Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,
$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Trouver AB, rgC, D^{-1}.

Solution

1) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$,

2) Par des opérations élémentaires sur les colonnes, on obtient :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $rgB = 3$.

3) Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Le calcul donne que $\det A = -6 \neq 0$, donc A est inversible.

On a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} C^t$ avec

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^t = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$