طريقة السمبلكس (Simplexe) في حل مسائل البرمجة الخطية

تمهيد: أحيانا يتعذر استخدام الطريقة البيانية في حل مسائل البرمجة الخطية لوجود عوائق تحول دون ذلك، كاقتصار هذه الطريقة على البرامج الخطية المتضمنة لمتغيرين فقط، كما أنه في بعض البرامج تكون إشارات القيود مختلفة مما يؤثر في تحديد منطقة الحلول الممكنة، وفي بعض البرامج تكون القيود كثيرة مما يُعقد من تحديد منطقة الحل... هذه الأسباب وغيرها دفعت الباحثين لوضع طرق أخرى لحل مسائل البرمجة الخطية، فجاءت طريقة السمبلكس (Simplexe) والتي تعتبر من أهم إنجازات القرن السابق.

1. **مفهوم طريقة السمبلكس (Simplexe) أو طريقة Dantzig**: هذا الأسلوب قدمه العالم الأمريكي G.B. Dantzig سنة 1947 لكنه لم يظهر إلا سنة 1951،[1] ويقوم على مجموعة من الخطوات الجبرية التي تؤدي إلى الوصول للحل الأمثل –عند حالة وجوده- في عدة مراحل متتابعة ومحددة. فمن خلال هذه الطريقة يتم اجراء عدد محدد من العمليات الحسابية باستخدام منهجية محددة واعتمادا على جداول ملخصة للمعطيات المقابلة لمسألة البرمجة الخطية محل الدراسة، تسمى **جداول السمبلكس**، ويتم في نهاية كل مرحلة من مراحل الحسابات اجراء اختبار للحل الناتج عنها.[2]
2. **الخطوات الأساسية لطريقة السمبلكس**: تُبنى طريقة السمبلكس على مجموعة من الخطوات التي يجب اتباعها في حل مسائل البرمجة الخطية.

- تحويل مسألة البرمجة الخطية من الصورة العادية إلى الصيغة القياسية. [3]
- إعداد جدول الحل الابتدائي أو الأولي؛ حيث يتصف هذا الحل الأولي بأن قيم جميع المتغيرات الأساسية (تسمى أيضا بالمتغيرات الحقيقية وهي المتغيرات التي تؤثر على دالة الهدف) مساوية للصفر وينتج عنه قيمة لدالة الهدف تساوي الصفر أيضا. [4]
- اختبار أمثلية الحل الأولي المتحصل عليه.

---

[1] قام العالم الأمريكي G.B. Dantzig بوضع طريقة السمبلكس في كتابه: Maximisation of a Linear Function of variables Subject to Linear Inequalities. Activity Analysis of Production and Allocation, T.C. Koopmans ed., New York, Wiley, 1951.

[2] رجال، السعدي. (2005). **بحوث العمليات في الإدارة –المالية –التجارة**،_الجزائر، منشورات جامعة منتوري قسنطينة، ص 16

[3] الأسطل، رند عمران مصطفى. (2016). **بحوث العمليات والأساليب الكمية في صنع القرارات الإدارية (نسخة متطورة مزودة بالأمثلة التطبيقية الشاملة)**، الطبعة السادسة، فلسطين، كلية ادراة المال والأعمال، جامعة فلسطين، ص 131

[4] العامري، صالح مهدي محسن، والحداد، عواطف إبراهيم. (2009). **تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة**، الأردن، اثراء للنشر والتوزيع، ص 149

- القيام بتحسين الحل المتحصل عليه في حالة كونه حلا غير أمثل.
- الوصول إلى الحل الأمثل والقيام بتفسيره.[5]

3. **الصيغة القياسية للبرنامج الخطي:**[6] القصد هنا هو القيام بعملية تحويل، حيث أن الصيغة القياسية هي اضافة متغيرات غير سالبة على الصيغة العامة للبرنامج الخطي أو حذفها بالاعتماد على اشارة المتراجحة حيث يصبح البرنامج الخطي كما يلي:

$$Min\ or\ Max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$$

$$Sobject\ to:$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{m+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{m+2} = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{m+n} = b_{2m} \\ x_1, x_2, \dots, x_n, x_{m+1}, \dots, x_{m+n} \geq 0 \end{cases}$$

يمثل الحل الأولي أو الابتدائي ذلك الحل الذي يبدأ من نقطة الأصل، وعليه ينتج هذا الحل عندما تكون قيم المتغيرات:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_n = 0$$

وبالتالي ينتج لنا:

$$x_{m+1} = b_1, x_{m+2} = b_2, x_{m+n} = b_m$$

ان عملية التحويل هذه يُراد منها تحويل المتغيرات:

$$x_1, x_2, x_n$$

أي متغيرات أساسية، أما باقي المتغيرات فتسمى بالمتغيرات غير الأساسية أي:

$$x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+n}$$

---

[5] موفق، عبد القادر، (2016)، **محاضرات في رياضيات المؤسسة (البرمجة الخطية)**، مطبوعة جامعية، جامعة باتنة، ص 44

[6] حسن، باسم عباس. (2011)، **طريقة مقترحة لحل مسائل البرمجة الخطية متعددة الأهداف**، العراق، مجلة تكريت للعلوم الصرفة، المجلد 03، العدد 16، ص 255

إضافة إلى ما سبق ذكره، يرجع سبب كتابة البرنامج الخطي على الصيغة القياسية لكون طريقة السمبلكس في الحل تفترض أن قيم المتغيرات موجبة أو معدومة (تحقيق شرط عدم السلبية)، وبالتالي تحويل القيود من متراجحات على اختلاف اشاراتها (≥، ≤، =) إلى معادلات مع القيام بإجراء تعديلات على القيود حسب اشارته، وعليه: [7]

- إذا كانت إشارة القيد من الشكل (=) فهذا القيد يبقى على حاله.
- إذا كانت إشارة القيد من الشكل (≤) فهذا يعني أن الجانب الأيسر من المتراجحة هو أقل من الجانب الأيمن (الثوابت)، وهنا وجب علينا إضافة متغير بإشارة موجبة إلى الجانب الأيسر تساوي الفرق بين الجانبين.
- أما إذا كان القيد من الشكل (≥) فهذا معناه أن الجانب الأيمن من القيد هو أقل من الجانب الأيسر، وعليه يجب علينا ادخال متغير وذلك بطرحه من الجانب الأيسر للقيد.

في الأخير يجدر التنويه إلى أن دالة الهدف بالشكل القياسي يجب التعامل معها مثل أي قيد، حيث يتم نقل كل المتغيرات إلى الجانب الأيسر، حيث يبقى في الجانب الأيمن رقم ثابت يكون بشكل عام صفرا.

4. **المقارنة بين الطريقة البيانية وطريقة السمبلكس (Simplex) في حل مسائل البرمجة الخطية:** هناك العديد من أوجه المقارنة بين الطريقة البيانية وطريقة السمبلكس نلخصها في النقاط التالية.

- يتم استخدام الطريقة بيانية في حل مسائل البرمجة الخطية التي تحتوي على متغيرين للقرار فقط، أما طريقة الـ Simplex فيتم استخدامها مهما كان عدد المتغيرات في البرنامج الخطي؛
- في الطريقة البيانية يُفترض أن تكون المتراجحات (المتباينات) معادلات وذلك من أجل تسهيل رسم الخطوط البيانية، بينما في طريقة السمبلكس يتبع تحويل المتباينات إلى معادلات باتباع القاعدة التالية: إذا كان القيد من الشكل (≤) يتم إضافة متغير فرق أما إذا كان القيد من الشكل (≥) يتم طرح متغير الفائض.
- في طريقة الحل البياني وفي مسألة التعظيم يتم تحريك الخط المعبر عن دالة الهدف بداية من نقطة الأصل إلى أبعد نقطة، أما في مسائل التدنئة يتم تحريك خط دالة الهدف في

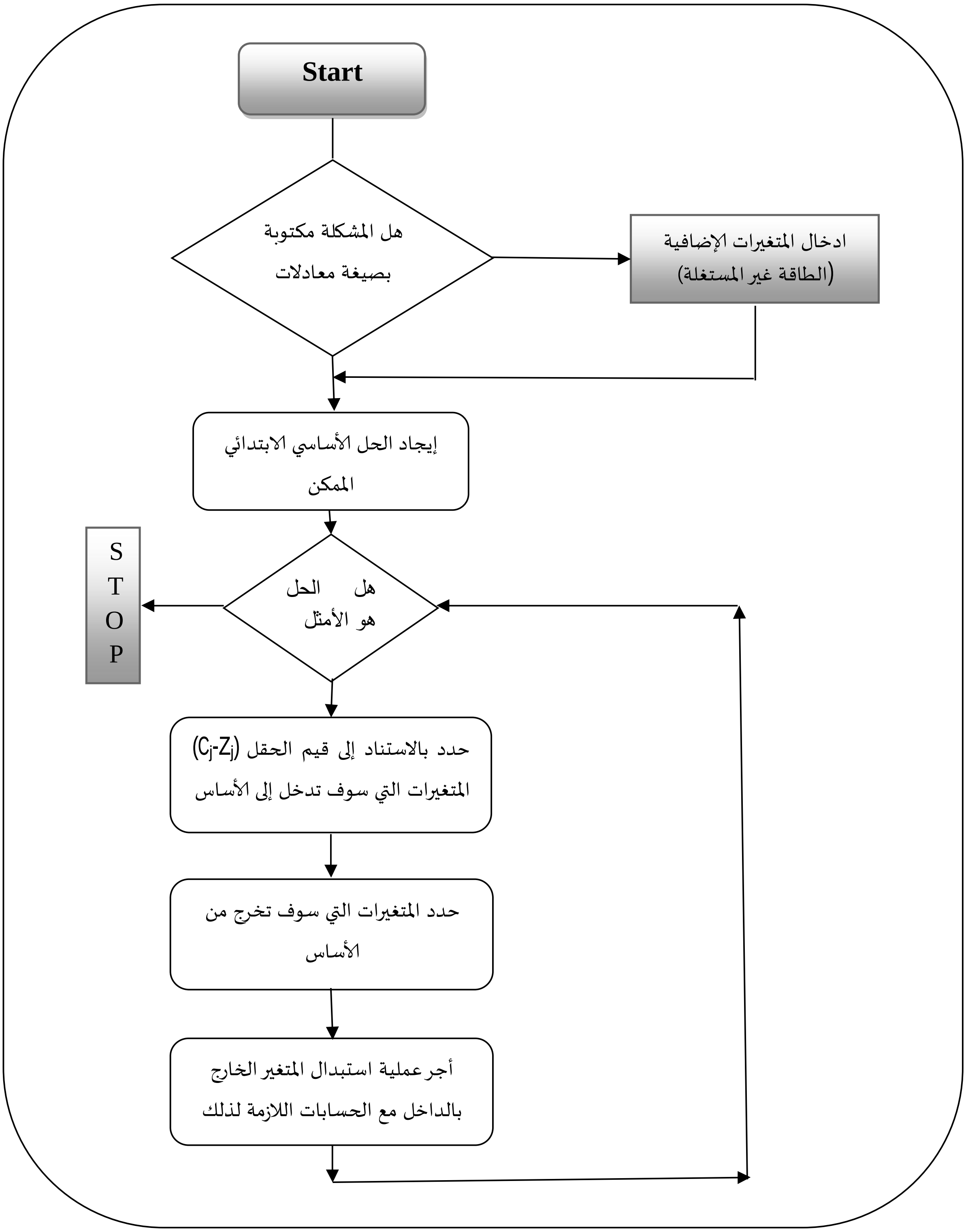
[7] رجال، السعدي. (2005)، **مرجع سبق ذكره**، ص، ص: 16، 17

اتجاه نقطة الأصل، بينما في طريقة الـ Simplex يتم الوصول إلى الحل الأمثل باستخدام جداول خاصة.

- تشير عندما يتم استخدام الطريقة البيانية تشير النقاط خارج منطقة الحلول المثلى (كما رأينا فهي تعبر عن النقاط المشكلة من جميع قيود البرنامج الخطي) إلى وجود موارد عاطلة، وأيضا في الطريقة الـ Simplex تعبر متغيرات القرار الموجودة خارج الأساس إلى موارد عاطلة.
- في الطريقة البيانية، إذا تزامن خط دالة الهدف مع أكثر من نقطة واحدة في منطقة الحلول المثلى، فإن المشكلة لها حل بديل ثانٍ. في حالة طريقة Simplex، يكون لصف صافي التقييم صفر للمتغير غير الأساسي، فإن المشكلة لها حل بديل. (إذا أمكن الحصول على حلين أمثل بديلين، يمكن الحصول على العدد اللامتناهي من الحلول المثلى).

5. **حل مسألة التعظيم (Max) باستخدام طريقة السمبلكس (Simplex)**: من أجل فهم الخطوات السالفة الذكر نحاول تطبيقها على حالات عملية، وبصفة عامة يمكن تمثيل الخطوات الأساسية لحل مسائل البرمجة الخطية بالشكل أدناه (الشكل رقم 01).

الشكل رقم (01): المخطط الإنسيابي لعملية إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس أو الطريقة المبسطة



<u>**المصدر:**</u> علي حسين علي وآخرون. (1999)، بحوث العمليات وتطبيقاتها في المنشأة، دار زهران، عمان، الأردن، ص 62

– **حالة مسألة تعظيم (Max) بالشكل النظامي (القانوني):** من أجل فهم سيرورة الحل باستخدام طريقة الـ Simplexe لمسألة تعظيم مكتوبة بالصيغة القانونية نقوم باستعراض المثال الموالي.

مثال تطبيقي رقم (01): يقوم مصنع للمعدات البلاستيكية بصناعة نوعين من الطاولات، طاولات ذات قطر ½ متر وطاولات ¾ متر، من خلال ورشتي انتاج؛ الورشة الأولى لتصنيع الطاولات والورشة الثانية تستعمل لتركيب الأجزاء وطلائها. حيث أن ساعات العمل اللازمة لتصنيع وطلاء الطاولات وتركيبها وأيضا حجم الساعات المتاحة في كل ورشة من الورشتين وأيضا الربح المحقق من بيع كل طاولة ملخصة في الجدول الموالي:

الورشة والربح	طاولة ذات قطر ½ متر	طاولة ذات قطر ¾ متر	طاقة الإنتاج (الساعات)
الورشة الأولى	01	02	20
الورشة الثانية	01	01	12
الربح المحقق	02 و.ن	03 و.ن	---

المطلوب:

1. أكتب البرنامج الرياضي الموافق للمسألة.
2. أوجد عدد الطاولات من كلا النوعين الذي يحقق للمؤسسة أقصى ربح ممكن باستخدام طريقة Simplexe.

حل المثال التطبيقي رقم (01):

1. أيجاد الصيغة الرياضية المعبرة عن المسألة السابقة (البرنامج الخطي الموافق للمسألة):

على افتراض أن:

X_1: يمثل الطاولة ذات القطر ½ متر

X_2: يمثل الطاولة ذات القطر ¾ متر

يكون النموذج الخطي الموافق للمسألة كما يلي:

$$Max\ z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. باستخدام طريقة السمبلكس نقوم بإيجاد عدد الطاولات من كلا النوعين الذي يحقق للمؤسسة أقصى ربح ممكن.

بناءا على ما تم التطرق إليه تكون الخطوات الأساسية لحل هذه المسألة كما يلي:

– **الخطوة الأولى:** تحويل المتراجحات إلى معادلات أو كتابة البرنامج الخطي على الصيغة القياسية؛ فبالنظر إلى أن دالة الهدف هي من الشكل (***Max***) وأن قيود البرنامج مكتوبة بالصيغة القانونية (القيود تحمل اشارة ≥) فهذا يعني أن الصيغة القياسية لهذا البرنامج تكون بالشكل الموالي:

دالة الهدف:

$$Max\ z = 2x_1 - 3x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

قيود البرنامج الخطي:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + s_1 = 20 \\ x_1 + x_2 \quad + s_2 = 12 \end{cases}$$

قيود عدم السلبية:

$$x_1 \geq 0, x_2, \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$$

وعليه يصبح البرنامج الخطي بالصيغة القياسية كما يلي:

$$Max\ z = 2x_1 - 3x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad + s_1 = 20 \\ x_1 + x_2 \quad\quad + s_2 = 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

– **الخطوة الثانية:** إيجاد الحل الأولي وهو الحل الأساسي الممكن، فمن خلال انشاء جدول السمبلكس نتحصل على الحل الأولي الممكن التالي.

جدول السمبلكس للحل الأولي:

	c_j	2	3	0	0	
ربح الوحدة (C_b)	**متغيرات الحل X_b**	X_1	X_2	S_1	S_2	**الحل**
0	S_1	1	2	1	0	20
0	S_2	1	1	0	1	12
Z_j		0	0	0	0	0
C_j-Z_j		2	3	0	0	--

من حلال جدول الحل الأولي الممكن يمكننا وضع الملاحظات التالية:

- العمود **(C_b)** يتكون من متغيرات الفرق S_1 وS_2 ، وهي الحل الأولي الممكن، حيث نلاحظ أن هذا الحل لا يحقق للمؤسسة أي ربح.
- عمود الحل يمثل القيم الثابتة في قيود البرنامج، حيث نلاحظ أن متغيرات الفروق تأخذ هذه القيم
- السطر **c_j** يعبر عن قيم المتغيرات في دالة الهدف وهي الربح المتوقع من بيع كل طاولة من كلا النوعين.
- السطر Z_j هو حاصل ضرب وجمع قيم العمود الأول **(C_b)** في قيم أعمدة المتغيرات (مثلا: العمود المقابل لـ X_1 تكون قيمة Z_j هي $0 = 1\times0+1\times0$). ويمكن القول أيضا عن قيم هذا السطر أنها تعبر عن قيم الربح (حالة مثالنا هي تعظيم للأرباح) الذي سيتم التضحية به مقابل زيادة الوحدة من المتغير الموجود في كل عمود.
- الحل الأولي هو $X1 = 0$، $X2 = 0$، $S1 = 20$، $S2 = 12$. وهذا الحل يعكس لنا أن المؤسسة لا تنتج أي وحدة من الطاولات من النوعين، على اعتبار أن المتغيرين $X1$ و$X2$ هي متغيرات القرار التي تؤثر على دالة الهدف، وأن المتغيرين $S1$ و$S2$ هي متغيرات لا تؤثر على دالة الهدف.

ملاحظة هامة: دائما في جدول السمبلكس المتضمن الحل الأساسي الأولي لا بد أن يحتوي على مصفوفة الوحدة (مصفوفة قطرها يساوي الواحد).

- **الخطوة الثالثة:** اختبار مثلوية الحل الأولي المتوصل إليه

نصل إلى الحل الأمثل في مسألة تعظيم (Max) عندما تكون قيم السطر الأخير (C_j-Z_j) أقل من أو يساوي الصفر (0)، وبالنظر لجدول الحل الأولي نلاحظ أن هذا السطر يحتوي على قيم موجبة، وعليه الحل الأولي لا يمثل حلال أمثلا.

- **الخطوة الرابعة:** تحسين الحل؛ على اعتبار أن الحل الأولي لا يمثل حلا مثاليا للمسألة فمن الواجب تحسين هذا الحل، وبالتالي البحث عن إمكانية تحقيق أرباح من بيع منتوجات المؤسسة. ومن أجل تحسين الحل نقوم بالتالي:
  - ايجاد المتغير الداخل؛ حيث نبحث عن المنتوج الذي يجب انتاجه في البداية، وعلى اعتبار أن المسألة هنا تمثل حالة تعظيم (Max) فالمتغير الذي يجب أن يدخل إلى الأساس هو المقابل لأعلى قيمة موجبة في السطر الأخير (C_j-Z_j)، ومن خلال الجدول السابق نلاحظ أن

المتغير X_2 يقابل أعلى قيمة ربح والمقدرة بـ 03 ون. ويسمى العمود المعبر عن المتغير X_2 بعمود الدوران أو عمود الارتكاز.

- إيجاد المتغير الذي يخرج من الحل؛ فعلى اعتبار أن هناك متغير سيدخل الأساس وهو X_2 فلا بد أن يخرج متغير، ولمعرفة هذا المتغير وجب علينا القيام بقسمة قيم السطر الأخير (قيم الحل) على عمود الارتكاز (أي العمود الموافق للمتغير X_2) ثم يتم اختيار أقل حاصل لهذه القسمة على اعتبار أنه يحقق جميع قيود المسألة. ومن خلال الجدول وقيامنا بعملية القسمة نجد: السطر الأول: 20÷2 = 10. السطر الثاني 12÷1 = 12. وعليه أقل قيمة هي الموافقة للمتغير S_1، وبالتالي يمكننا القول أن المتغير الذي يخرج من الأساس هو S_1، وفي هذه الحالة نقول عن السطر الموافق لـS_1 أنه سطر الارتكاز أو الدوران.
- تسمى نقطة تقاطع سطر الدوران مع عمود الدوران بنقطة الدوران أو الارتكاز، وفي مثالنا هذا فإن نقطة الدوران هي القيمة 2.

			3			
			X_2			
0	S_1	1	2	1	0	20
			1			
			0			
			3			

ملاحظة هامة: عند اختيار المتغير الذي يخرج من الأساس وفي حالة تساوي حاصل قسمة عمود الحل على عمود الدوران لمتغيرين، يتم اختيار المتغيرات الوهمية أو المتغيرات غير الأساسية (S1, S2,....) والقيام بإخراجها من الأساس.

- **الخطوة الخامسة: إيجاد جدول الحل الجديد**

بعد تحديد كل من المتغير الداخل والمتغير الذي يخرج من الأساس نأتي في الخطوة التالية لتحديد جدول السمبلكس الثاني والممثل للحل الجديد، حيث ينبغي القيام بمجموعة من العمليات الحسابية للوصول إلى هذا الجدول، وذلك بتطبيق قاعدة Gauss-Jordan التي تستعمل نوعين من الحسابات: [8]

[8] بوقرة، رابح. (2010)، **بحوث العمليات**، الجزء الأول مع دراسة حالة، الجزائر، جامعة المسيلة، ص 61

- قسمة كل قيم سطر الدوران أو الارتكاز في جدول الحل الأولي على نقطة الدوران (أي على الرقم 2)؛
- أما بالنسبة لقيم الجدول نتحصل عليها من خلال العلاقة التالية:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \frac{\text{المقابل له في عمود الدوران} \times \text{المقابل له في سطر الدوران}}{\text{عنصر الدوران}}$$

بعد القيام بكل العمليات على جدول السمبلكس للحل الأولي نتحصل على الجدول الثاني، حيث يمكن القول إننا قمنا بتحسين الحل الذي يظهر في الجدول الموالي:

جدول السمبلكس الثاني:

الحل	0	0	3	2	c_j	
الحل	S_2	S_1	X_2	X_1	**متغيرات الحل X_b**	**ربح الوحدة (C_b)**
10	0	½	1	½	X_2	3
2	1	½-	0	½	S_2	0
30	0	3/2	3	3/2	Z_j	
--	0	-3/2	0	1/3	C_j-Z_j	

ملاحظات على جدول السمبلكس الثاني:

- المؤسسة تنتج 10 وحدات من الطاولات ذات القطر ¾ متر وبالتالي تحقق ربح مقداره: 30 و.ن.
- كما نلاحظ أن هناك ساعات عمل غير مستغلة من طرف المؤسسة في الورشة (02) ومقدرها ساعتي عمل.
- هناك قيم في السطر الأخير (C_j-Z_j) أكبر تماما من الصفر، مما يعطينا فكرة واضحة على أن الحل المتوصل إليه في الجدول الثاني غير مثالي.

وعليه وجب علينا تحسين الحل المتوصل إليه في جدول السمبلكس الثاني.

- **الخطوة السادسة: إيجاد الحل الجديد**

- لاحظنا أن المتغير X_1 تقابل قيمة موجبة في السطر الأخير من الجدول الثاني $(C_j-Z_j = 1/3)$، وعليه فالمتغير الذي يدخل هو X_1، وعليه يصبح عمود هذا المتغير هو عمود الدوران أو الارتكاز.

- لمعرفة المتغير الذي يخرج من الأساس نتبع نفس الخطوات السابقة، وذلك بقسمة عمود الحل (العمود الأخير في الجدول الثاني) على عمود الدوران حيث:

القيمة الأولى: 20 = ½ ÷ 10

القيمة الثانية: 4 = ½ ÷ 2

بما أن القيمة الأقل هي القيمة الثانية والتي تقابل المتغير S_2 يمكن القول أن المتغير الذي يخرج من الأساس هو S_2 وهذا السطر هو سطر الدوران، أما بالنسبة لعنصر الارتكاز أو الدوران فهو القيمة ½ ، كما يوضحه الشكل التالي:

<table>
<tr><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>X_1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>½</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td>S_2</td><td>½</td><td>0</td><td>½-</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>3/2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>1/3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

بعد القيام بمختلف العمليات الحسابية على جدول السمبلكس الثاني وفق ما سبق ذكره يصبح جدول السمبلكس الثالث كالتالي:

جدول السمبلكس الثالث:

	c_j	2	3	0	0	
ربح الوحدة **(C_b)**	متغيرات الحل **X_b**	X_1	X_2	S_1	S_2	**الحل**
0	X_2	0	1	1	-1	8
0	X_1	1	0	-1	2	4
Z_j		2	3	1	1	32
C_j-Z_j		0	0	-1	-1	--

من خلال جدول السمبلكس الثالث نلاحظ أن كل قيم السطر الأخير (C_j-Z_j) هي سالبة أو معدومة، وبالتالي تحقق شرط المثلوية، مما يعني أن الحل المتوصل إليه في هذا الجدول يمثل الحل المثالي بالنسبة للمؤسسة.

تُمثل القيم الظاهرة في العمود الأخير (عمود الحل) عدد الوحدات المنتجة من الطاولات، حيث تنتج المؤسسة 8 وحدات من منتوج الطاولات ذات القطر ¾ متر، و4 وحدات من منتوج الطاولات ذات القطر ½ متر، وتحقق أعلى ربح مقداره 32 وحدة نقدية [Z = (8×3) + (4 ×2) = 32].

- يمكننا في الأخير التأكد فيما إذا كان الحل المتوصل إليه يحقق قيود البرنامج الخطي كما يلي:

قيد الورشة الأولى: 20 = (2×8) + 4 محقق

قيد الورشة الثانية: 12 = 8 + 4 محقق

- **حل مسألة التدنئة في شكلها القانوني باستخدام طريقة Simplexe** (ادخال المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف)

بالتطرق لطريقة السمبلكس (Simplexe) لحد الأن قمنا بالتكلم عن برامج التعظيم أو البرامج من نوع (Max) ذات الشكل القانوني، حيث أن القيود هنا تُكتب من الشكل أقل من أو تساوي (≤)، ولكن في الحياة العملية نجد أن هناك مشكلات برمجة خطية تكتب من الشكل أكبر من أو يساوي (≥) أو مساواة (=). ويستوجب استخدام طريقة السمبلكس لحل مشكلات البرمجة الخطية كما أشرنا أنفا إلى تحويل كل قيود البرنامج إلى صيغة خاصة (الصيغة القياسية)، وإلا فلن تكون طريقة السمبلكس قادرة على وضع حل أولي أساسي.

إن الحالات التي تكون فيها قيود البرنامج الخطي ذات إشارة (≥) أو ذات إشارة مساواة (=) يصعب فيها تحديد المتغيرات الأساسية، ذلك أنه عند تحويل القيود من الشكل أكبر من أو يساوي (≥) إلى الشكل القياسي تظهر هناك متغيرات فائضة وليست أساسية، وهذا لأنها تظهر بمعامل (1-).[9]

نحاول من خلال هذا العنصر إلى التطرق إلى كيفية حل مشاكل البرمجة الخطية من الشكل (Min) وذات الشكل القانوني (إشارة القيود من الشكل ≥).

فمن المعلوم أن الصيغة النموذجية لبرامج التدنئة (Min) تكون فيها القيود من الشكل أكبر من أو يساوي (≥)، ولأجل تحويل هذا القيد من متراجحة إلى معادلة ينبغي أن نطرح من الطرف الأيسر للمتراجحة متغير الفرق (الفجوة) كما أشرنا إلى ذلك سابقا. ويلاحظ أن هذا المتغير (متغير الفرق) يأخذ إشارة سالبة مما لا يتيح لنا الحصول على مصفوفة أحادية ضمن مصفوفة معاملات القيود عند وضع الصيغة القياسية، لذلك يتم الاستعانة بمتغيرات تسمى المتغيرات الاصطناعية، حيث أن هذه الأخيرة تأخذ قيما معدومة ومعاملاتها (1+)، وبالتالي يمكن اعتبارها متغيرات مساعدة ونرمز إليها بالرمز A.[10]

---

[9] بوقرة، رابح. **مرجع سبق ذكره**، ص 65

[10] راتول، محمد. (2004). **بحوث العمليات**، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية، ص ص: 46-47

- **الخطوات الأساسية لحل مسائل البرمجة الخطية في حالة التدنئة:** هناك مجموعة من الخطوات التي يجب اتباعها عند اعتماد طريقة السمبلكس في حل مشاكل البرمجة الخطية نلخصها كما يلي:

- نقوم أولا باختبار أمثلية الحل الأولي ويكون ذلك بالعودة إلى السطر (C_j-Z_j)، بحيث تتحقق الأمثلة في برامج التدنئة (Min) إذا قيم هذا السطر كلها أكبر من أو يساوي الصفر.
- من أجل اختيار المتغير الذي يدخل الأساس وجب الرجوع إلى السطر (C_j-Z_j) واختيار المتغير الذي يقابل أكبر قيمة سالبة.
- لاختيار المتغير الذي يخرج من الأساس يجب اختيار أقل قيمة من حاصل قسمة قيم عمود الحل وعمود الأساس (كما رأينا في مسائل التعظيم)، وتجدر الإشارة إلى أنه يتم تجاهل القيم السالبة والمعدومة وغير المعرفة.[11]
- حساب القيم الجديدة سواء لعمود الارتكاز أو سطر الارتكاز أو باقي قيم الجدول يتم وفق ما تم التطريق اليه في مسائل التعظيم.

مثال تطبيقي رقم (02):

تنتج مؤسسة Pharma لإنتاج الأدوية نوعين من الأسبرين، النوع A والنوع B. المعطيات التالية تعبر عن كمية الفيتامين الواجب توفرها في هذين النوعين من الأدوية.

الفيتامين	المعدل الاستعمالي للفيتامين لكل وحدة من المنتوج		الكمية الأدنى للفيتامين المتوفرة للمؤسسة
	المنتوج الأول	المنتوج الثاني	
A	2	4	40
B	3	2	50
تكلفة الأدوية (و.ن)	3	2.5	----

المطلوب:

1. أكتب البرنامج الرياضي الموافق للمسألة
2. أوجد عدد الوحدات من المنتوج الأول والمنتوج الثاني التي تؤدي إلى تدنئة التكاليف.

حل المثال التطبيقي رقم (02):

1. كتابة البرنامج الخطي الموافق للمسألة

نرمز للمنتوج الأول بالرمز X_1 ونرمز للمنتوج الثاني بالرمز X_2، يصبح البرنامج الخطي من الشكل:

---

[11] العامري، صالح مهدي محسن، والحداد، عواطف إبراهيم، (2009)، **مرجع سبق ذكره**، ص 173

$$Min\ z = 3x_1 + 2.5x_2$$
$$Sobject\ to:$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 40 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 50 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. حل البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس

- **الخطوة الأولى:** كتابة البرنامج الخطي على الصيغة المعيارية

القيد الأول: ما يلاحظ على القيد الأول للبرنامج أنه مكتوب بإشارة (≥) وهذا يعني أن الجانب الأيسر أكبر من الجانب الأيمن، ومن أجل كتابته على شكل مساواة وجب علينا إضافة كمية إلى الطرف الأيمن أو طرح كمية من الطرف الأيسر بمقدار الفرق بين الطرفين، فإذا رمزنا لهذا المتغير بـ S يصبح القيد الأول كما يلي:

$$2x_1 + 4x_2 - S_1 = 40$$

القيد الثاني: يلاحظ أيضا على القيد الثاني أنه مكتوب بالإشارة (≥) ويتم معالجته كما القيد الأول، حيث يجب طرح كمية (متغير) من الجانب الأيسر حتى تتحقق المساواة بين طرفي المتراجحة، وعليه نكتب القيد الثاني بالصيغة المعيارية كما يلي:

$$3x_1 + 2x_2 - S_2 = 50$$

وعليه تكون الصيغة المعيارية للبرنامج الخطي كما يلي:

$$Min\ z = 3x_1 + 2.5x_2 + 0S_1 + 0S_2$$
$$Sobject\ to:$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \quad - 1S_1 = 40 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad - 1S_2 = 50 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **الخطوة الثانية:** إيجاد الحل الاصطناعي الأولي

في البداية ومن أجل إيجاد حل أولي نضع فرضا هاما وهو حالة عدم الإنتاج، وبالتالي فإن المتغيرات الأساسية (X1 وX2) تأخذ قيما معدومة أي: $X_1 = 0$ و$X_2 = 0$، وفي هذه الحالة نجد:

القيد الأول: $2 \times 0 + 4 \times 0 - 1S_1 = 40$ أي أن: $S_1 = -40$

القيد الثاني: $3 \times 0 + 2 \times 0 - 1S_2 = 50$ أي أن: $S_2 = -50$

وعليه فإن الحل الأساسي الأولي هو: $X_1 = 0, X_2 = 0, S_1 = -40, S_2 = -50$

نلاحظ أن هذا الحل لا تتحقق فيه شروط عدم السلبية، ذلك أن متغيرات الفرق تأخذ قيما سالبة، ناهيك على أنها لا تحقق مصفوفة الوحدة في جدول الحل الأساسي الأولي الذي يتضمن المتغيرات الأساسية.

على العموم إذا لم نتوصل إلى حل أساسي أولي مقبول فيمكننا الاستعانة بالمتغيرات الاصطناعية ونستعمل طريقة تسمى **طريقة *Big M*** أو **قاعدة الحل بخطوتين**. حيث يتم إضافة متغير اصطناعي (نرمزله بالرمز A) إلى القيود التي تحمل إشارة مساواة (=) أو إشارة أكبر من أو يساوي (≥).

الصيغة المعيارية للبرنامج الخطي بعد إدخال المتغيرات الاصطناعية تصبح كما يلي:

$$Min\ z = 3x_1 + 2.5x_2 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$$

$$Sobject\ to:$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \quad - 1S_1 \quad + 1A_1 = 40 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad - 1S_2 \quad + 1A_2 = 50 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, A_1 \geq 0, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

من الصيغة المعيارية يمكن الوصول إلى الحل الأولي كما يلي:

$$x_1 = 0\ x_2 = 0, S_1 = 0, S_2 = 0, A_1 = 40, A_2 = 50, Z = 40M + 50M = 90M$$

يمكننا تمثيل جدول السمبلكس للحل الأساسي الأولي كما يلي:

جدول الحل الأساسي الأولي:

عمود الأساس	c_j	3	2.5	0	0	M	M	الحل
C_b	متغيرات الحل	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
M	A_1	2	4	-1	0	1	0	40
M	A_2	3	2	0	-1	0	1	50
Z_j		5M	6M	-M	-M	M	M	*90M*
C_j-Z_j		3-5M	2.5-6M	M	M	0	0	

– **الخطوة الثالثة:** اختبار أمثلية الحل الأساسي الاصطناعي الأولي

يتحقق الحل الأمثل عند استعمال طريقة السمبلكس وفي مسائل التدنئة عندما تكون القيم الموجودة في السطر الأخير (C_j-Z_j) أكبر من أو يساوي الصفر، ويلاحظ على الجدول الأول أن قيم السطر (C_j-Z_j) تتضمن قيما سالبة وهي المتغيرات X_1 وX_2، كما أن نفس هذه المتغيرات (X_1, X_2) قيمها معدومة وهذا يوضع عدم البدء في عملية الإنتاج من طرف المؤسسة، وعليه يمكننا القول أن هذا الحل لا يعتبر حل مثاليا.

- **الخطوة الرابعة:** تحسين الحل؛ حيث في هذه الخطوة نحاول تحسين الحل الأولي، فباعتبار أن الحل الأولي يتضمن قيما للتكاليف كبيرة جدا (90M)، ويتضمن الأمر هنا تقليل التكاليف إلى أقل ما يمكن بإخراج المتغيرات الاصطناعية من الأساس وادخل المتغيرات الأساسية.

- **المتغير الذي يدخل إلى الأساس:** من أجل معرفة المتغير الذي يدخل إلى الأساس فإننا نرجع إلى السطر (C_j-Z_j) ونختار أكبر قيمة سالبة من بين القيم الموجودة، ويلاحظ أن أقل قيمة هي (2.5-6M) وهي تقابل المتغير X_2، وعليه فإن عمود الارتكاز أو الدوران هو المقابل للمتغير X_2.
- **المتغير الذي يدخل إلى الأساس:** نختار المتغير الذي يخرج من الأساس بنفس الكيفية التي تطرقنا إليها في مسائل التعظيم، حيث نقوم بقسمة عمود الحل على عمود الارتكاز كما يلي:

القيمة الأولى: $40 \div 4 = 10$

القيمة الثانية: $50 \div 2 = 25$

نلاحظ أن القيمة الأقل هي 10 وهي القيمة التي تقابل المتغير الاصطناعي A_1، وعليه المتغير الذي يخرج من الأساس هو A_1 ويمثل السطر المقابل له سطر الارتكاز.

- **عنصر الارتكاز أو الدوران:** يلاحظ من الجدول أن عمود الارتكاز وسطر الارتكاز يتقاطعان عند القيمة (4) التي تمثل عنصر الدوران في جدول الحل الأساسي الأولي كما نوضحه فيما يلي:

			2.5					
			X_2					الحل
M	A_1	2	4	-1	0	1	0	40
			2		-			
			6M					
			2.5-6M					

بعد تحديد المتغير الذي يدخل والمتغير الذي يخرج نأتي هنا لإجراء مختلف العمليات الحسابية بنفس الطريقة التي استعملناها في مسائل التعظيم ذو الصيغة القانونية، سواء لحساب سطر وعمود الدوران أو باقي قيم الجدول. حيث نتحصل على جدول السمبلكس الثاني.

جدول السمبلكس الثاني:

عمود الأساس	C_j	3	2.5	0	0	M	M	الحل
C_b	متغيرات الحل	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
2.5	X_2	0.5	1	-0.25	0	0.25	0	10
M	A_2	2	0	0.5	-1	-0.5	1	30

Z_j	1.25+2M	2.5	0.5M-0.625	-M	0.625-0.5M	0	*25+30M*
C_j-Z_j	1.75-2M	0	0.625-0.5M	M	1.5M-0.625	0	

إن ما يمكن ملاحظته على جدول السمبلكس الثاني أن الحل قد تحسن بعد إدخال المتغير X2 إلى الأساس وأنتجت المؤسسة 10 وحدات منه وفي نفس الوقت الحل ليس مثاليا، لأن التكاليف مازالت كبيرة جدا (Z= 25+30M) كما أن السطر (C_j-Z_j) يحوي قيما سالبة، مما يستوجب منا تحسين الحل المتوصل إليه في هذا الجدول.

- **الخطوة الخامسة:** تحسين الحل

يتم تحسين الحل اختيار متغير يدخل إلى الأساس وآخر يخرج منه

- **المتغير الذي يدخل إلى الأساس:** بالعودة إلى قيم السطر (C_j-Z_j) نجد أن هناك قيمة سالبة، وأن أكبر قيمة سالبة توافق المتغير X1 وهو المتغير الذي يدخل إلى الأساس.
- **المتغير الذي يخرج من الأساس:** بعد تحديد المتغير الذي يدخل الأساس نقوم بقسمة قيم عمود الحل في الجدول الثاني على عمود الدوران، نتحصل على

القيمة الأولى: 20 = 0.5 ÷ 10

القيمة الثانية: 15 = 2 ÷ 30

القيمة الأقل هي 15 وتوافق المتغير الاصطناعي A1 وعليه المتغير الذي يدخل الأساس هو A1.

		3						
		X_1						
		0.5						
M	A_2	2	0	0.5	-1	-0.5	1	30
		1.25+2M						
		1.75-2M						

نقوم بعد ذلك بإجراء مختلف العمليات الحسابية للوصول إلى بناء جدول السمبلكس الثالث.

جدول السمبلكس الثالث:

عمود الأساس	C_j	3	2.5	0	0	M	M	الحل
C_b	متغيرات الحل	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
2.5	X_2	0	1	-0.375	0.25	0.375	-0.25	2.5
3	X_1	1	0	0.25	-0.5	-0.25	0.5	15
Z_j		3	2.5	-0.188	0.875	0.188	0.875	Z=51.25
C_j-Z_j		0	0	0.188	0.875	M-0.188	M-0.875	

- **الخطوة السادسة:** اختبار أمثلية الحل

ما يمكن أن نستشفه من جدول السمبلكس الثالث هو:

- المتغيرات الأساسية هي المتغيرات المتواجدة بالأساس أي هي متغيرات الحل.
- قيم السطر (C_j-Z_j) كلها معدومة أو أكبر من الصفر وهذا يدل على أن الحل المتوصل إليه في هذا الجدول هو حل مثالي.
- تقوم المؤسسة بإنتاج 15 وحدة من المنتوج X1 و2.5 من المنتوج X2 وتحقق أدنى تكلفة للمؤسسة

$$Z = 3 \times (15) + 2.5 \times (2.5) = 51.25$$

ملاحظة هامة:

عند حل مسألة تدنئة بطريقة الSimplex بمجرد أن يخرج المتغير الاصطناعي من الأساس يكون خرجه نهائيا بسبب ارتفاع قيمة الغرامة (M)، وبالتالي عدم رجوعه نهائيا إلى الأساس لتقليل الحسابات وتوفير الوقت، وعليه يمكننا شطب عمود المتغير الاصطناعي نهائيا في حالة خروجه من الأساس.

- **مقارنة بين حالة التعظيم وحالة التدنئة:** نقوم من خلال الجدول الموالي باستعراض أهم وجوه الشبه والاختلاف بين مسائل البرمجة الخطية حالة التعظيم ومسائل البرمجة الخطية حالة التدنئة.

الجدول رقم (01): المقارنة بين مسائل التعظيم ومسائل التدنئة عند الحل بطريقة الـ Simplex

مسائل التعظيم	مسائل التدنئة
أوجه التشابه	
لها وظيفة موضوعية	أيضا لها وظيفة موضوعية
لها قيود هيكلية	نفس الحال، أي لها قيود هيكلية
العلاقة بين المتغيرات والقيود هي علاقة خطية	هنا أيضا العلاقة تكون خطية
وجود شرط عدم السلبية	أيضا يوجد شرط عدم السلبية
يمكن أن تكون معاملات المتغيرات في البرنامج موجبة أو سالبة أو معدومة.	نفس الشي في برامج التقليل؛ أي يمكن أن تكون معاملات المتغيرات موجبة أو سالبة أو معدومة.
لمعرفة المتغير الذي يدخل للأساس نعود إلى عمود الحل (قسمة قيم عمود الحل على قيم عمود الارتكاز واختيار القيمة الأقل)	بنفس الكيفية؛ حيث يتم قسمة قيم عمود الحل على قيم عمود الارتكاز ونقوم باختيار القيمة الأقل
أوجه الاختلاف	
دالة الهدف في المسألة تكون من الشكل تعظيم	دالة الهدف في المسألة تكون من الشكل تدنئة
تكون القيود ذات إشارة أقل من أو يساوي (≤)	القيود تحمل إشارة أكبر من أو يساوي (≥)
لتحويل المتراجحات إلى معادلات يتم إضافة متغيرات الفروق للجانب الأيسر	يتم عملية تحويل المتراجحات إلى معادلات بطرح متغيرات الفروق في الخطوة الأولى ومن ثم إضافة المتغيرات الاصطناعية
لاختيار المتغير الذي يدخل للأساس يتم اختيار أعلى قيمة في السطر (C_j-Z_j)	من أجل اختيار المتغير الذي يدخل للأساس يتم اختيار أقل قيمة المقابلة له في السطر (C_j-Z_j)
يتم الوصول إلى الحل الأمثل عندما تكون قيم سطر التقييم (C_j-Z_j) سالبة أو معدومة	نحصل على الحل الأمثل في مسائل التدنئة عندما تكون قيم السطر (C_j-Z_j) موجبة أو معدومة

Source: Murthy, Rama, (2007), **Operations Research**, second edition, New Age International (p) Limited, Publishers, Publishing For One World, New Delhi, India, p 52

- **استخدام طريقة Simplexe في حل مسائل البرمجة الخطية المختلطة (برامج التعظيم والتدنئة)**

لشرح كيفية حل مسائل البرمجة الخطية المختلطة سواء كانت مسائل التعظيم أو التدنئة باستخدام طريقة السمبلكس نستعرض الأمثلة التالية.

أولا: حالة مسائل التدنئة

مثال تطبيقي رقم (03)

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Min\ Z = 4x_1 + x_2$$
$$Subject\ to:$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لهذا البرنامج باستخدام طريقة السمبلكس.

حل المثال التطبيقي رقم (03)

لإيجاد الحل الأمثل لهذا البرنامج الذي يتكون من خليط من القيود ذات اتجاهات مختلفة (=، ≤ و≥) باستخدام طريقة السمبلكس فإننا نتبع الخطوات التالية:

- **الخطوة الأولى:** كتابة البرنامج الخطي على الصيغة المعيارية

- **القيد الأول:** إذا بدأنا بالقيد الأول الذي يحمل إشارة مساواة (=) فانه يتم كتابته كما يلي

$$3x_1 + x_2 \qquad = 3$$

- **القيد الثاني:** يلاحظ بأن القيد الثاني يحمل اشارة (≥) وبالتالي ندخل عليه متغير فائض بمعامل (1-) وعليه يكتب القيد بالشكل التالي:

$$4x_1 + 3x_2 - 1S_1 = 6$$

- **القيد الثالث:** بالنسبة لهذا القيد يلاحظ بأنه يحمل اشارة (≤) وعليه لتحقيق المساواة بين طرفيه يتم اضافة متغير الفرق إلى الطرف الايسر من القيد بمعامل موجب، حيث يكون كما يلي:

$$x_1 + 2x_2 + S_2 \quad = 3$$

يتضح من خلال كتابتنا للصيغة المعيارية لهذه القيود أن القيدين الأول والثاني لا يحويان متغيرات أساسية، ولهذا وجب علينا ادخال متغيرات اصطناعية (المتغيرات الاصطناعية لها دور المتغيرات الأساسية)[12]، ويكون معاملها M وهو مقدار ثابت وكبير جدا في دالة الهدف. ويجب التنويه إلى أنه إذا

[12] بوقرة، رابح. **مرجع سبق ذكره**، ص 67

كنا بصدد نماذج Max فان M تكون بإشارة سالبة أما في حالة برامج الـ Min تدخل M على دالة الهدف بإشارة موجبة.

مما سبق تكون الصيغة المعيارية للبرنامج الخطي محل الدراسة كما يلي:

$$Min\ W = 4x_1 + x_2 + 0S_2 + 0S_3 + MA_1 + MA_2$$

$$Sobject\ ti:$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \quad + 1A_1 \quad = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \quad - 1S_2 \quad + 1A_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 \quad + 1S_3 \quad = 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, S_2 \geq 0, S_3 \geq 0, A_1 \geq 0, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

بعد تحويل البرنامج الأصلي إلى الصيغة المعيارية يصبح الحل الأولي هو:

- **المتغيرات الأساسية:** $X_1=0$، $X_2=0$
- **المتغيرات الاصطناعية:** $A_1 = 3$، $A_2 = 6$
- **المتغيرات غير الأساسية:** $S_2 = 0$، $S_3 = 3$

جدول الحل الأساسي الأولي:

عمود الأساس	C_j	4	1	0	0	M	M	الحل
C_b	متغيرات الحل	X_1	X_2	S_2	S_3	A_1	A_2	
M	A_1	3	1	0	0	1	0	3
M	A_2	4	3	-1	0	0	1	6
0	S_3	1	2	0	1	0	0	3
Z_j		7M	7M	-M	0	M	M	W= 9M
C_j-Z_j		4-7M	1-7M	M	0	0	0	

من النظرة الأولى على جدول الحل الأساسي الأولي نرى بأنه لا يتضمن حلا مثاليا على اعتبار أن قيمة دالة الهدف كبيرة جدا (وهي دالة Min أي تتضمن تقليل التكاليف أو الخسائر عادة)، أضافة إلى أن قيم السطر (C_j-Z_j) تتضمن قيما سالبة (من المعلوم أنه في نماذج Min يجب أن تكون قيم هذا السطر موجبة لكي يكون الحل أمثلا). وعليه الحل ليس أمثلا ويجب تحسينه.

- **الخطوة الثانية:** يجب علينا الأن ادخال متغير قرار إلى الأساس وإخراج متغير أخر (اصطناعي أو غير أساسي) من أجل تحسين الحل.

- **المتغير الداخل إلى الأساس:** المتغير الذي يدخل إلى الأساس هو X1، ويكون عموده هو عمود الدوران أو الارتكاز.
- **المتغير الذي يخرج من الأساس:** بقسمة قيم عمود الحل على عمود الدوران نجد:

القيمة الأولى: 3 ÷ 3 = 1

القيمة الثانية: 6 ÷ 4 = 1.5

القيمة الثالثة: 3 ÷ 1 = 3

نلاحظ أن القيمة الأولى هي أقل قيمة وتقابل المتغير A1. وبالتالي سطر الارتكاز هو سطر A1، أما عنصر الدوران فهو القيمة: 3، حيث وبعد إجراء مختلف العمليات الحسابية على الجدول الحل الأولي نتحصل على جدول السمبلكس الثاني.

جدول السمبلكس الثاني:

عمود الأساس	c_j	4	1	0	0	M	M	الحل
C_b	متغيرات الحل	X_1	X_2	S_2	S_3	A_1	A_2	
4	X_1	1	1/3	0	0	1/3	0	1
M	A_2	0	5/3	-1	0	-4/3	1	2
0	S_3	0	5/3	0	1	-1/3	0	2
Z_j		4	4/3+(5/3)M	-M	0	4/3-(4/3)M	M	W= 4+2M
C_j-Z_j		0	-1/3-(5/3)M	M	0	-4/3+(7/3)M	0	

من خلال تتبعنا للجدول الثاني نجد أن الحل قد تحسن، فدالة الهدف انخفضت من القيمة 9M إلى 4+2M، ولكنها مازالت كبيرة. كما أن السطر (C_j-Z_j) يحوي قيمة سالبة عند المتغير X2، الأمر الذي يدل على أن الحل المتوصل إليه في هذا الجدول لا يعتبر حلا أمثلا للبرنامج الخطي.

- **الخطوة الثالثة:** تحسين الحل

نختار متغير يدخل إلى الأساس وأخر يخرج من الأساس.

- **المتغير الداخل:** من الجدول نجد أن المتغير الذي يجب إدخاله للأساس هو X_2، ويصبح العمود المقابل له هو عمود الأساس.
- **المتغير الذي يخرج من الأساس:** نقوم بتقسيم قيم عمود الحل على عمود الدوران نجد

القيمة الأولى: 1 ÷ (1/3) =3

القيمة الثانية: 2 ÷ (3/5) = 5/6

القيمة الثالثة: 2 ÷ (3/5) 5/6

نلاحظ أن القيمة الثانية متساوية مع القيمة الثالثة، ولكن نختار المتغيرة الاصطناعية ونقوم بإخراجها من الأساس. وعليه A2 تخرج من الأساس والسطر المقابل لها هو سطر الارتكاز وعنصر الدوران هو القيمة 3/5. حيث بعد إجراء كل العمليات الحسابية على الجدول الثاني نتحصل على الجدول التالي:

جدول السمبلكس الثالث:

عمود الأساس	c_j	4	1	0	0	M	M	الحل
C_b	متغيرات الحل	X_1	X_2	S_2	S_3	A_1	A_2	
4	X_1	1	0	1/5	0	3/5	-1/5	3/5
1	X_2	0	1	-3/5	0	-4/5	3/5	6/5
0	S_3	0	0	1	1	1	-1	0
Z_j		4	1	1/5	0	0	-1/5	W = 18/5
C_j-Z_j		0	0	-1/5	0	M	M+(1/5)	

نلاحظ أن المتغيرات الاصطناعية قد خرجت من عمود الأساس ويمكننا في هذه الحالة التخلص منها نهائيا وإخراجها من جدول السمبلكس. حيث يصبح الجدول بهذا الشكل:

عمود الأساس	c_j	4	1	0	0	الحل
C_b	متغيرات الحل	X_1	X_2	S_2	S_3	
4	X_1	1	0	1/5	0	3/5
1	X_2	0	1	-3/5	0	6/5
0	S_3	0	0	1	1	0
Z_j		4	1	1/5	0	W = 18/5
C_j-Z_j		0	0	-1/5	0	

وعليه الحل الأمثل لهذا البرنامج هو: $X_1 = 3/5$ و $X_2 = 6/5$ وقيمة دالة الهدف هي أقل قيمة ($W = 18/5$).