, on a* $J^*(\Lambda) = \Lambda \circ J$.
Soit $g \in E^*$*, alors* $g \circ J^{-1} : J(E) \to \mathbb{K}$ *est une forme linéaire continue sur* $j(E)$*. Par le Th de Hahn-Banach 2.2.3, il existe* $\Lambda \in E^{***}$ *qui prolonge* $g \circ J^{-1}$*. D'où on a* $J^*(\Lambda) = \Lambda \circ J = g$.

Notations 3.3.1. *Soient* $(E, \|.\|)$ *un espace normé pour tout* $x \in E$ *et tout* $g \in E^*$*, on note :*

$$\langle x, g \rangle = g(x).$$

L'application

$$\begin{aligned} E \times E^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, g) &\mapsto \langle x, g \rangle \end{aligned}$$

est clairement bilinéaire et continue car on a $|\langle x, g \rangle| \leq \|g\|\|x\|$.
soient E, F deux espaces normés et $T \in L(E, F)$, alors pour tout $x \in E$ et tout $f \in F^*$, on a :

$$\langle T(x), f \rangle = \langle x, T^*(f) \rangle.$$

Remarque 3.3.5. *Soient* $(E, \|.\|)$, $(F, \|.\|')$*, deux espaces norméset* $T \in L(E, F)$*.soit* G *un s.e.v.de* F*tel que* $T(E) \subset G$*. Soit* $S \in l(E, G)$ *tel que pour tout* $x \in E$*, on ait* $S(x) = T(x)$*. Alors on a* $Im(S^*) Im(T^*)$*. En effet, soient* $f \in G^*$ *et* $\tilde{f} \in F^*$ *tels que* $\tilde{f}_{|G} = f$*. pour tout* $x \in E$*, on a* $S^*(f)(x) = f \circ S(x) = \tilde{f}(x)$*. Donc on a* $S^*(f) = T^*(\tilde{f})$*, d'où* $Im(S^*) = Im(T^*)$.

Théorème 3.3.4. *Soient* E, F *et* $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ *un opérateur non-borné, fermé, avec* $\overline{D(A)} = E$*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $D(A) = E$.
ii) A *est borné.*
iii) $D(A^*) = F^*$.
iv) A^* *est borné.*
Dans ces conditions on a : $\|A\|_{L(E,F)} = \|A^*\|_{L(F^*,E^*)}$.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$ Appliquer le théorème du graphe fermé (E, F Banach).
$(ii) \Rightarrow (iii)$: $D(A^*) = \{v \in F^* : \exists c > 0 \mid < v, Ax > \mid < c\|x\| \ \forall x \in E\}$.
$\forall v \in F^*, A$ borné $\Rightarrow \mid < v, Ax > \mid \leq \|v\|_{F^*}\|Ax\|_E \leq c\|x\| \Rightarrow D(A^*) = F^*$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Comme $D(A^*) = F^* \Rightarrow G(A^*) :=$ le graphe de A^* est fermé, appliquer le théorème du graphe fermé $\Rightarrow A^*$ est borné.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Montrons d'abord que $D(A^*)$ est fermé. Soit $v_n \in D(A^*)$: $v_n \xrightarrow{F^*} v$, on a :

$\|A^*(v_n - v_m)\| \leq c\|v_n - v_m\| \quad (E^*$ complet$) \Rightarrow \exists f \in E^*\ A^*v_n \to f$: (A^* fermé) $\Rightarrow f = A^*v$. donc $v \in D(A^*) \Leftrightarrow D(A^*)$ est fermé.

Dans l'espace $X = E \times F$ on considère $G = G(A)$ et $L = \{0\} \times F$ de sorte que : $G + L = D(A) \times F$ et $G^\perp + L^\perp = E^* \times D(A^*)$ fermé $\Rightarrow G + L$ fermé ; $\Rightarrow D(A)$ fermé. Comme $\overline{D(A)} = E \Rightarrow D(A) = E$.

Montrons $\|A\|_{L(E,F)} = \|A^*\|_{L(F^*,E^*)}$?.

$\forall x \in E, \forall v \in F^*$ on a $< v, Ax >=< A^*v, x >$. Donc :

$$\|Ax\| = \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle v, Ax\rangle| = \sup_{\|v\|\leq 1} | < A^*v, x > | \leq \|A^*\|\|x\|,$$

et

$$\|A^*v\| = \sup_{\|x\|\leq 1} | < A^*v, x > | = \sup_{\|x\|\leq 1} | < v, Ax > | \leq \|A\|\|v\|.$$

Par conséquent :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \leq \|A^*\| \quad \text{et} \quad \|A^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|A^*v\| \leq \|A\| \Rightarrow \|A\| = \|A^*\|.$$

Corollaire 3.3.2. *L'application $\varphi : L(E,F) \longrightarrow L(F^*,E^*) : T \longmapsto T^*$ est une isométrie.*

Remarque 3.3.6. *Soient E, F deux espaces normés et $T \in L(E,F)$. Alors pour tout $x \in E$, on a $T^{**}(J_E(x) = J_F(T(x))$.*

Théorème 3.3.5. *Soit E, F deux espaces et $T \in L(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $T(E)$ est fermé dans F.

(2) $T^*(F^*)$ est fermé dans E^*.

3.4 Opérateurs adjoints sur un Hilbert

Définition 3.4.1. *Soient E, F deux espaces de Hilbert, et $T \in L(E,F)$.*

1- T est dit unitaire si l'on a : $T^*oT = Id_E$ et $ToT^* = Id_F$.

2- T est dit normal si l'on a : $T^*oT = ToT^*$.

3- T est dit auto-adjoint si l'on a : $T = T^*$ (Symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

4- T est dit positif s'il est auto-adjoint et si $\forall x \in E$ on a $< Tx, x > \in \mathbb{R}_+$.

Exemple 3.4.1. *Soient I un ensemble non vide et $\lambda = (\lambda_i)_{i\in I} \in \ell^\infty(I)$. Pour tout $x \in (x_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$, on pose $T_\lambda(x) = (\lambda_i x_i)_{i\in I}$. Alors $T_\lambda \in L(\ell^2(I))$ et on a les propriétés suivantes :*

1- $< T_\lambda x, y > = < x, T_\lambda^* y > = < x, \overline{\lambda} y > \Rightarrow (T_\lambda)^* = T_{\overline{\lambda}} :\quad \overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_i)$ et $\|T_\lambda\| = \|\lambda\|_\infty$.

2- $\forall \lambda, \beta \in L^\infty(I), \forall a, b \in \mathbb{K}$ on a $T_{a\lambda + b\beta} = aT_\lambda + bT_\beta$ (T_λ linéaire) et $T_\lambda o T_\beta = T_\beta o T_\lambda$. Donc $T_\lambda o T_\lambda^* = T_\lambda^* o T_\lambda$ i.e T_λ est un opérateur normal.

3- On $T_\lambda = (T_\lambda)^* \Leftrightarrow \overline{\lambda} = \lambda \Leftrightarrow \lambda_i = \overline{\lambda}_i \forall i \Leftrightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$.

4- T_λ est positif $\Leftrightarrow < T_\lambda x, x > \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda) \geq 0$ i.e $\forall i \in I \quad \lambda_i \geq 0$.

5- T_λ est unitaire $\Leftrightarrow T_{\overline{\lambda}} o T_\lambda = Id_E$ et $T_\lambda o T_{\overline{\lambda}} = Id_E \Leftrightarrow \lambda\overline{\lambda} = 1 \Leftrightarrow |\lambda_i| = 1\ \forall i \in I$.

Proposition 3.4.1. *Soit $(E, < . >)$ un espace pré-hilbertienne et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de E. On suppose que $(E, < . >)$ est un espace de Hilbert, est on a $B = \{e_i\ i \in I\}^\perp = \{0\}$ alors B est base hilbertienne de H.*

Proposition 3.4.2. *Soit E,F deux espaces de Hilbert, et $T \in L(E, F)$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i)- T est unitaire.

(ii)- T est surjective et pour tout $x, y \in H$, on a :$< Tx, Ty > = < x, y >$.

(iii)- Pour toute base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ de E, $(T(e_i))_{i\in I}$ est une base hilbertienne de F.

(iv)- Il existe une base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ de E telle que $(T(e_i)_I$ est une base hilbertienne de F.

(v)- T est surjective et pour tout $x \in H$, on a $\|Tx\| = \|x\|$.

(vi)- T est surjective et on a $T^*oT = Id_E$.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$: Si T est unitaire on a : $T^*oT = Id_E$ et $ToT^* = Id_F$ ssi $T(T^*(F)) = Id_F(F) = F$ implique $\forall y \in F \Rightarrow x \in E$ ($x \in E^* : x = T^*y$ or $E^* = E$) : $Tx = y$, donc T est surjective et $T^*oT = Id_E$ implique $\forall x, y \in E$ on a$< Tx, Ty > = < T^*oTx, y > = < x, y >$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: est triviale $ii \Leftrightarrow T$ est une bijection.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ $B = \{e_i,\ i \in I\}$ une base E telle que $T(B) = \{T(e_i),\ i \in I\}$ une base de F. Soit $B' = \{e'_k,\ k \in I' \supset I\}$ une famille orthonormée dans E

alors $T(B') = \{T(e'_k),\ k \in I'\}$ est une une famille orthonormée dans F. Soit $x \in (B')^{\perp}$; alors $\langle x, e'_k\rangle = 0\ \forall k \in I'$: $x = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$ et $0 \neq e'_k = \sum_{i\in I} \alpha_{ki} e_i$, donc $\langle x', e_i\rangle = 0$, $\forall i \in I$: $x' = \sum_{i\in I} \alpha_i \overline{\alpha_{ki}} e_i$ implique $x' \equiv= 0$ qui implique $\alpha_i \overline{\alpha_{ki}} = 0\, \forall i \in I$ et $k \in I'$ implique que $\alpha_i = 0\, \forall i \in I$ qui signifie $(B')^{\perp} = \{0\}$. donc, d'après la proposition 3.4.1 B' est une base de E. Par le même argument ; on obtient que $T(B')$ est une base de F.

$(iv) \Rightarrow (v)$ $B = \{e_i,\ i \in I\}$ une base $E \Rightarrow T(B) = \{T(e_i),\ i \in I\}$ une base de $F \approx F^*$ (T est une bijection) (iv) implique $T^*(T(e_i))$ est une base $E^* \approx E$; alors d'après égalité de Parseval on a :

$$\|Tx\|^2 = \sum_{i\in I} | < Tx, T(e_i) > |^2 = \sum_{i\in I} | < x, T^*T(e_i) > |^2 = \|x\|^2.$$

$(v) \Rightarrow (vi)$: $\quad \|Tx\|^2 =< Tx, Tx >=< T^*Tx, x > \overset{=\|x\|}{=} < x, x > \ \ \forall x \in E \Rightarrow T^*oT = Id_E$.

$(vi) \Rightarrow (i)$: Puisque $T^*oT = Id_E \Rightarrow T$ est injectif. Comme T est surjective $\Rightarrow T$ est une bijection. D'après le Th de l'application ouverte, il existe $T^{-1} \in L(F, E)$: $T^{-1}oT = Id_E$ et $ToT^{-1} = Id_F$. On a aussi $T^*oT = Id_E \Rightarrow T^* = T^{-1}$, par conséquent, on a :

$T^*oT = Id_E$ et $ToT^* = Id_F$ i.e. T est unitaire.

Proposition 3.4.3. *Soient $(H, < ., . >)$ un espace de Hilbert et $T \in L(H)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes (ssi).*

(i) Pour tout $(x, y) \in H^2$ on a : $< Tx, Ty >=< T^*x, T^*y >$.

(ii) Pour tout $x \in H$, on a : $\|Tx\| = \|T^*x\|$.

(iii) L'opérateur T est normal.

Preuve. $(i) \Leftrightarrow (iii)$ T est normal ssi $T^*oT = ToT^*$

$$T^*oT = ToT^* \Leftrightarrow \qquad < T^*oTx, y >=< Tx, Ty >= \\ =< ToT^*x, y >=< T^*x, T^*y > .$$

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Pour tout $(x, y) \in H^2$, on pose $f(x, y) =< ToT^*x, y >$ et $g(x, y) =< T^*oTx, y >$. Alors f et g sont hermitiennes sur H. De plus on a $f(x, x) =< ToT^*x, x >= \|T^*x\| \geq 0$ et $g(x, x) =< T^*oTx, x >= \|Tx\| \geq 0$.

L'opérateur T est normal ssi $f = g$.

D'autre part d'après l'identité de polarisation $f \equiv g$ ssi $f(x, x) = g(x, x)$. Par conséquent, T est normal $\Leftrightarrow$ pour tout $x \in H$ on a $\|Tx\| = \|T^*x\|$ i.e. $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.

Proposition 3.4.4. *Soit $(H, < .,. >)$ un espace de Hilbert et $T \in L(H)$ un opérateur normal. Alors on a les propriétés suivantes :*

1- $T(H)$ est dense dans H si et selement si (ssi) T est injective.

2- $T(H)$ est dense dans H ssi $T^*(H)$ est dense dans H.

3- T est bijectif ssi il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\|x\| \leq c\|Tx\|, \forall x \in H$$

.

Preuve.

1) Puisque T est normal, il résulte de la proposition précédente que l'on a $kerT = kerT^*$, on déduit d'après $(kerT^* = R(T)^\perp, \quad kerT = R(T^*)^\perp)$ que $T(H)$ est dense dans H ssi T est injective.

2) résulte de $kertT^* = R(T)^\perp$ et $kerT^* = kerT$.

3) résulte de la proposition 3.3.3 et de 1.

Corollaire 3.4.1. *Soit $(H, < .,>)$ un espace de Hilbert et $T \in L(H)$ un opérateur normal, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) T n'est pas bijectif.

ii) On a $inf\{\|Tx\|; x \in H$ et $\|x\| = 1\} = 0$.

iii) Il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans H telle que pour tout $n \geq 0$, on ait $\|x_n\| = 1$ et telle que $lim_{n\to\infty}\|Tx_n\| = 0$.

Preuve.

Soit $c = inf\{\|Tx\|; x \in H$ et $\|x\| = 1\}$. Alors $\forall x \in H$, on a $\|x\| \leq c\|Tx\|$. On déduit de la proposition précédente que T n'est bijectif ssi $c = 0$ donc $i) \Leftrightarrow ii)$.

$ii) \Leftrightarrow iii)$ est triviale.

Proposition 3.4.5. *Soient $(H, < .,. >)$ une espace de Hilbert et $T \in L(H)$. Pour tout $x, y \in H$, on pose $f(x, y) =< Tx, y >$.*

1- Si $T = T^*$, alors pour tout $x \in H$, on a $< Tx, x > \in \mathbb{R}$.

2- On a $T = T^*$ ssi f est une forme hermitienne.

3- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $T^* = T$ ssi f est une forme bilinéaire symétrique.

4-Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $T^* = T$ ssi pour tout $x \in H$, on a $< Tx, x > \in \mathbb{R}$.

5- On suppose que $T = T^*$. Alors $T(H)$ est dense dans H ssi f est non dégénérée.

Preuve. 1- Supposons que l'on a $T = T^*$, alors pour tout $x \in H$, on a $< Tx, x >=< x, Tx >= \overline{< Tx, x >}$, d'où $< Tx, x >\in \mathbb{R}$.

2- Notons d'abord que f est une forme sesquilinéaire continue sur H.

Supposons d'abord $T = T^*$. Alors $\forall x, y \in H$, on a : $f(x, y) =< Tx, y ><$ $x, Ty >= \overline{< Ty, x >} = \overline{f(y, x)}$, donc f est hermitienne.

Réciproquement, supposons f est hermitienne. Alors pour tout $x, y \in H$, on a :

$$< Tx, y >= (f(x, y)) = \overline{f(y, x)} = \overline{< Ty, x >} =< x, Ty >=< T^*x, y >,$$

d'où on a :

$$< (T - T^*)x, y >= 0 \; \forall x, y \in H. \quad \text{Par conséquent on a :} \quad T = T^*.$$

4- est une conséquence de 1 et 2 et f est une forme hermitienne ssi f est une forme sesquilinéaire, et pour tout $x \in H$, on a $f(x, x) \in \mathbb{R}$.

$* \Rightarrow$ est triviale.

$* \Leftarrow$ Soit $\Psi(x, y) = f(x, y) - \overline{f(y, x)}$. Alors Ψ est une forme sesquilinéaire, et $\forall x \; \Psi(x, x) = 0$ par l'identité de polarisation $\Psi = 0$ est donc $\forall x, y \in H$, on $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$.

Par conséquent, f est une forme hermitienne .

5- Supposons que $T = T^*$. Alors $T(A)$ est dense dans H ssi f est non dégénérée.

$\Rightarrow$?

Supposons $T = T^*$. Alors on a $kerT = R(T^*)^\perp = R(T)^\perp$, donc $R(T)$ est dense dans H ssi $R(T)^\perp = \{0\}$. Supposons que $R(T)$ est dense dans H. Soit $x \in H$ tel que pour tout $y \in H$, on ait $f(x, y) = 0$. Alors pour tout $y \in H$, on a $< Tx, y >= 0$, donc $Tx = 0$, d'où $x \in kerT = R(T)^\perp$. Donc on a $x = 0$ par conséquent f est non dégénérée.

$\Leftarrow$?

Réciproquement, supposons que f est non dégénérée soit $x \in R(T)^\perp$. Alors pour tout $y \in H$, on a $< Tx, y >=< x, Ty >= 0$, d'où $f(x, y) = 0$. Donc on a $x = 0$ par conséquent $R(T)^\perp = \{0\}$. i.e. $R(T)$ est dense dans H.

Proposition 3.4.6. *Soit $(H, < ., . >)$ un espace de Hilbert. Pour tout opérateur auto-adjoint $T \in L(H)$, on a $\|T\| = sup\{| < Tx, x > |, x \in H, \|x\| = 1\}$.*

Preuve. Rappellons que pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sup_{y\neq 0} \frac{|<x,y>|}{\|y\|} = \sup_{\|y\|\leq 1} |<x,y>| \\ &= \sup_{\|y\|<1} |<x,y>| = \sup_{\|y\|=1} |<x,y>|.\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\sup_{\|y\|=1} <Tx,y>| \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |<x,Ty>|.\end{aligned}$$

Soit $\alpha = \sup\{|Tx,x>|; x \in H, \|x\| = 1\}$, alors on a $\alpha \leq \|T\|$.
Pour tout $x, y \in H$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $<Tx,y>= e^{i\theta}|<Tx,y>|$, d'où $<Te^{-i\theta}x, y>= |<Tx,y>| \in \mathbb{R}$, avec $\|e^{-i\theta}x\| = \|x\|$, par conséquent, on a :

$$\|T\| = sup\{Re(<Tx,y>)|; x,y \in H\ \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

Puisque $T = T^*$, on vérifie facilement que pour tout $x, y \in H$, on a :

$$Re(<Tx,y>) = 1/4(<T(x+y), x+y> - <T(x-y), x-y>)$$

d'où

$$|Re(<Tx,y>) \leq \alpha\|x+y\|^2 + \alpha\|x-y\|^2 = 2\alpha(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

On a donc

$$|Re(<Tx,y>)| \leq \alpha/2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \text{d'où} \quad \|T\| \leq \alpha,$$

et par conséquent $\|T\| = \alpha$.

Proposition 3.4.7. *Soient $(H, <.,.>)$ un $\mathbb{C}$-e.de Hilbert et $S, T \in L(H)$.*
1/ Si pour tout $x \in H$, on a $<Tx,x>= 0$ alors $T = 0$.
2/ Si pour tout $x \in H$, on a $<Sx,x>=<Tx,x>$, alors $S = T$.

Preuve. 1) $\forall x, y \in H$ on a $<T(x+y), x+y>=<Tx,x> + <Tx,y> + <Ty,x> + <Ty,y>= 0$,

alors $<Tx,y> + <Ty,x>= 0(1)$. En remplaçant y par iy on obtient $-i <Tx,y> +i <Ty,x>= 0$ en multipliant par i, on obtient $<Tx,y> - <Ty,x>= 0(2)$, en sommant $<Tx,y>= 0 \forall y \in H \Rightarrow T = 0$

2) $<Sx,x>=<Tx,x>\Rightarrow<(T-S)x,x>= 0 \Rightarrow S = T$.

Projets
1-Espace de Hilbert.
2-Opérateurs m-dissipatifs.
3-Applications.

Série $N^o 3$ Opérateurs non-bornés et adjoints

EX 01 Soient E, F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire non-borné avec $\overline{D(T)} = E$.
1/- Montrer que si $N(T^*) = R(T)^\perp$ et $N(T) \subset R(T^*)^\perp$: T^* adjoint de T.
2/On suppose que T est fermé, montrer que $N(T) = R(T^*)^\perp$. (On abordera directement ces questions sans chercher à reproduire la démonstertion du cours. Pour la question 2 on poura raisoner par l'absurde, considérer $x \in R(T^*)^\perp$ tel que $[x, 0] \notin G(T)$ graphe de T et appliquer Hahn-Banach).

EX 02 Soit f une foctionbmesurable bornée sur $\mathbb{R}$, u_0 un élément nonnul de $L^2(\mathbb{R})$, et T l'opérateur défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par :

$$D(T) = \{u \in L^2; \int |f(x)u(x)|dx < \infty\}$$

$$\forall u \in D(T), Tu = \langle u, f\rangle u_0, \text{ où } onnote \langle u, f\rangle \int f(x)u(x)dx.$$

Prouver que si $f \in L^2(\mathbb{R}), T$ est continuet calculer son adjoint.
Si f n'est pas de carré intégrable, prouver que T est à domaine dense et calculer son adjoint.

EX 03 Soit E un espace de Banach et $T : E \longrightarrow E'$ un opérateur linéaire non-borné avec $\overline{D(T)} = E$.
1/ On suppose qu'il existe une constante C telle que

$$\langle Tx, x\rangle \geq -C\|Tx\|^2, \ \forall x \in D(T). \tag{3.12}$$

Montrer que $N(T) \subset N(T^*)$.
2/ Invesement on suppose que $N(T) \subset N(T^*)$. Montrer que si T et $R(T)$ sont fermés, alors il existe $c > 0$ telle que l'on ait (4.3.2).

EX 04 Soit E un espace de Banach de dimension infinie. On fixe un élément $0 \neq a \in E$, ainsi q'une forme linéaire et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ non continue. On considère l'opérateur $TE \longrightarrow E$ défini par

$$Tx = x - f(x)a, \ \forall x \in E.$$

1/Déterminer $N(T)$ et $R(T)$.
2/$G(T)$ est-il fermé ?
3/ Déterminer T^* (préciser avecsoin $D(T^*)$.
4/Déterminer $N(T^*)$ et $R(T^*)$.
5/Comparer $N(T)$ et $R(T^*)^\perp$ ainsi que $N(T^*)$ et $R(T)^\perp$.
6/Confronter les résultats obtenus avec ceux de l'Ex 1.

EX 05soit $E = \ell^1$, de sorte que $E' = \ell^\infty$. On considère l'opérateur $T : D(T) \subset E \longrightarrow E$ non-borné défini par :

$$D(T) = \{u = (u_n) \in \ell^1; (nu_n) \in \ell^1 \quad \text{et} Tu = (nu_n)$$

1/Vérifier que $\overline{D(T)} = E$ et $\underline{\text{que } T}$ est fermé.
2/ Déterminer $D(T^*)$, T^* et $\overline{D(T^*)}$.

EX 06 Soit f une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}$, $0 \neq u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, et T un opérateur défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par :

$$D(T) = \{u \in L^2; \int |f(x)u(x)|dx < \infty\}; \ \forall u \in D(T), Tu = \langle u, f\rangle u_0,$$

où on note $\langle u, f\rangle = \int f(x)u(x)dx$.
1/Prouver que si $f \in L^2(\mathbb{R}), T$ est continu, et calculer son adjoint.
2/ Si $f \notin L^2(\mathbb{R}), T$, prouver que T est à domaine dense et calculer son adjoint.

EX 07 :1/Soit F une fonction réelle définie sur un espace mesuré $(X, d\mu)$, mesurable et finie p.p. Prouver que l'opérateur T_F défini dans $L^2(X, d\mu)$ par :

$$D(T) = \{u \in L^2(X, d\mu); Fu \in L^2\}; \ \forall u \in D(T), Tu = Fu,$$

est outo-adjoint.(utiliser la suite des fonctions χ_n indicatrice de l'ensemble $\{|F| \leq n\}$ et le théorème de convergence monotone). 2/soit Δ le laplacien de $\mathbb{R}^n$. prouver que $-\Delta$ est auto-adjoint sur le domaine $D = \{u \in$

$L^2(X,d\mu); \Delta u \in L^2\}$.($\Delta u$ calculé au sens des distrubutions).
Utiliser la trnsformation de Fourier et la question 1.

EX 08 Soit E, F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue.

1/a- Montrer que si $T(E)$ est dense dans F alors T^* (l'adjoint de T) est injective.

b- Réciproquement, montrer que si T^* est injective, alors $T(E)$ est dense dans F.

- Utiliser une conséquence du théorème de Hahn-Banach.
- Supposer que $T(E)$ n'est pas dense et utiliser le théorème de Hahn-Banach (directement).

2/ Donner un exemple dans lequel T^* est injective, mais T n'est pas surjective.

(Prendre par exemple : $E = L^2, F = L^1([0,1])$. On $E = \ell^1$, et $F = \ell^2$).

EX 09 On pose que $f \in L^2([0,1])$ (fonction réelle) et $x \in [0,1]$:

$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\, dt$

1/ Montrer que $T : f \longmapsto Tf(x)$ est une application linéaire continue de $L(L^2([0,1]))$.

2/ Calculer l'adjoint T^* de T.

EX 10 Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $T \in L(H)$, alors les propriétés suivantes sont ($\Leftrightarrow$).

i-T est inversible. i'- T^* est inversible.

ii- Il existe une constante $c > 0$ telle que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ et $\|T^*x\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in H$.

[Pour montrer $ii \Rightarrow i$ on montrera que $R(T)$ est à la fois fermé et dense dans H].

EX 11 1/ Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$. On note T^* l'adjoint de T. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i- $T^*T = Id_H$.

ii- $(Tx, Ty) = (x, y)$ pour tout $x, y \in H$.

iii- T est une isométrie.

2/ Soit $S : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ l'opérateur définie par : $S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$.

a- Montrer que S est une isométrie. b- Calculer $B = S^*$.

3/ Si T est une isométrie de l'espace de Hilbert H a -t-on $TT^* = Id_H$?.

Montrer que T est une isométrie surjective ssi T est unitaire.

Chapitre 4

Opérateurs compacts et théorie spectrale

4.1 Définitions et propriétés générales

Définition 4.1.1. *Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et soit $T \in L(E)$ (une application linéaire et continue de E dans lui même. On se propose d'étudier l'opérateur*

$$T_\lambda = \lambda I_E - T;\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

-On dit que λ est une **valeur régulière** *si T_λ est un isomorphisme de E sur E.*
-L'ensemble $\rho(T)$ des valeurs régulières est appelé **l'ensemble résolvant de** *T.*
-L'opérateur $R(\lambda;T) = (\lambda I_E - T)^{-1}$ s'appelle **la résovante** *si λ est une valeur régulière.*
-Le complémentaire $\sigma(T)$ de $\rho(T)$ s'appele le **spectre de** *T (i.e. T n'est pas une bijection).*
-Si T_λ n'est injectif, ondit que λ est une **valeur propre**. *Et -$KerT_\lambda = \{x \in E; \lambda x - Tx = 0\} \neq 0$: le sous-espace propre associe à la valeur propre λ.*

Remarque 4.1.1. *Lorsque E est de dimension finie, toute valeur spectrale est une valeur propre.($T \in L(E)$ est injectif ssi T est surjectif). Il n'en nest rien en dimension infinie ; un opérateur injectif n'est pas nécessairement surjectif.*

Exemple 4.1.1. *Soit E un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et soit $B\{e_i; i \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de E. On définit T par :*

$$Tx = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i e_{i+1} \ ; x = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i e_i \ \text{où } \xi_i = \langle x, e_i \rangle. \tag{4.1}$$

$T \in L(E)$ est injectif car $\|Tx\| = \|x\|$, mais n'est pas surjectif car $T(E) = e_0^{\perp}$. C'est à dire 0 est une valeur spectrale mais n'est pas une valeur propre.

Proposition 4.1.1. *Soit E un espace de Banach et $T \in L(E)$, l'ensemble résolvant $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{K}$ et le spectre $\sigma(T)$ est compact ; en outre lorsque ce spectre est non vide, le rayon spectral $r(T)$ de T satisfait :*

$$r(T) := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \leq \|T\|. \tag{4.2}$$

Preuve. L'application $\varphi : \lambda \in \mathbb{K} \mapsto T_\lambda \in L(E)$ est continue et $\rho(T)$ est l'image réciproque par φ de l'ensemble ouvert $L_r(E)$ (Corollaire 1.3.2), le spectre est donc fermé. D'autre part, si$|\lambda| > \|T\|$, on a $T_\lambda = \lambda(I_E - \lambda^{-1}T)$ où $\|\lambda^{-1}T\| < 1$ et le théorème 1.3.5 montre que $T_\lambda \in L_r$, ce qui prouve (4.2) et la proposition.

Définition 4.1.2. *Soit E, F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. On dit que T est compact si l'image par T de la boule unité B_E de E est relativement compacte dans F.*
-$\mathcal{K}(E, F)$ désigne l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F.

Autre définition équivalente

Définition 4.1.3. *De toute suite (x_n) de la boule unité $B(0, 1)$, on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) telle que la suite $T(x_{n_k})$ converge.*

Exemple 4.1.2. *1/Montrer que si dim $T(E) < +\infty$ (on dit que T est de rang fini), alors T est compact.*

2/ Montrer que si $k \in L^2([0, 1]^2)$, l'opérateur $T_k : L^2([0, 1]) \longrightarrow L^2([0, 1])$ défini par :

$$(T_k f)(x) = \int_0^1 k(x, y)\ f(y)\ dy.$$

est compact. (Utiliser le théorème d'Ascoli).

Proposition 4.1.2. *1) L'ensemble $\mathcal{K}(E,F)$ des opérateurs compacts $T : E \longrightarrow F$ est un s.e.v fermé de $L(E,F)$.*

2) Soit E,F,G des espaces de Banach, $S \in L(E,F)$, $T \in L(F,G)$, si l'un des applications S,T est compactes, l'application ToS est compacte.

3) Soit $T \in \mathcal{K}(E,F)$, E_o s.e fermé de E, et F_o s.e fermé de F contenant $T(E_o)$, alors l'application $T\mid_{E_o}: E_o \longrightarrow F_o$ est compacte.

Preuve.

1) Soit B la boule unité de E, si $T : E \longrightarrow F$ est une application compacte, $T(B)$ est relativement compact ce qui prouve que l'opérateur λT est compact ; pour tout scalaire λ ,$(\lambda T)(B) = \lambda T(B)$, est relativement compact. Si $S : E \longrightarrow F$ est une autre application compacte, l'inclusion $\overline{(S+T)(B)} \subset \overline{S(B)} + \overline{T(B)}$ montre $(S+T)(B)$ est relativement compact, ce qui prouve que $\forall S, T \in \mathcal{K}(E,F)$, $\forall \lambda, \beta$ deux scalaires : $\alpha S + \beta T$ est compact i.e $\mathcal{K}(E,F)$ est un s.e.v de $L(E,F)$.

Montrons que $\mathcal{K}(E,F)$ est fermé. Soit (T_n) une suite de $\mathcal{K}(E,F)$ converge dans $L(E,F)$, vers une application $T \in L(E,F)$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0\ \|T - T_n\| \leq \varepsilon;$$

$T_n(B)$ est relativement compact, donc pré-compact : Il existe une partie finie $A \subset F$ telle que $T_n(B) \subset \cup_{y\in A} B(y,\varepsilon)$. Il en résulte que $T(B) \subset \cup_{y\in A} B(y, 2\varepsilon)$ ce qui prouve que $T(B)$ est pré-compact, donc relativement compact (F est complet).

L'opérateur T est donc compact, ce qui prouve la résultat voulu.

2) Se vérifie aisément.

3) Si B est la boule unité de E, $B_o = B \cap E_o$ et la boule unité de E_o, on a alors :

$$(T\mid_{E_0})(B_o) = T(B \cap E_o) \subset T(B) \cap T(E_o) \subset T(B) \cap F_o \subset \overline{T(B)} \cap F_o.$$

Or $K = \overline{T(B)}$ est un compact de F.

Le sous-espace F_o étant fermé, $K \cap F_o$ est compact ceci prouve que : $(T\mid_{E_o} (B_o)$ est relativement compact.

Définition 4.1.4. *Un opérateur $T : E \longrightarrow F$ est dit de rang fini si l'image $T(E)$ est de dimension finie. Tout opérateur (continu) de rang fini est évidement compact.*

Toute limite d'opérateurs de rang fini est donc compacte.

La réciproque est en général dans les Banach est fausse. Toute fois la réponse est affirmative dans de nombreux cas ; par exemple si F est un espace de Hilbert.

Proposition 4.1.3. ***(Enflo-1972)***
Si F est un espace de Hilbert, le sous espace des opérateurs de rang fini est dense dans $\mathcal{K}(E, F)$.

Preuve. Soit B la boule unité de E et soit $\varepsilon > 0$; si $T : E \longrightarrow F$ est un opérateur compact, $T(B)$ est pré-compact : il existe une partie finie $A \subset F$ telle que :

$$T(B) \subset \cup_{y \in A} B(y, \varepsilon).$$

Soit $G = [A]$ est de dimension finie et soit P la projection orthogonale de F sur G. L'opérateur $PoT : E \longrightarrow F$ est de rang fini et pour tout $x \in B$ il existe $y \in A$ tel que $\|y - Tx\| \leq \varepsilon$, d'où $d(Tx, G) \leq \varepsilon$, c-à-d $\|Tx - P(Tx)\| \leq \varepsilon$ et ceci prouve que $\|T - PoT\| \leq \varepsilon$.

Théorème 4.1.1. ***(Riesz)*** *Soit E un e.v.n tel que B_E soit compact. Alors E est de dimension finie.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde. Si E est de dimension infinie, il existe une suite (E_n) de sous-espace de dimension finie tels que $E_{n-1} \underset{\neq}{\subset} E_n$. Grâce au lemme suivant on peut construire une suite (u_n) avec $u_n \in E_n$: $\|u_n\| = 1$ et $dist\ (u_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2}$.

En particulier $\|u_n - u_m\| \geq 1/2$ pour tout $m < n$. Donc la suite (u_n) n'admet pas une sous-suite convergente. Ce qui est contraire à l'hypothèse "B_E compact".

Lemme 4.1.1. ***(Riesz)*** *Soit E un e.v.n et soit $M \subset E$ un s.e fermé tel que $M \neq E$. Alors :*
$\forall \varepsilon > 0, \exists u \in E : \ \|u\| = 1,$ *et* $dist\ (u, M) \geq 1 - \varepsilon.$

Preuve.
Soit $v \in E$, avec $v \notin M$. Comme M est fermé alors $d = dis\ (v, M) > 0$.
On choisit $m_0 \in M$ tel que : $\quad d \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d}{1-\varepsilon}$,
Alors $u = \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|}$ répond à la question.
En effet si $m \in M$ on a : $\|u - m\| = \|\frac{v - (m_0 + \|v - m_0\| m)}{\|v - m_0\|} \geq 1 - \varepsilon$.
Puisque $m_0 + \|v - m_0\| m \in M$.

Corollaire 4.1.1. *Si $T \in \mathcal{K}(E)$, si E est de dimension infinie, 0 est une valeur spectrale.*

Remarque 4.1.2. *Si E est réflexif, alors B_E est faiblement compacte. Si $T : E \longrightarrow F$ est continue pour les normes, il est aussi continue pour les topologies faibles ;*

donc $T(B_E)$ est faiblement compact dans F , et par conséquent faiblement fermé ; Il est a fortiori fermé en norme. Dans ce cas, si T est compact, alors $T(B_E)$ est compact dans F.

Toutefois, si l'image de la boule B_E par T peut être fermé, il n'en va pas de même pour l'image de E tout entier, sauf cas très particulier :

Théorème 4.1.2. *Soit E, F des espaces de Banach, et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur compact. Alors l'image $(R(T)) = T(E)$ de E par T est fermée si et seulement si T est de rang fini.*

Preuve. Si $T(E)$ est fermé dans F, C'est un espace de Banach. Le théorème de l'application ouverte pour $T : E \longrightarrow R(T)$ s'applique : il existe un ouvert u, de $R(T)$, non vide , tel que $u \subseteq T(B_E)$.

Soit B une boule fermé, de rang> 0, de $R(T)$, continue dans u on a :

$B \subseteq u \subseteq T(B_E) \subseteq \overline{T(B_E)}$, qui est compact. Donc $R(T)$ est de dimension finie par le théorème de Riesz.

Théorème 4.1.3. ***(de Schauder)*** *Soit E,F des espaces de Banach, et $T \in L(E, F)$, alors T est un opérateur compact si et seulement si, T^* est un opérateur compact.*

Preuve. Supposons T compact et soit (y_n') une suite de la boule unité dans F^* : $\|y_n'\| \leq 1$.

Pour montrer que $T^*(B_F)$ est relativement compact, il suffit d'extraire de $T^*(y_n')$ une sous-suite convergente.

Prenons : $X = \overline{T(B_E)}$; c'est un espace métrique complet. Posons :

$$\begin{aligned} f_n : &X \longrightarrow \mathbb{K} \\ &y \longmapsto f_n(y) = \langle y_n', y\rangle_{F^*,F} \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{F} = \{f_n;\ n \geq 1\}$ est borné et est équi-continue car :
$\|f_n\|_\infty = \sup_{y\in X} |\langle y_n', y\rangle = \sup_{x\in B_E} |\langle y_n', Tx\rangle| \leq \|T\|$, et

$$|f_n(y_1) - f_n(y_2)| = |\langle y_n', y_1 - y_2\rangle| \leq \|y_n'\|\ \|y_1 - y_2\| \leq \|y_1 - y_2\|\ \ \forall n \geq 1.$$

Grâce au théorème d'Ascoli, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une sous-suite $(f_{nk})_{k\geq 1}$ convergente :

$\|f_{nk} - f\|_\infty \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Alors, pour tout $x \in B_E$:

$$\begin{aligned} \langle T^* y'_{nk}, x\rangle &= \langle y'_{nk}, Tx\rangle \\ &= f_{nk}(Tx) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f(Tx). \end{aligned}$$

Pour tout $x \in B_E, \psi(x) = lim_{k\to\infty}\langle T^* y'_{nk}, x\rangle$ existe donc ;

$\psi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est linéaire et $\psi\,|_{B_E} = foT$.

Comme $\|\psi(x)\| = lim_{k\to\infty}\|T^* y'_{nk}(x)\| \leq \|T^*\|\ \|y'_{nk}\|\ \|x\| \leq \|T\|\ \|x\|$

ψ est continue. Donc $\psi \subset E^*$. De plus :

$$\begin{aligned} \|T^* y'_{nk} - \psi\|_{E^*} &= \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T^* y'_{nk} - \psi, x\rangle| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1} |f_{nk}(Tx) - f(Tx)| \leq \|f_{nk} - f\|_\infty \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

2/ Si T^* est compact, alors, d'après 1) $T^{**} : E^{**} \longrightarrow F^{**}$ est compact, c-à-d $\overline{T^{**}(B_E)}$ est compact, mais puisque

$$T^{**}_{|_{E\subset E^{**}}} = T : \overline{T(B_E)} \subseteq \overline{T^{**}(B_E)} \subseteq \overline{T^{**}(B^{**}_E)}.$$

et donc aussi compact. Donc T est compact.

4.2 Analyse spectrale des opérateurs compacts dans un Banach

Soit E un espace de Banach. On note $\mathcal{K}(E, E)$ par $\mathcal{K}(E)$.

Le théorème suivant exprime qu'une "petite" perturbation (par un opérateur compact) de l'identité garde en mémoire certaines de ses propriétés :

Théorème 4.2.1. *(Alternative de Fredholm) Soit $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors :*

1/ $N(I - T)$ est de dimension finie.

2/ $R(I - T)$ est fermé et plus précisément $R(I - T) = N(I - T^*)^\perp$.

3/ $N(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I - T) = E$.

4/ dim $N(I - T) =$ dim $N(I - T^*)$.

Preuve. 1/ Soit $E_1 = N(I-T)$. Alors $B_{E_1} \subset T(B_E)$ et donc $B_{E_1} \subset \overline{T_L(B_E)}$ et donc B_{E_1} est compact d'après le théorème de Riesz E_1 est de dimension finie.

2/ Soit $f_n = u_n - Tu_n \longrightarrow f$. Il faut montrer que $f \in R(I-T)$. Posons $d_n = dist(u_n, N(I-T))$.

Il existe $v_n \in E_1$ tel $\|v_n - u_n\| \leq 2d_n$. (Lorsque $d_n = 0$, alors $u_n \in ker(I-T)$ qui est fermé, et $v_n = u_n$ convient).

On va montrer que $(d_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

Si ce n'étant pas le cas, en la remplaçant au besoin pour une sous-suite, on aurait, $0 < d_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Si l'on pose $z_n = \frac{u_n - v_n}{2d_n}$, on a $\|z_n\| \leq 1$. Donc puisque T est compact, on a , en remplaçant on besoin $(z_n)_{n\geq 1}$ par une sous-suite : $Tz_n \longrightarrow z \in E$. Mais alors : $u_n - Tu_n \longrightarrow u_0$,

on aurait :

$$\begin{aligned} z_n &= (I-T)|z_n| + Tz_n \\ &= \frac{1}{2d_n}(I-T)u_n + Tz_n \text{ car } \ v_n \in N(I-T) \\ &\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + z, \end{aligned}$$

car $d_n \to 0$ et $(I-T)u_n \to u_0$.

La continuité de T entraînent $Tz_n \to z$, on aurait donc, $Tz = z$ i.e $z \in N(I-T)$.

Mais, comme $\|\frac{u_n - v_n}{2d_n} - z\| = \|z_n - z\| \longrightarrow 0$.

On aurait, pour n assez grand, $\|z_n - z\| < 1/2$, soit : $\|u_n - v_n - 2d_n z\| < d_n$.

Ce qui contredirait la définition de d_n.

Donc $\|v_n - u_n\|$ est bornée. Alors, comme $v_n \in N(I-T)$, on a $(I-T)(u_n - v_n) \longrightarrow f$.

Comme T est compact, il existe une sous-suite $(u_{nk})_k \qquad Tu_{nk} \longrightarrow y \in E$ .Alors :

$u_{nk} = u_{nk} - T_{nk} + Tu_{nk} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f + y$.

Par continuité de T : $Tu_{nk} \longrightarrow T(f+y)$. Donc $T(f+y) = y$, et par conséquent :

$f = f + y - y = f + y - T(f+y) = (I-T)(f+y) \in R(I-T)$.

3/ Supposons que $(I-T)(E) = E_1 + E$ ($I-T$ n'est pas surjectif).

Posons, pour $n \geq 1$

$E_n = R((I-T)^n) = (I-T)^n(E)$, comme $E_{n+1} = (I-T)(E_n)$, on obtient par récurrence, $E_1 \subsetneq E_0 = E \qquad E_n \subset E_{n-1} \subset \cdots \quad \subset E_1 \subset E$.

D'autre part, comme $I-T$ est injectif est $E_1 \neq E$, on a par récurrence $E_{n+1} \neq E_n$.

Tous les E_n sont fermés par le 2), car

$$(I-T)^n = I + \sum_{k=1}^{n} C_n^k T^k = I - v, \quad \text{avec} \quad v \in \mathcal{K}(E).$$

On peut utiliser le lemme de Riesz : il existe $x_n \in E_n : \|x_n\| = 1$ tel que $dist(x_0, E) > 1/2$

Alors, pour $n > m$, on écrit :

$$Tx_n - Tx_m = x_n - x_m - [(I-T)(x_n - x_m)].$$

on a :

$$\begin{cases} x_n \in E_n \subseteq E_{m+1} \\ (I-T)(x_n) \in E_{n+1} \subseteq E_{m+1} \\ (I-T)x_m \in E_{m+1} \end{cases}$$

donc $x_n - (I-T)x_n + (I-T)x_m \in E_m + 1$, et par conséquent

$$\|Tx_n - Tx_m\| \geq dist(x_m, E_{m+1}) \geq 1/2$$

On ne peut donc extraire de $(Tx_n)_{n\geq 1}$ de sous-suite convergente. Il résulte que $T(B_E)$ n'est par relativement compacte. Donc $R(I-T) = E$

Inversement supposons que $R(I-T) = E$. Alors $N(I-T^*) = R(I-T)^{\perp} = \{0\}$. Puisque $T^* \in \mathcal{K}(E)$, on peut appliquer ce qui précède à T^* et conclure que $R(I-T^*) = E^*$, or $N(I-T) = R(I-T^*)^{\perp} = \{0\}$.

4/Soit $d = dim\ N(I-T)$ et $d^* = dim\ (I-T^*)$. On va d'abord montrer que $d^* \leq d$.

Supposons que $d < d^*$. Comme $N(I-T)$ est de dimension finie il admet un supplémentaire topologique dans E ; il existe donc un projecteur continu $P : E \longrightarrow N(I-T)$.D'autre part $R(I-T) = N(I-T^*)^{\perp}$ est de codimension d^* et par conséquent $R(I-T)$ admet (dans E) un supplémentaire topologique, noté F, de dimension d^*.

Comme $d < d^*$, il existe une application linéaire $\Lambda : N(I-T) \longrightarrow F$ injective et non surjective. Posons $S = T + \Lambda oP$; alors $S \in \mathcal{K}(E)$, puisque ΛoP est de rang fini.

Montrons que $N(I-S) = \{0\}$; En effet si $\mu - S\mu = (\mu - T\mu) - (\Lambda oP)(\mu) = 0$, alors

$$\mu - T\mu = 0 \quad \text{et} \quad \Lambda oP\mu = 0,$$

i.e $\mu \in N(I-T)$ et $\Lambda\mu = 0$; donc $\mu = 0$.

Appliquant 3) à l'opérateur S on voit que $R(I-S) = E$. Ceci est absurde puisqu'il existe $f \in F, f \notin R(\Lambda)$; l'équation $\mu - S\mu = f$ n'admet pas de solution (contradiction). Par conséquent on a prouvé que $d^* \leq d$. Appliquant ce résultat à T^* on voit que

$$dim\ N(I-T^{**}) \leq dim\ N(I-T^*) \leq dim\ (I-T).$$

or $N(I-T) \subset N(I-T^{**})$ ce qui permet de conclure $d = d^*$.

Corollaire 4.2.1. *Si $T \in \mathcal{K}(E)$, alors :*

-Soit l'équation $x - Tx = 0$ a une infinité de solutions.

-Soit pour tout $y \in E$, l'équation $x - Tx = y$ a une solution unique.

Théorème 4.2.2. ***(F.Riesz 1918)*** *Soit E un espace de Banach de dimension infinie, et $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors :*

1- $0 \in \sigma T$.

2- Toute valeur spectrale λ non nulle de T est une valeur propre de T :

$\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_P(T')$, et le sous-espace propre $E_\lambda = ker(\lambda I - T)$ associe à une valeur propre non nulle λ est de dimension finie.

3- $\sigma(T)$ est dénombrable, et s'il est infini, on peut indexer les éléments de $\sigma(T)\backslash\{0\}$ en une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ tendant vers 0.

Preuve. 1- On a $0 \in \sigma(T)$ car T n'est pas inversible, s'il l'était,

$I = T^{-1}oT$ serait compact, et $B_E = \overline{I(B_E)}$ serait compact, ce qui impliquerait $dim\ E < +\infty$.

2- Cela résulte du théorème précédent en prenant $S = \frac{1}{\lambda}T$,

car $\lambda I - T = -\lambda(I - S)$ est injectif si λ n'est pas une valeur propre, et est donc inversible.

3- On peut supposer le spectre infini. Il s'agit alors démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs spectrales λ telles que $|\lambda| \geq \varepsilon$. En effet, supposons le contraire ; il existe un $\varepsilon > 0$ et une infinité de $\lambda_n \in \sigma(T),\ n \geq 1$, distincts, tels que $|\lambda_n| \geq \varepsilon$.

Par le 2, les λ_n sont en fait des valeurs propres de T. Soit $\{e_n, n \geq 1\}$ des vecteurs propres associés, de norme 1. Comme les valeurs propres $\lambda_n, n \geq 1$ sont distinctes la famille $\{e_n;\ n \geq 1\}$ est libre.

Soit E_n les s.e.v engendré par $\{e_i, i = \overline{1,n}\}$ on a $E_{n-1} \subsetneq E_n$, comme E_{n-1} est de dimension finie, il est fermé, et donc d'après le lemme de Riesz il existe des $u_n, n \geq 1$ tels que : $\|u_n\| = 1,\ u_n \in E_n,\ dist\ (u_n, E_{n-1}) \geq 1/2$.

Mais $(S-\lambda I)(E_n) \subset E_{n-1}$ (car $Se_n = \lambda_n e_n$).
donc, $\forall n \geq m$:

$$\|S(\frac{u_n}{\lambda_n}) - S(\frac{u_m}{\lambda_m}\| = \|\frac{1}{\lambda_n}(Su_n - \lambda_n u_n) - \frac{1}{\lambda_m}(Su_m - \lambda_m u_m) + (u_n - u_m)\|$$
$$= \|u_n - v\|,$$

avec $v = u_m + \frac{1}{\lambda_m}(Su_m - \lambda_m u_m) - \frac{1}{\lambda_n}(Su_n - \lambda_n u_n) \in E_m + E_{m-1} + E_{n-1} \subseteq E_{n-1}$
de sorte que :

$$T(\frac{u_n}{\lambda_n} - T(\frac{u_m}{\lambda_m})\| \geq dist\ (u_n, E_{n-1}) \geq 1/2.$$

Comme $|\lambda_n| \geq \varepsilon$, la suite u_n/λ_n est bornée ; pourtant on ne peut extraire, par ce qui précède, de sous-suite convergente de $(T(u_n/\lambda_n)_{n\geq 1}$. Cela contredit la compacité de T et prouve le théorème.

Remarque 4.2.1. *Étant donnée une suite* (α_n) *qui tend vers* 0*, on peut construire un opérateur compact* T *tel que* $\sigma(T) = (\alpha_n) \cup \{0\}$*. Il suffit de considérer dans* $E = \ell^2$ *l'opérateur :* $T : u = (u_n)_n \longmapsto Tu = (\alpha_n u_n)_n$*. Noter que* T *est compact car il existe une suite* (T_n) *d'opérateurs de rang finis telle que* $\|T_n - T\| \longmapsto 0$ *sur cet exemple on voit aussi que* 0 *peut appartenir à* $VP(T)$*, dans ce cas il peut arriver que l'espace propre associé à* 0 *(*$N(T)$*), soit de dimension infinie.*

4.3 Analyse spectrale des opérateurs auto-adjoints dans un Hilbert

4.3.1 Spectre des opérateurs auto-adjoints

Soit $T : H \longrightarrow H$ un opérateur sur un espace de Hilbert H, et T^* son adjoint.

Il est clair que T^* est inversible ssi T l'est , et qu'alors on a :

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

Il en résulte que pour tout opérateur :$T : H \longrightarrow H$, on a :

$$\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda};\ \lambda(T)\}.$$

Car $T^* - \overline{\lambda} I$ est l'adjoint de $T - \lambda I$.

Théorème 4.3.1. *Si T est un opérateur auto-adjoint, son spectre $\sigma(T)$ est contenu dans $\mathbb{R}$. Plus précisément, si l'on pose :*

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Tx, x) \quad et \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x) \quad alors \quad \sigma(T) \subseteq [m, M].$$

Pour la démonstration de ce théorème nous avons besoin à la proposition suivante.

Proposition 4.3.1. *Un opérateur auto-adjoint T sur un espace de Hilbert est inversible si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que :*

$$\|Tx\| \geq c\|x\| \quad \forall x \in H. \tag{4.3}$$

Preuve. Il est clair que l'inversibilité entraîne (4.3), avec $c = 1/\|T^{-1}\|$. Inversement notons d'abord que la condition (4.3) entraîne l'injectivité de T. Si l'on montre que T est surjective, cela terminer a la preuve, grâce au théorème des isomorphismes.

Montrons que $\overline{T(H)} = H$, puisque $\overline{Im(T)} = (ker\ T^*)^\perp$ cela revient à dire que T^* est injectif, et que $T = T^*$. Il ne reste donc plus qu'à montrer que l'image de T est fermée.

Soit $y \in \overline{R(T)}$. Il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1} \subset H$ telle que $y = lim_{n\to+\infty} Tx_n$. La suite (Tx_n) est en particulier de Cauchy. Comme par (4.3)

$$\|x_n - x_k\| \leq \frac{1}{c}\|Tx_n - Tx_k\|.$$

La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy de H qui est complet donc cette suite converge.

Si $x = lim_{n\to+\infty} x_n$, la continuité de T nous donne $y = lim_{n\to+\infty} Tx_n = Tx$ i.e $T(E)$ est fermée.

Preuve.(du théorème 4.3.1)

1/ Soit $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ et supposons $\beta \neq 0$. On va montrer que :
$\|(T - \lambda I)x\| \geq |\beta|\ \|x\|\ \ \forall x \in H$,

ce qui impliquera grâce à la proposition 4.3.1, que λ n'est pas une valeur spectrale de T. Pour tout $x \in H$, on a :

$$(Tx - \lambda x, x) - (x, Tx - \lambda x) = 2iIm[(Tx, x) - \lambda\|x\|^2] = -2i\beta\|x\|^2.$$

Car $(Tx, x) \in \mathbb{R}$, puisque T est auto-adjoint. D'autre part

$$|(Tx-\lambda x,x)-(x,Tx-\lambda x)| \leq \quad |(Tx-\lambda x,x)|+|(x,Tx$$
$$= 2|(Tx-\lambda x,x)| \leq 2\|Tx-\lambda x\|\ \|x\|.$$

Ce qui donne $\|Tx-\lambda x\| \geq |\beta|\ \|x\|$.

2/ Comme on vient de voir que le spectre est réel, il s'agit maintenant de montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\lambda = m-\alpha \notin \sigma(T)$ (on montre de même, ou en remplaçant T par $-T$, que $M+\alpha \notin \sigma(T)$). Or, pour $\|x\| = 1$:

$$(Tx-\lambda x,x) = (Tx,x)-\lambda\|x\|^2 \geq m-\lambda = \alpha;$$

Comme $|(Tx-\lambda x,x)| \leq \|Tx-\lambda x\|\ \|x\| = \|Tx-\lambda x\|$, on obtient $\|Tx-\lambda x\| \geq \alpha$. Par homothécie, on a

$$\|Tx-\lambda x\| \geq \alpha\|x\| \quad \forall x \in H;$$

ce qui donne le résultat, au vu de la proposition 4.3.1.

Théorème 4.3.2. *Soit T un opérateur sur un espace de Hilbert H. Alors les valeurs $m = \inf_{\|x\|=1}(Tx,x)$ et $M = \sup_{\|x\|=1}(Tx,x)$ sont dans le spectre de T.*

Preuve. Il suffit de montrer que $M \in \sigma(T)$ (la preuve de $m \in \sigma(T)$ étant analogue ; de façon alternative, on peut aussi remplacer T par $-T$).

La forme $a(u,v) = (Mu-Tu,v)$ est bilinéaire, symétrique et $a(v,v) \geq 0 \quad \forall v \in H$.

Appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz à la forme $a(u,v)$ il vient

$$|(Mu-Tu,v)| \leq (Mu-Tu,u)^{1/2}(Mv-Tv,v)^{1/2} \quad \forall u,v \in H.$$

D'où il résulte en particulier que :

$$|Mu-Tu| \leq c(Mu-Tu,u)^{1/2} \quad \forall u \in H.$$

Soit $(u_n)_n : \|u_n\| = 1$ et $(tu_n,u_n) \longrightarrow M$, grâce à (4.3.1) on voit que $|Mu_n-Tu_n| \longrightarrow 0$, et $M \in \sigma(T)$ (car si $M \in \rho(T)$, alors $u_n = (MI-T)^{-1}(Mu_n-Tu_n) \longrightarrow 0$.

Corollaire 4.3.1. *Le spectre d'un opérateur auto-adjoint sur un Hilbert n'est jamais vide.*

Corollaire 4.3.2. *Pour tout opérateur T auto-adjoint sur un Hilbert, son rayon spectral est égal à sa norme : $r(T) = \|T\|$.*

Corollaire 4.3.3. *Soit $T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint tel que $\sigma(T) = 0$. Alors $T \equiv 0$.*

4.3.2 Décomposition spectrales des opérateurs auto-adjoints compacts

Proposition 4.3.2. *Tout opérateur auto-adjoint compact sur un espace de Hilbert non réduit à $\{0\}$, possède au moins une valeur propre.*

Remarque 4.3.1. *Si T est auto-adjoint, son spectre n'est pas vide, mais sous l'hypothèse de compacité on ne peut affirmer l'existence de valeur propre. En effet, l'opérateur :*

$T : L^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$ défini par $Tf(x) = xf(x)$ est auto-adjoint mais n'a pas de valeur propre.

Lemme 4.3.1. *Soit T un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert.*

1- Les sous-espace propres de T correspondant à des valeurs propres distincts sont orthogonaux.

2- Si F est un sous-espace invariant par T, alors, $F^\perp$ est aussi invariant par T et $\sigma(T) = \sigma(T_{|_F}) \cup \sigma(T_{|_{F^\perp}})$.

Preuve. 1/ Si λ_1 et λ_2 sont 2 valeurs propres distincts de T, et x et x' deux vecteurs propres associés, [rappelons $\lambda_i \in \mathbb{R}$].

On a : $\lambda(x,x') = (\lambda_1 x, x') = (Tx, x') = (x, Tx') = (x, \lambda_2 x') = \lambda_2(x,x') \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(x,x') = 0$.

Donc $(x,x') = 0$.

2/ Soit $y \in F^\perp$. Pour tout $x \in F$, on a $(Ty, x) = 0$ puisque $Tx \in F; \Rightarrow Ty \in F^\perp$.

Il est clair que $T_{|_F}$ et $T_{|_{F^\perp}}$ sont aussi auto-adjoints (sur F et $F^\perp$ respectivement).

Si $\lambda \in \sigma(T_{|_F})$, on a par la proposition 4.3.1 :

$$\inf_{x \in H : \|x\|=1} \|T - \lambda I_H\| \leq \inf_{x \in F \ \|x\|=1} \|T - \lambda I_F\|;$$

donc

$$\inf_{\|x\|=1 \ x \in H} \|T - \lambda I_H\| = 0$$

et $\lambda \in \sigma(T)$. De même $\sigma(T)_{F^\perp} \subseteq \sigma(T)$.

Soit maintenant $\lambda \notin \sigma(T_{|_F}) \cup \sigma(T_{|_{F^\perp}})$. Il existe alors, toujours par la proposition 4.3.1 une constante $c > 0$ telle que $\|Ty - \lambda y\| \geq c\|y\|$ pour tout $y \in F$ et $\|Tz - \lambda z\| \geq c\|z\|$.

Pour tout $z \in F^{\perp}$, or tout $x \in H$ s'écrit $x = y + z \quad y \in F, \quad z \in F^{\perp}$. Comme $Ty - \lambda y \in F$ et $Tz - \lambda z \in F^{\perp}$ sont orthogonaux, on obtient :

$$\begin{aligned}\|Tx - \lambda x\|^2 = \|Ty - \lambda y + Tz - \lambda z\|^2 &= \|Ty - \lambda y\|^2 + \|Tz - \lambda z\|^2 \\ \geq c^2\|y\|^2 + c^2\|z\|^2 &= c^2\|x\|^2,\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\lambda \notin \sigma(T)$.

Théorème 4.3.3. *Soit T un opérateur auto-adjoint et compact sur un espace de Hilbert séparable H non réduit à $\{0\}$. Alors il existe une base hilbertienne $B = \{e_i \; i \geq 1\}$ de H fermée de vecteurs propres de T et l'on a , pour tout $x \in H$:*

$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n$ où les λ_n est le vecteur propre associé à e_n.

Preuve. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite des valeurs propres distinctes de T, excepté 0 ; on note $\lambda_0 = 0$. On pose $E_0 = ker(T)$ et $E_n = ker(T - \lambda_n I)$; rappelons que : $0 \leq dim\ E_0 \leq \infty$ et que $0 < dim\ E_n < +\infty$.

Montrons d'abord que H est somme hilbertienne des $(E_n)_{n\geq 0}$:

Comme les $(E_n)_{n\geq 0}$ sont deux à deux orthogonaux.

Soit F l'espace vectoriel engendré par les $(E_n)_{n\geq 0}$. Vérifions que F est dense dans H.

Il est clair que $T(E) \subset F$. Il s'en suit $T(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$: L'opérateur $T_0 = T_{|_{F^{\perp}}}$ est auto-adjoint compact. D'autre part $\sigma(T_0) = \{0\}$; en effet si :

$\lambda \in \sigma(T_0) \backslash \{0\}$ alors $\lambda \in VP(T_o)$,

et donc il existe $\mu \in F^{\perp}, \mu \notin 0$ tel que $To\mu = \lambda\mu$. Par conséquent λ est l'une des valeurs propres (λ_n) de T et $\mu \in F^{\perp} \cap E_n$. Donc $\mu = 0$ ce qui est absurde.

Il résulte du corollaire 4.3.3 que $T_0 = 0$; par suite $F^{\perp} \subset ker(T) \subset F$ et $F^{\perp} = \{0\} \Rightarrow \overline{F} = H$. donc F est dense dans H.

Enfin on choisit dans chaque E_n une base Hilbertienne. La réunion de ces bases est une base Hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T.

Pour finir, notons $e_n \quad n \geq 1$, les éléments de la base B, et λ_n la valeur propre associé à e_n. Comme $|\lambda_n| \leq r(T) = \|T\|$ pour tout $n \geq 1$, l'opérateur $U : H \longrightarrow H$ défini par $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n$ est bien défini (car $\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 < +\infty$).

entraîne $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \; |(x, e_n)|^2 \leq \|T\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x, e_n)|^2 = \|T\|^2 \|x\|^2$.

Comme $U(e_n) = \lambda_n e_n = T(e_n)$ pour tout $n \geq 1$, on $U = T$.

Projets

1-Espaces compacts.

2-Opérateurs de Fredholm.
3-Opérateurs de Hilbert-Smidt.
4-Aplications.

Série $N^o 4$

EX1(Compact non vide arbitraire 0 comme spectre)

1/Soit $(c_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de nombres complexes, et $T : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ l'opérateur définie par $T(x) = (c_n x_n)_{n\geq 1}$, pour tout $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell_2$.

a- Montrer que chaque $c_n, n \geq 1$ est une valeur propre de T.

b- Montrer que si $\lambda \notin \overline{\{c_n,\ n \geq 1\}}$, alors $\lambda \notin \sigma(T)$.

c- En déduire le spectre $(\sigma(T))$ de T.

2/ Soit K une partie compacte non vide de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un opérateur $T \in L(\ell_2)$ tel que $\sigma(T) = k$.

EX2 Soit E un espace de Banach, $T_n \in \mathcal{K}(E)$ une d'opérateurs compacts convergeant vers $T \in \mathcal{K}(E)$ dans l'espace de Banach $L(E)$ et $\lambda_n \in \sigma(T_n)$. Montrer que toute valeur d'adhérence de la suite (λ_n) appartient au spectre de T.

EX3 Soit $k : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$, on définit :

$$(Tf)(x) = \int_0^x k(x,t)\ f(t)\ dt,$$

1/ Montrer que , pour tous $x, x' \in [0,1]$; on a :

$$|(Tf)(x) - Tf(x')| \leq (\|k\|_\infty |x - x'| + \sup_{0\leq t\leq 1} |k(x',t) - k(x',t)|)\ \|f\|_\infty;$$

En déduire que $Tf \in \mathcal{C}([0,1])$, puis que $T : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1])$ est un opérateur compact,(utiliser le Th d'Ascoli).

2/ Montrer que $|(T^n f)(x)| \leq \|f\|\ \|k\|_\infty^n \frac{x^n}{n!}$ pour tout $x \in [0,1]$ et en déduire le rayon spectral de T. [On pourra utiliser que $n! \geq k^{n-k} \quad \forall n \geq k$ pour montrer que $(n!)^{\frac{1}{n}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$].

3/ En déduire le spectre de T.

EX4 Montrer que tout opérateur compact $T : E \longrightarrow F$, avec $F = \quad 1 \leq p < \infty$, ou $F = C_0$, est limite d'opérateur de rang fini. [Sachant que $(e_n)_{n\geq 1}$ la base canonique de F : $\quad e_n = \delta_{n,k} \quad$ où :]

$$\delta_{n,k} \begin{cases} 1 \text{ si } n = k, \\ 0 \text{ si } k \neq n. \end{cases}$$

EX5 Soit un espace de Banach et $T \in L(E)$,

1/ Montrer que l'application $\lambda \in \varphi(T) \longmapsto R(\lambda, T) \in L(E)$ est continue.

2/ Soit $T_n \in L(E)$ une suite d'opérateur convergeant vers $T \in L(E)$ dans l'espace de Banach $L(E)$. Montrer que pour tout compact $k \subset \varphi(T)$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \subset \varphi(T_n) \quad \forall n \geq n_0$, et que la suite de fonctions $R(.; T_n) : k \longrightarrow L(E) \qquad n \geq n_0$. converge uniformément vers $k(.; T)$.

EX6 Soit E, F deux espaces de Banach, et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

1/ Si T est compact, montrer que, pour toute suite (x_n) de E faiblement convergente vers 0, la suite (Tx_n) converge fortement vers 0.

[Aide :1- En utilisant le Th.B.Steinhauss. Montrer que : si $(x_n) \subset E$ (Banach) : $x_n \xrightarrow{w} x$ donc (x_n) bornée et on a $\|x\| \leq lim\ \inf_n \|x_n\|$.
On définit :

x$_n : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$
$\varphi \longmapsto \widetilde{x}_n(\varphi) = \varphi(x_n)$

on a

$$\widetilde{x}_n(\varphi) = \varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x) = \widetilde{x}(\varphi),$$

et

$$\|\widetilde{x}_n\| = \|x_n\|,\ \|\widetilde{x}\| = \|x\|$$

2- E réflexif $\Leftrightarrow B_E = B(0, 1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est faiblement compact (compact pour $\sigma(E, E')$). La boule $B_E = \{f \in E' \quad \|f\| \leq 1\}$ est $* - \sigma(E', E)$ compact.]

2/ Montrer que la réciproque est vraie si E est réflexif.

EX7 On considère un espace de Hilbert E admettant une base hilbertienne dénombrable $\{e_n;\ n \geq 0\}$, un espace de Banach F et une application linéaire continue : $T : E \longrightarrow F$ tels que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|$ soit convergente. Montrer alors que T est un opérateur compact [utiliser l'exercice précédent : si (x_j) est une suite de E convergent faiblement vers 0, on pourra écrire pour $p \in \mathbb{N}$.

$$Tx_j = \sum_{n=0}^{n}(x_j, e_n)te_n + \sum_{n=p+1}^{\infty}(x_j, e_n)Te_n$$

et majorer le dernier terme grâce à l'inégalité de Cauchy-schwartz.]

EX8 Soient $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ tels que $1/r = 1/p + 1/q, y \in \ell^q(N, \mathbb{K})$ et : $T : \ell^p(N, \mathbb{K}) \longrightarrow \ell^p(N, \mathbb{K})$,

L'application linéaire continue $x \longmapsto xy$. montrer que T est un op compact, ssi $lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ (condition vérifiée si q est fini).

[Pour démontrer la condition nécessaire lorsque $q = +\infty$, utiliser l'alternative de Fredholm ; pour la condition suffisante vérifier que T est la limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.

EX9(shift and Back-word shift) : On considère l'espace $\ell^2 |_{\mathbb{C}}$ et B et S deux opérateurs $\ell^2 \longrightarrow \ell^2$ définis par

$B(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$ appelé le back word shift (décalage à gauche)

$S(x_1, x_2, ...) = (0, x_2, ...)$ appelé shift (décalage à droite)

1^o a- Montrer que tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$ est valeur propre de B.

b- Déterminer $\sigma(B)$ on pourra remarquer que $\|B\| = 1$.

2^o Montrer que S ne possède aucune valeur propre (on pourra distinguer les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$).

3^o Soit H un espace de Hilbert. Montrer que pour tout opérateur

$T : H \longrightarrow H$, on a $\sigma(T^*) = \sigma(T)$, T^* étant l'adjoint de T, et

$\widetilde{A} = \{\overline{z}; z \in A\}$ pour $A \subseteq \mathbb{C}$

4^o Montrer que le spectre de S est le disque unité fermé.

Université Larbi Ben M'hidi- Oum El Boughi
Faculté des SE et des SNV

Département de MI — $3^{-ime} Anne Licence$
Module ITOL — Le 21/05/2017 (1h30m)

Contrôle TD S6

EX 1 : Soit H un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{C}$, et $T_n; n \geq 1$ des applications linéaires sur H vérifient :

$$\forall x \in H \text{ on a } \langle T_n x, x\rangle \geq 0.$$

(i)- Montrer $T_n, n \geq 1$ est bornée sur la boule unité.
(ii)- Soit $Tx = \lim_{n\to} T_n x$. Montrer que T est continue et qu'il existe $c > 0$: que $\|T\| \leq c$ (utiliser le Th de Banach-Stienhauss).
(ii)- Soit T^* l'adjoint de T. Montrer que T est auto-adjoint.
Aide : Poser $f(x, y) = \langle Tx, y\rangle$, et montrer :
a- f hermétienne si et seulement si (ssi) $T = T^*$.
b-$\langle Tx, x\rangle \geq 0$ implique f hermétienne.

EX 2 : Soint E, F deux espaces de Banach et soient $T \in L(E, F)$ et T^* son adjoint.
(i)- Montrer que $T(E)$ est dense dans F ssi T^* injective.
(ii)-Si T^* est injective a-t-on T surjective ?
(ii)-Montrer que si E ou F est de dimension finie alors T est injective (T^* injective) ssi T^* surjective (T surjective).

EX 3 : Soit H un espace de Hilbert sur le coprs $\mathbb{R}$. Soient $T \in L(H)$ et T^* son adjoint. 1/ Montrer que les assertions suivantes sont equivalentes.
(i)-T est unitaire (i') T^* unitiare. (ii)-T et T^* sont isométries.
2/-Si une seulement T (ou T^*) est isométrie a-t-on T est unitaire ?
3/-Montrer que T est isométrie et surjective ssi T est unitaire.

Bonne Chance.

Université Larbi Ben M'hidi- Oum El Boughi
Faculté des SE et des SNV

Département de MI $3^{-ime}AnneLicence$
Module ITOL Le 31/05/2017 (1h30m)

Contrôle S 6

EX 1(7pts) : Soit $E_i : i = \overline{1.3}$ des espaces de Banach, et $T : E_1 \times E_2 \to E_3$ une application bilinéaire.
1- Montrer T est continue si et seulement si (ssi) il existe une constante $C > 0 : \|T(x,y)\| \leq C\|x\|\|y\| \ \forall (x,y) \in E_1 \times E_2$.
2- On suppose que T est séparément continue, i.e : $\forall x \in E_1$, l'application $T_x : y \in E_2 \mapsto T_x(y) = T(x,y)$ est continue, et $\forall y \in E_2$, l'application $T_y : x \in E_1 \mapsto T_y(x) = T(x,y)$ est continue.
(a)-Montrer que T est continue en utilisant le Th de Banach Steinhauss.
(b)-Montrer que la famille d'applications linéaires continues $\big(\psi(T_x)\big)_{\psi,x}$ pour $\psi \in E_3^* : \|\psi\| \leq 1, x \in E_1 : \|x\| \leq 1$ est uniformément bornées. En déduire que T est continue (utiliser un corollaire de Th de Hahn-Banach).

EX 2 (7pts) : Soint E, F deux espaces de Hilbert et soit $T \in L(E,F)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
(1)-T est unitaire.
(2)-Il existe une base hilbertiènne $(e_i : i \in I)$ de E telle que $(Te_i : i \in I)$ de F.
(3)-T est surjective et isométrie.
(4)-T est surjective et $T^*T = Id_E$ où T^* est l'adjoint de T.

EX 3(6pts) :1- Soit $x \in \ell^1$, et soit $T_x : \big(\ell^\infty, \|.\|_\infty\big) \to \mathbb{K} : y \mapsto T_x(y) = \sum_{i=1}^\infty x_i y_i$. Montrer que T_x est une forme linéaire sur ℓ^∞ teq : $\|T_x\| = \|x\|_{\ell^1}$.
2- On note T_x la restriction de T_x à $\mathcal{C}_0$ et considérons l'application suivante : $T : \big(\ell^1, \|.\|_1\big) \to \big(\mathcal{C}_0^*, \|.\|\big) : x \mapsto T_x$. Montrer que T est une isomorphisme isométrique de ℓ^1 sur $\mathcal{C}_0^*$.
(3)-Montrer l'existence d'une $0 \neq f_0 \in (\ell^\infty)^* : \ f|_{\mathcal{C}_0 \equiv 0}$. En déduire que ℓ^1 n'est pas réflexif.
EX Bonus 2pts : Soint E, F deux espaces de Hilbert et soit $B \in \mathcal{K}(E,F)$.Montrer que $R(B)$ est fermé ssi B est de rang fini.

Bonne Chance.

Université Larbi Ben M'hidi- Oum El Boughi
Faculté des SE et des SNV

Département de MI — $3^{-ime} AnneLicence$
Module ITOL — Le 21/06/2017 (1h30m)

Contrôle de rattrapage S6

EX1 (12 pts) : Soint $E = L^2(\mathbb{R})$ sur le corps $\mathbb{R}$, et soit $A : E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}} Af(t).f(t)dt \geq 0.$$

1-Montrer que A est continu.
2-Soit $\psi : A \in L(E) \mapsto A^*$, où A^* est l'adjoint de A. Montrer que ψ est une isométrie.
3-Montrer que : $\sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{\|y\|\leq 1} \int_{\mathbb{R}} Ax(t).y(t)dt = \sup_{\|y\|\leq 1} \sup_{\|x\|\leq 1} \int_{\mathbb{R}} Ax(t).y(t)dt.$
4-Montrer que : $\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \int_{\mathbb{R}} Ax(t).x(t)dt.$
5-Montrer que : A est auto-adjoint.
6-On suppose que $A \in \mathcal{K}(E)$, montrer que :
(a)-Les valeures propres sont positives ou nulles.
(b)-0 ne peut pas être une valeure régulière.

EX2 (4.5pts) : Soint E, F deux espaces de Hilbert et soit $T \in L(E, F)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
(1)-T^* est unitaire.
(2)-Il existe une base hilbertiènne $(e_i)_I$ de E telle que $(Te_i)_I$ une base de F.
(3)-T est une isométrie et il existe $c > 0$: $\|T^*x\| \geq c\|x\|$.

EX3 (3.5 pts) : Soint E, F deux espaces de Hilbert et soit $f \in L(E, F)$ où f^* son adjoint.
1-Montrer que $Im(f)^{\perp} = \{0\}$ ssi $Ker(f^*) = \{0\}$ où $Im(f)$ est l'image de f.
2-Si $Ker(f^*) = 0$ a-t-on $Im(f) = F$? $(\ell^1 \to \ell^2)$.
3-Montrer que si $f \in L(E, \mathbb{R}^2)$, alors $Ker(f^*) = \{0\}$ ssi $Im(f) = \mathbb{R}^2$.

N.B : ssi signifie si et seulement si.
Presque toutes les questions ne demandent que des définitions.

Bonne Chance.

Bibliographie

[1] H.Brezis, Analyse Fonctionnelle ;Théorie et Applications. MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo, 1983.

[2] C.Wagschal, Topologie et Analyse foncfionnelle, Herbenan editions, Paris, 2012

[3] Daniel Lie, Cours d'analyse fonctionnelle, Ellipes, 2013.

[4] R.Dautray et J.L.Lions, analyse mathématique et calcul numérique, V4 (méthodes Variationnelles), Masson, 1988.

[5] R.Dautray et J.L.Lions, analyse mathématique et calcul numérique, V5, (Spectre des opérateurs), Masson, 1988.

[6] J.Charles, M.bekhta, H. Queffélec, Analyse Fonctionnelle et Théorie des opérateurs,

[7] N.El Hage Hassan, Topologie Générale et Espaces Normés, Dunod, 2011.

[8] Pièrre.Lévy Pruhl, Introduction à la théorie spéctrale, Dunod, 2003.

[9] W.Rudin, Analyse Réelle et Complexe, Masson,1975.

[10] A.L.Brown, A.Page, Elements of functional Analysis, Van Norstrad Reinhold, 1970.

[11] Barbara D.MacCluer, Functional Analysis, springer (2000).

[12] C.Kubrusly, Elements of Operators Theory, Birkhäuser, 1947.

[13] F. takyuki, Invitation to Linear Operators, Taylor and Francis, 2001.

[14] John B.Conway, A course in Functional Analysis, springer, 1985.

[15] R.E. Edwards, Functional Analysis : theory and Applications, Holt Rinhartand Winston, 1965.

[16] T. Kato, Pertirbation Theory for linear Operators, Springer, 1980.

[17] W.Rudin, Functional Analysis, 2^{nd} edition, internatinal series in pure and aplied mathematics, Mcgaw-Hill 1991.