طريقة الحل البياني في حل مسائل البرمجة الخطية

(الطريقة البيانية)

تتسم الطريقة البيانية بأنها وسيلة سهلة في حل مسائل البرمجة الخطية والتي لا يزيد فيها عدد المتغيرات عن متغيرين (02)، ورغم ذلك فإنها تبقى وسيلة مفيدة وضرورية ذلك أن دراستها يساعد على توضيح وفهم بعض المفاهيم الخاصة. ومن أجل حل برنامج خطي باستعمال طريقة الحل البياني فإننا نقوم باتباع مجموعة من الخطوات تتمثل أساسا في:

- كتابة البرنامج الرياضي الموافق للمسألة (تحديد دالة الهدف وقيود البرنامج).
- التمثيل البياني لقيود البرنامج الخطي (رسم المنحنيات على معلم متعامد ومتجانس)، حيث يتم تحويل اشارات المتراجحات (≥) و(≤) إلى اشارة مساواة.[1]
- تعيين منطقة الحلول الممكنة، بمراعاة شرط عدم السلبية والتي تحدد منطقة الحل في الربع الأول من المستوي.
- رسم عدد من المستقيمات الممثلة لدالة الهدف (هنا وكأننا نقوم بتمرير المستقيم الممثل لدالة الهدف على منطقة الحلول الممكنة).
- ايجاد قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من نقاط منطقة الحلول الممكنة (بالطبع هنا لا نحسب قيمة دالة الهدف عند كل النقاط ولكن فقط عند نقاط الاركان الاساسية لمنطقة الحلول الممكنة، وغالبا تمثل نقاط التقاطع بين المستقيمات فيما بينها أو نقاط تقاطع المستقيمات مع محوري المعلم).
- الاختيار بين الحلول الممكنة لتحديد الحل الأمثل.

مثال تطبيقي رقم (01):

مؤسسة الأوراس تنتج نوعين من المحافظ، وقد تبين من الدراسة السوقية التي قمنا بها أن هناك سوقا للمحافظ النسائية وسوقا للمحافظ الرجالية، وحسب المصالح المسؤولة عن عملية البيع لهذه المحافظ فان المؤسسة يمكن أن تبيع كل ما تنتج.

---

[1] حمدان، فتحي خليل، ومرعي، رشيق رفيق. (2004)، **مقدمة في بحوث العمليات**، الطبعة الرابعة، عمان، دار وائل للنشر، ص 29

بعد دراسة مستوفية للعملية الإنتاجية، تم تحديد أربعة مراحل هي: التفصيل، الخياطة، التزيين، التغليف. بعد دراسة تحليلية للعملية الإنتاجية أعطت مصلحة الإنتاج الجدول التالي الذي يحدد وقت الإنتاج مقدرا بالساعات.

مراحل الإنتاج	المحافظ النسائية	المحافظ الرجالية
التفصيل	7/10	01
الخياطة	½	5/6
التزيين	01	2/3
التغليف	1/4	1/10

بالنسبة لمصلحة المحاسبة وبعد دراسة العملية أعطت الربح الممكن تحقيقه من كل نوع من الإنتاج للحقائب، حيث النسائية منها تحقق ربحا قدره 100 دج للوحدة، بينما الرجالية تحقق ربحا قدره 90 دج للوحدة. كما أن مصلحة الإنتاج استطاعت هي الأخرى تحديد الساعات المتاحة لكل مرحلة على التوالي: 630، 600، 708 و125 ساعة عمل.

المطلوب: إذا تم تكليفك بإدارة العملية الإنتاجية لهذه المؤسسة، كم يجب أن تنتج من كل نوع من المحافظ حتى يتحقق أكبر ربح؟

حل المثال التطبيقي رقم (01):

- **الخطوة الأولى**: صياغة البرنامج الخطي الموافق للمسألة.

نرمز للمحافظ النسائية بـ X_1 والمحافظ الرجالية بـ X_2

وبالتالي يكون البرنامج الخطي للمسألة بالشكل الرياضي التالي:

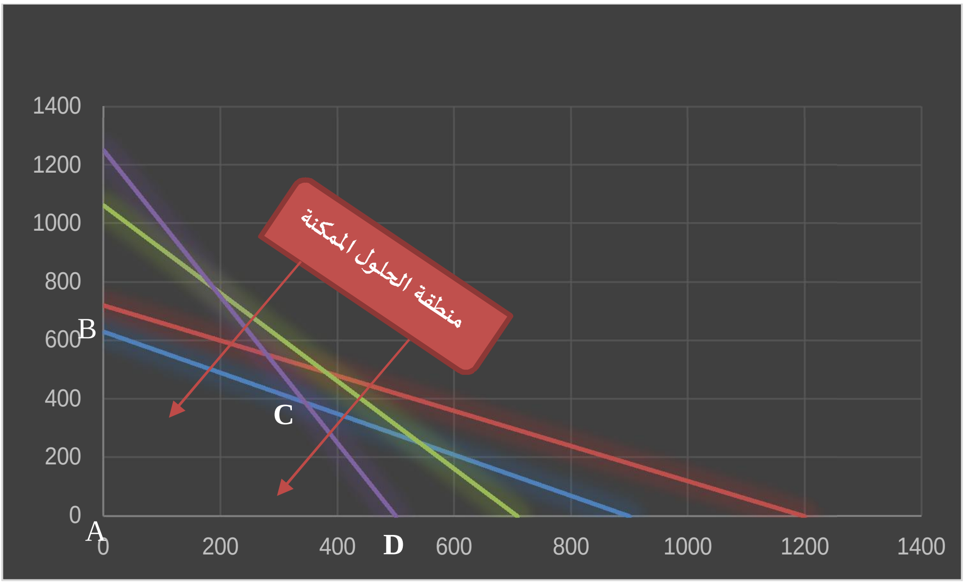
$$Max\ z = 100x_1 + 90x_2$$

Sobject to :

$$\begin{cases} {}^{7}/_{10}\,x_1 + x_2 \le 630 \\ {}^{1}/_{2}\,x_1 + {}^{5}/_{6}\,x_2 \le 600 \\ x_1 + {}^{2}/_{3}\,x_2 \le 708 \\ {}^{1}/_{4}\,x_1 + {}^{1}/_{10}\,x_2 \le 125 \\ x_1 \ge 0\,, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

- **الخطوة الثانية:** رسم المحاور المعبرة عن قيود البرنامج في معلم متعامد ومتجانس

حيث وبالاستعانة ببرنامج اكسل (Excel) يكون التمثيل البياني لقيود البرنامج السابق كما يلي:



- **الخطوة الثالثة:** ايجاد عدد المحافظ من النوع النسائي والرجالي الذي يحقق للمؤسسة أقصى ربح ممكن (ايجاد الحل الأمثل).

من الشكل أعلاه نلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة هي داخل المضلع [ABCD] وهي كما يتضح لنا تشتمل على الكثير من نقاط الحل الممكنة لهذا البرنامج، ونظرا لكثرتها فإنه يتم اختيار عدد محدد من هذه النقاط، فكيف يتم ذلك؟

عادة وباستخدام المنطق الرياضي تعطي النقاط المتطرفة حلولا ممكنة أفضل من غيرها، حيث كلما ابتعدت نقاط الحل عن نقطة الأصل (0,0) والنقاط الداخلية الأخرى يكون الحل في هذه الحالة أفضل. وبالتالي فإن أركان الحل الممكنة تتمثل في النقاط A وB وC وD.

بالنسبة للحل الأمثل يتم تعيينه بطريقتين؛ إما بتقييم كافة النقاط المتطرفة أي حساب قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من هذه النقاط، أو برسم دالة الهدف.

الطريقة الأولى: تقييم النقط المتطرفة

في الجدول الموالي نقوم بتعيين احداثيات النقاط المتطرفة وأيضا حساب قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من هذه النقاط.

النقطة	التقاطع	احداثيات النقاط	قيمة دالة الهدف
A	نقطة الأصل	(0,0)	Z= 00
B	تقاطع القيد الأول مع محور التراتيب	(0,630)	Z= 56700
C	تقاطع القيد الأول مع القيد الرابع	(3100/9, 3500/9)	Z= 625000/9
D	تقاطع القيد الرابع مع محور الفواصل	(500,0)	Z= 50000

– بالنسبة للنقطة C التي تمثل تقاطع القيدين الأول والرابع يعني:

$$\begin{cases} {}^{7}/_{10}\, x_1 + x_2 \;=\; 630 \\ {}^{1}/_{4}\, x_1 + {}^{1}/_{10}\, x_2 \;=\; 125 \end{cases}$$

بحل جملة المعادلتين نجد: B(3700/7,260)

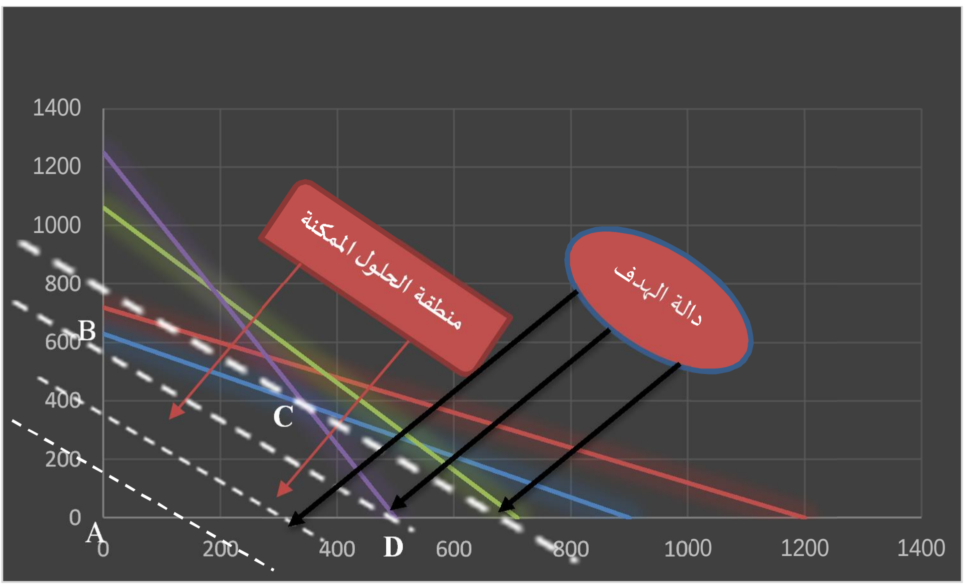
- نلاحظ من خلال الجدول أن أكبر قيمة لدالة الهدف تكون عند النقطة C(3100/9, 3500/9)

أي:

$$Z= 100 \times (3100/9) + 90 \times (3500/9) = 625000/9.$$

<u>الطريقة الثانية:</u> رسم دالة الهدف

هذه الطريقة أيضا تمكننا من الوصول لنفس الحل الذي تحصلنا عليه سابقا (عند تقييم النقاط المتطرفة)، وتبنى هذه الطريقة على رسم المستقيم الممثل لدالة الهدف ثم القيام بتمريره على منطقة الحلول الممكنة إلى غاية ملامسته لأعلى نقطة في هذه المنطقة (باعتبار أن المسألة هنا تمثل حالة تعظيم Max)، وهذه النقطة تمثل الحل الأمثل للبرنامج، كما يمثله الشكل الموالي:

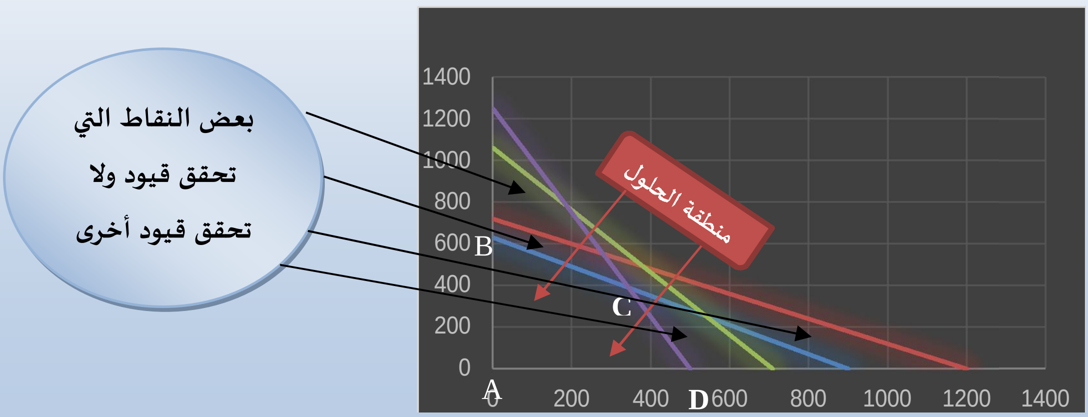


بغية معرفة قيمة دالة الهدف عند كل نقطة ينبغي علينا اسقاط خطوط سواء على محور الفواصل أو على محور التراتيب لتعيين قيمتي X_1 وX_2، ثم يتم تعويض احداثيات نقطة ما في دالة الهدف لمعرفة قيمة الربح المتحصل عليه نظير عملية الإنتاج والبيع. فمثلا: إذا كانت الكمية من X1 هي 200 والكمية من X2 هي 350 تكون قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = 100(200) + 90(350) = 51500$$

ملاحظة هامة جدا:

إذا عدنا للتميل البياني لمختلف قيود البرنامج الخطي نجد أن النقاط المشار اليها في الحل تحقق قيد أو قيدين ولا تحقق القيود الأخرى، وعليه لكي يتم قبول وتعيين منطقة الحلول الممكنة وجب أن تحقق هذه المنطقة جميع قيود البرنامج الخطي



مثال تطبيقي رقم (02):

ليكن لدينا البرنامج الرياضي الموالي والذي يعبر عن حالة تصغير (تدنئة)

$$Min\ W = 25x_1 + 10x_2$$

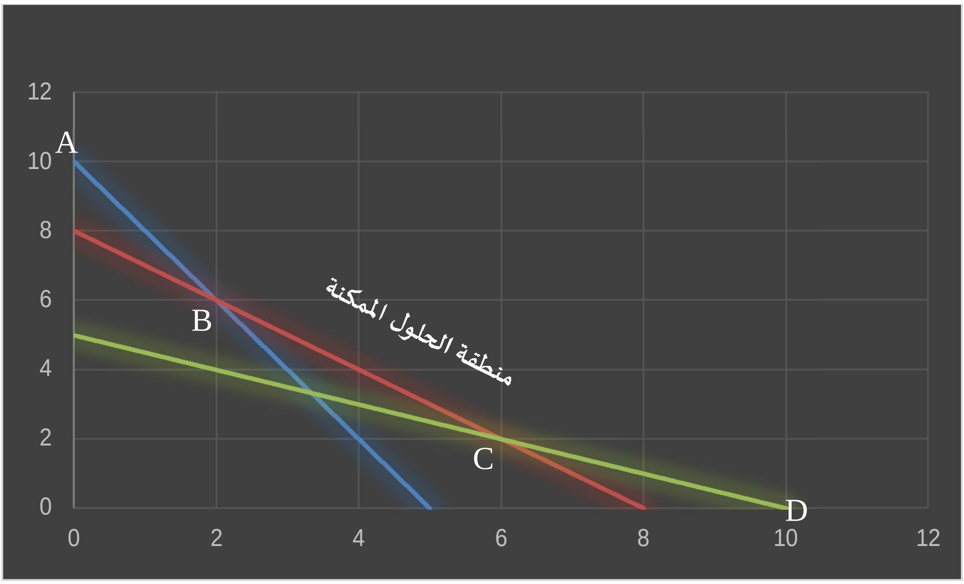
$$Sobject\ to :$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \geq 40 \\ x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد قيم المتغيرات X1 وX2 التي تجعل دالة الهدف في أدنى قيمة لها باستعمال طريقة الحل البياني.

حل المثال التطبيقي رقم (02):

- رسم المحاور المعبرة عن قيود البرنامج في معلم متعامد ومتجانس: حيث بالاستعانة ببرنامج اكسل (Excel) يكون التمثيل البياني لقيود البرنامج السابق كما يلي:



من الشكل البياني يلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة هي أعلى المستقيمات (لأن إشارة القيود هي من الشكل أكبر من أو يساوي ≥)، كما يلاحظ كذلك أن هذه المنطقة تشتمل على نقاط لا نهائية، وعليه فيمكن تمثيل منطقة الحلول الممكنة بالنقاط [ABCD].

- **تقييم النقط المتطرفة:** في الجدول الموالي نقوم بتعيين احداثيات النقاط المتطرفة وأيضا حساب قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من هذه النقاط.

النقطة	التقاطع	احداثيات النقاط	قيمة دالة الهدف
A	تقاطع القيد الأول مع محور التراتيب	(0,10)	W= 100
B	تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني	(2,6)	W= 110
C	تقاطع القيد الثاني مع القيد الثالث	(6, 2)	W= 170
D	تقاطع القيد الثالث مع محور الفواصل	(10,0)	W= 250

– بالنسبة للنقطة B والتي تمثل نقطة تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني، أي:

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 = 40 \\ x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$$

بحل جملة المعادلتين نتحصل على النقطة C ذات الإحداثيات (2, 6).

- بالنسبة للنقطة C والتي تمثل نقطة تقاطع القيدين الثاني مع الثالث، أي:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$$

بعد حل جملة المعادلتين نتحصل على النقطة C ذات الإحداثيات (6, 2)

- من خلال الجدول يمكن القول أن قيم X1 وX2 التي تؤدي إلى حل البرنامج وتخفض من دالة الهدف هي النقطة A ذات الإحداثيات A(0, 10)، حيث أن قيمة دالة الهدف هي:

$$W = 25(0) + 10(10) = 100$$

وهي تمثل أدنى قيمة لدالة الهدف. ومنه نقطة الحل الأمثل هي: A(0, 10).

مثال تطبيقي رقم (03):

يقوم جزار بعمل شطائر اللحم بتكوين من لحم بقر ولحم ماعز. يحتوي لحم البقر على 80% لحم و20% دهون ويكلف 24 دج لكل كيلوغرام، في حين أن لحم الماعز يحتوي على 68% لحم و32% دهون ويكلف 18 دج لكل كيلوغرام.

المطلوب:

- باستعمال طريقة الحل البياني ما هي كمية اللحم من كل نوع يجب أن يستخدمها المحل في كل كيلوغرام من شطائر اللحم إذا علمت انه يجب تخفيض التكاليف والمحافظة على نسبة الدهون، بحيث لا يزيد عن 25%؟

حل المثال التطبيقي (03):

الخطوة الأولى: كتابة البرنامج الرياضي الموافق للمسألة

نفرض أن وزن لحم البقر المستخدم في الكيلو هو: X_1

نفرض أن وزن لحم الماعز المستخدم في الكيلو هو: X_2

تكون دالة الهدف بالشكل التالي: بما أنها دالة لتدنئة التكاليف فيمكن كتابتها وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$Min\,W = 24x_1 + 18x_2$$

كتابة القيود:

القيد الأول: يحتوي كل كيلو علي 0.20 من الدهون من لحم البقر X_1 و0.32 من الدهون من لحم الماعز X_2 ويجب ألا تزيد نسبة الدهون في الشطيرة عن 25%. وبالتالي القيد يكتب رياضيا كالتالي:

$$0.2x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25$$

القيد الثاني: يجب أن يكون وزن لحم البقر ولحم الماعز مجتمعين في كل كيلو من الشطائر هو كيلو واحد، رياضيا تكتب بالشكل التالي:

$$x_1 + x_2 = 1$$

القيد الثالث: قيود عدم السلبية

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

ومنه الصيغة النهائية للبرنامج الخطي تكون كما يلي:

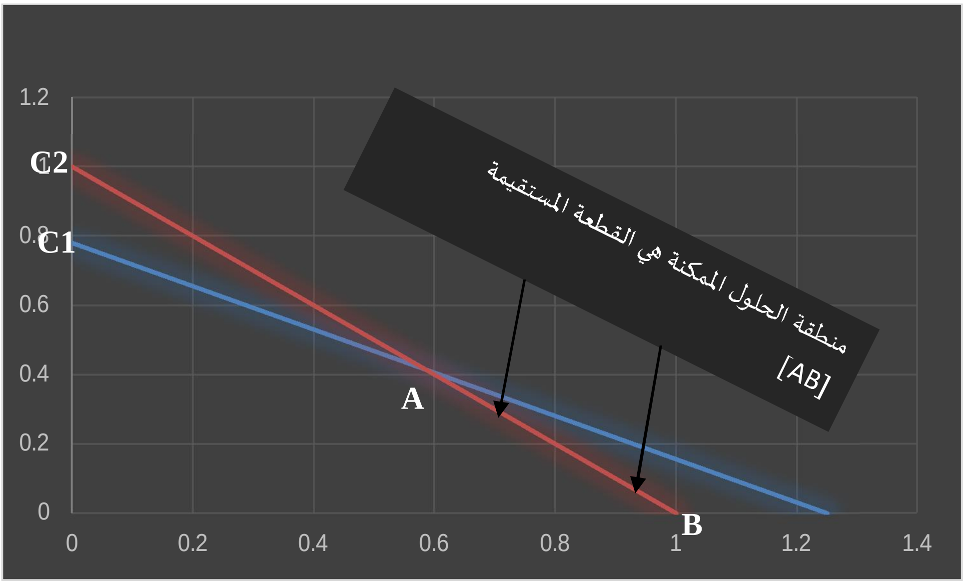
$$Min\,W = 24x_1 + 18x_2$$

$$Sobject\ to:$$

$$\begin{cases} 0.2x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: يتم معرفة كمية اللحم من كل نوع يجب أن يستخدمها المحل في كل كيلوغرام من شطائر اللحم بحيث يجب تخفيض التكاليف والمحافظة على نسبة الدهون.

- نقوم باستخدام طريقة الحل البياني كما يلي:



- **تعيين منطقة الحلول المثلى:** بعد رسم التمثيل البياني تكون منطقة الحلول العملية الممكنة منحصرة في القطعة المستقيمة $[AB]$
- **تقييم النقط المتطرفة:** في الجدول الموالي نقوم بتعيين احداثيات النقاط المتطرفة وأيضا حساب قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من هذه النقاط.

النقطة	التقاطع	احداثيات النقاط	قيمة دالة الهدف
A	تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني	(0.583 , 0.4166)	W= 21.4908
B	تقاطع القيد الثاني مع محور الفواصل	(1, 0)	W= 24

- بالنسبة للنقطة A والتي تمثل نقطة تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني، أي:

$$\begin{cases} 2x_1 + 0.32x_2 = 0.25 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

بعد حل جملة المعادلتين نتحصل على احداثيات النقطة A وهي: (0.583 , 0.4166)، وتصبح دالة الهدف عند هذه النقطة هي: W= 21.4908.

- من خلال الجدول يمكن القول أن كمية اللحم من البقر والماعز التي يجب توفرها في كل كيلوغرام من شطائر اللحم بحيث يتم من خلالها المحافظة على نسبة الدهون، كما أنها تسمح بتدنئة دالة التكاليف هي:

لحم البقر: X1 = 0.583 ولحم الماعز: X2 = 0.4166

حيث أن دالة التكاليف تكون عند أدنى قيمة لها وهي: W= 24(0.583) + 18 × (0.4166) = 21.4908

مثال تطبيقي رقم (04):

ليكن لدينا البرنامج الخطي الموالي: (ص 29 من كتاب الإنجليزية)

$$Max\ Z = 5x_1 + 7x_2$$

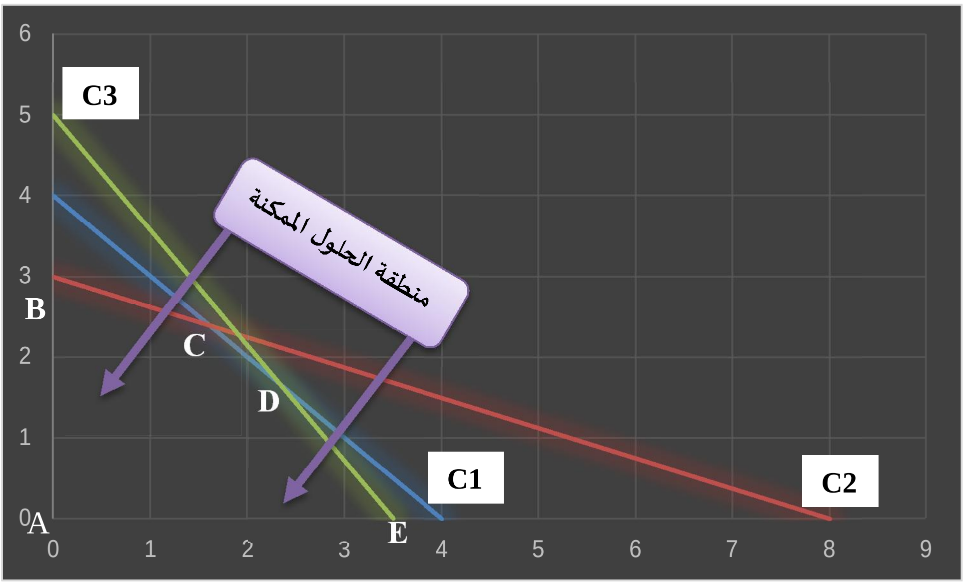
$$Sibject\ to:$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 8x_2 \leq 24 \\ 10x_1 + 7x_2 \leq 35 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد قيم X1 وX2 التي من شأنها أن تعظم دالة الهدف باستخدام الطريقة البيانية.

حل المثال التطبيقي رقم (04):

- رسم المحاور المعبرة عن قيود البرنامج في معلم متعامد ومتجانس: حيث بالاستعانة ببرنامج اكسل (Excel) يكون التمثيل البياني لقيود البرنامج السابق كما يلي:



الملاحظ على الشكل هو أن منطقة الحلول العملية الممكنة تقع أسفل كل المستقيمات وهذا لأن قيود البرنامج كانت كلها تحمل اشارة أقل من أو يساوي (≤)، وهي محصورة داخل المضلع [ABCDE]، ومن المعلوم أنه لا يمكننا تقييم كل النقاط الموجودة في هذه المنطقة، وعليه يتم فقط معرفة احداثيات نقاط الأركان الأساسية للمنطقة، أي بتقييم النقاط A وB وC وD وE. حيث يوضح الجدول الموالي احداثيات نقاط الأركان وأيضا قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من هذه النقاط.

النقطة	التقاطع	احداثيات النقاط	قيمة دالة الهدف
A	نقطة الأصل	(0,0)	Z= 00
B	تقاطع القيد الأول مع محور التراتيب	(0, 3)	Z= 21
C	تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني	(1.6 , 2.4)	Z= 24.8
D	تقاطع القيد الأول مع القيد الثالث	(500,0)	Z= 23.33
E	تقاطع القيد الثالث مع محور الفواصل	(3.5, 0)	Z = 17.5

- يلاحظ من الشكل أن النقطة C تقع عند تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني، أي:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 = 24 \end{cases}$$

يتم حل جملة المعادلتين بطريقة عادية ونحصل على قيمة X1 هي 1.6 وقيمة X2 هي 2.4، أي: C(1.6 , 2.4)، أما قيمة دالة الهدف فهي:

$$Z = 5(1.6) + 7(2.4) = 24.8$$

- بالنسبة للنقطة D فيلاحظ من المنحنى البياني أن تقع عند تقاطع القيد الأول مع القيد الثالث، رياضيا يمكننا كتابة:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 10x_1 + 7x_2 = 35 \end{cases}$$

بعد بحل جملة المعادلتين نتحصل على قيمة X1 وهي 17/5 وقيمة X2 وهي 3/5. أما قيمة دالة الهدف فهي:

$$Z = 5\left(\frac{7}{3}\right) + 7\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{70}{3} = 23.33$$

- بعد تعيين منطقة الحلول الممكنة وتقييم مختلف النقاط المتطرفة نصل إلى تحديد قيم *X1* و*X2* التي تعظم دالة الهدف، وبالتالي فالحل الأمثل يكون عند النقطة *c(1.6, 2.4)*، وتكون دالة الهدف عند هذه النقطة في أعلى قيمة لها، أي:

$$Z = 5(1.6) + 7(2.4) = 24.8$$