**Université Larbi Ben M'hidi**
**Faculté SESNV**
**Dept. MI**
Géométrie Différentielle

15 avril 2024
Durée : 1h30

# Examen TD

Tous les documents, autres que ceux fournis dans le sujet, sont interdits. [0]

**Exercice 1 :**

1. Démontrer que la relation $x + y + z = -\sin(xyz)$ définit $z$ comme fonction de $x$ et de $y$ au voisinage du point $(0, 0, 0)$.
2. Calculer de deux façons différentes $\frac{\partial z}{\partial x}$ au voisinage de ce point.

**Exercice 2 :** Montrer que le cylindre est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, dont on calculera la dimension et l'espace tangent.

**Exercice 3 :** Montrer que les groupes suivants sont des sous-variétés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont on précisera la dimension et l'espace tangent.

1. Le groupe linéaire : $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); det(M) \neq 0\}$.
2. Le groupe linéaire spécial : $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); det(M) = 1\}$.

## Bonne chance

# Corrigé type

## Ex1

1) Soit $f$ la fn. définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x+y+z+\sin(xyz)$. 2

La fn. $f \in \mathcal{C}^\infty$, elle vérifie $f(0,0,0)=0$ et

1 $$f'_z(x,y,z) = 1 + xy\cos(xyz).$$

En particulier $f'_z(0,0,0) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ le Thm. des fns. implicites s'appl.

$\Rightarrow \exists\, U_0$ voisinage de $(0,0)\in\mathbb{R}^2$, $\exists\, I_0$ un intervalle contenant $0$

et une fn. $g : U_0 \longrightarrow I_0$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que : 1

$$\forall (x,y,z)\in U_0\times I_0 \; ; \; f(x,y,z)=0 \iff z = g(x,y).$$

2) On peut calculer $g'_x(0,0) = \frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ par la formule :

1 $$g'_x(0,0) = -\frac{f'_x(0,0)}{f'_z(0,0)} = -1$$

ou bien par la relation : $x+y+g(x,y) = -\sin(xyg(x,y))$,

en la dérivant par rapport à $x$, il vient :

2 $$1 + g'_x(x,y) + yg(x,y)\cos(xyg(x,y)) + xyg'_x(x,y)\cos(xyg(x,y)) = 0$$

on évalue cette relation en $(0,0)$, on trouve

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = g'_x(0,0) = -1$$

## Ex2

1

On pose $C_y = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2=a\}$ tq $a\neq 0$

on a 1 $C_y = S^1\times\mathbb{R}$ et donc $C_y$ est une sous-variété de dim $=2$ 1

et de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^3$.

1

$$T_{(x,y,z)}C_y = T_{(x,y,z)}S^1\times\mathbb{R} = \left(T_{(x,y)}S^1\times\{0\}\right)\oplus\left(\{(0,0)\}\times T_z\mathbb{R}\right)$$

$$= \mathrm{Vect}\{(y,-x,0),(0,0,1)\} \; ; \text{ car } T_{(x,y)}S^1 = \{(x,y)\}^\perp$$

1

et $T_z\mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Ex2

2ème Méthode :

posons $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $f(x,y,z) = x^2+y^2 - \alpha$  t.q $\alpha \neq 0$

on a $df_{(x,y,z)} = (2x, 2y, 0)$.

Ainsi $df_{(x,y,z)} = 0$ ssi $x=y=0$ et par conséquent $f$ est submersion

en tout pt. de $f^{-1}(0) = C_y$. Il s'ensuit que $C_y$ est une sous-variété

de dim $= 2$ de $\mathbb{R}^3$

l'espace Tangent $T_{(x,y,z)}C_y = \operatorname{Ker} df_{(x,y,z)} = \left\{ (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3 / (2x, 2y, 0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$

$\Rightarrow T_{(x,y,z)}C_y = \{ (h_1,h_2,h_3) \ / \ xh_1 + yh_2 = 0 \} = \operatorname{Vect}\{ (y, -x, 0), (0,0,1) \}$

3ème Méthode :

posons $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ; $g(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$

$g$ est une paramétrisation locale de $C_y$ (immersion + homéom. locale)

$dg_{(\theta,z)} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(g) = 2 \Rightarrow g$ est immersion

et $g$ est un homéom. locale (coordonnées cylindriques)

$T_{(\theta,z)}C_y = \operatorname{Im} dg_{(\theta,z)} = \left\{ dg_{(\theta,z)}(h_1,h_2) \ / \ h_1, h_2 \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Vect}\{ (y, -x, 0), (0,0,1) \}$.

Ex3

1) Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ (image réciproque de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par l'application déterminant qui est continue), donc $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\dim = n^2$ et l'espace Tangent $T_A GL_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.

1

1

0,5 0,5

2) posons $f : SL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $A \longmapsto \det A - 1$

l'ensemble $SL_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(0)$ ;

1

on a $d_A f(H) = \langle\langle \operatorname{cof} A, H \rangle\rangle := Tr((\operatorname{cof} A)^T H)$

1

( cof : matrice des cofacteurs de A, Tr : la trace )

puisque Tr est une forme linéaire non identiquement nulle $\Rightarrow$ Tr est surjective

$\det A = 1 \neq 0$
$\Rightarrow \operatorname{cof} A \neq 0$

$\Rightarrow d_A f$ est surjective 1

$\Rightarrow f$ est submersion $\Rightarrow SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de $\dim = n^2 - 1$. 1

l'espace tangent $T_A SL_n(\mathbb{R}) = \ker d_A f = \{ H \in M_n(\mathbb{R}) / d_A f\, H = 0 \}$

$\Rightarrow T_A SL_n(\mathbb{R}) = \{ H / \langle\langle \operatorname{cof} A, H \rangle\rangle = 0 \} = \{ \operatorname{cof} A \}^{\perp}$

1