Example 1 *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$*l'application linéaire dont la matrice de la base canonique* $E = \{e_1(1,0,0), e_2(0,1,0), e_3(0,0,1)\}$ *vers la base canonique* $L = \{l_1(1,0), l_2(0,1)\}$*est*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Que vaut la matrice de f *de la base* $E' = \{e'_1(1,1,1), e'_2(1,1,0), e'_3(1,0,0)\}$ *vers la base* $L' = \{l'_1(1,3), l'_2(1,4)\}$*,* $B = Mat_{E',L'}(f)$*?*

1) *La matrice de passage* P *de* E *à* E' *est*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) *Calcul* Q^{-1}*: la matrice de passage de* L' *à* L*.*

$$\begin{cases} l_1 = (1,0) = a_{11}(1,3) + a_{21}(1,4) \\ l_2 = (0,1) = a_{12}(1,3) + a_{22}(1,4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1,0) = (a_{11} + a_{21}, 3a_{11} + 4a_{21}) \\ (0,1) = (a_{12} + a_{22}, 3a_{12} + 4a_{22}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 4 \\ a_{21} = -3 \end{cases}, \begin{cases} a_{12} = -1 \\ a_{22} = 1 \end{cases}.$$

Donc

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'aprés le théorème précédent, on a

$$\begin{aligned} B &= Mat_{E',L'}(f) = Q^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$