Solutions d'exercices Série 2

Ex1 En effet, si les équs. sont supposées définir trois fns. u, v, w des variables x, y, z, on aura, en différentiant :

$$\begin{cases} f_u \frac{\partial u}{\partial x} + f_v \frac{\partial v}{\partial x} + f_w \frac{\partial w}{\partial x} = -f_x \\ g_u \frac{\partial u}{\partial x} + g_v \frac{\partial v}{\partial x} + g_w \frac{\partial w}{\partial x} = -g_x \\ h_u \frac{\partial u}{\partial x} + h_v \frac{\partial v}{\partial x} + h_w \frac{\partial w}{\partial x} = -h_x \end{cases}$$

Résoudre ces équs. linéaires, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,v,w)} \Big/ \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)} \qquad \underline{t.q} \quad \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$$

Ex2.

Un calcul direct donne :

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)} = \begin{vmatrix} u_r & v_r \\ u_s & v_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_x\phi_r + f_y\psi_r & g_x\phi_r + g_y\psi_r \\ f_x\phi_s + f_y\psi_s & g_x\phi_s + g_y\psi_s \end{vmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}$$

Ex3 Posons $f(x,y) = x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 - 1$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, de plus $f(-1,1) = 0$ et on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y - 1 + 2y + 3y^2$, soit $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 2 \neq 0$

on peut donc appliquer le Thm. des fns. implicites au voisinage de $(-1,1)$.

$\Rightarrow \exists$ un intervalle I_{-1} de $\mathbb{R}$ contenant -1, un intervalle J_1 de $\mathbb{R}$ contenant 1 et une fn. $g : I_{-1} \longrightarrow J_1$ $\underline{t.q}$ $\forall (x,y) \in I_{-1} \times J_1$:

$$f(x,y) = 0 \quad \underline{\underline{ssi}} \quad y = g(x)$$

pour calculer la dérivée de g en -1, on peut utiliser la formule :

$$g'(-1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

on peut aussi partir de la relation : $x^4 + x^3g^2(x) - g(x) + g^2(x) + g^3(x) = 1$, et dériver cette relation, il vient : $g'(-1) = 1/2$. (on évalue $x = -1$)

Ex4 (1) posons $f(x,y) = e^{xy} + y^2 - xy - 3y + 2x + 1$, on a : $f(0,1) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x e^{xy} + 2y - x - 3 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -1 \neq 0$

$f(0,1) = 0 \implies$ le Thm. des fns. implicites s'applique et $\exists$ deux intervalles ouverts I_0 et J_1 avec $0 \in I_0$ et $1 \in J_1$ et $\exists$ une fn. $g : I_0 \longrightarrow J_1$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ (puisque $f \in \mathcal{C}^\infty$) t.q $\forall (x,y) \in I_0 \times J_1$ on a $f(x,y) = 0 \iff y = g(x)$.

(2) puisque $g \in \mathcal{C}^\infty(I_0) \implies$ elle admet des développements limités à tout ordre en $x=0$, celui d'ordre 2 s'écrivant :

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

(3) Pour déterminer $g'(0)$ et $g''(0)$, on va dériver deux fois la relation

$$e^{xg(x)} + g^2(x) - xg(x) - 3g(x) + 2x + 1 = 0, \text{ on trouve :}$$

$$(g(x) + xg'(x))e^{xg(x)} + 2g(x)g'(x) - g(x) - xg'(x) - 3g'(x) + 2 = 0$$

évaluons en $x=0$: $1 + 2g'(0) - 1 - 3g'(0) + 2 = 0 \implies g'(0) = 2$.

on a aussi : $\begin{cases} (g(x) + xg'(x))^2 e^{xg(x)} + (2g'(x) + xg''(x))e^{xg(x)} + 2g'^2(x) + 2g(x)g''(x) - \\ - g'(x) - xg''(x) - g'(x) - 3g''(x) = 0 \end{cases}$

évaluons en $x=0$: $1 + 4 + 8 + 2g''(0) - 2 - 2 - 3g''(0) = 0$

$$\implies g''(0) = 9.$$

Ainsi, le D.L de g en $x=0$ à l'ordre deux est égale à

$$g(x) = 1 + 2x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2) \ ; \ x \to 0$$

Ex5. l'application f est diff^{ble} sur $M_n(\mathbb{R})$ (c'est un polynôme) pour calculer sa différentielle en l'identité, on remarque que

$$(I_n + H)^2 = I_n + 2H + H^2 \quad \text{avec} \quad H^2 = o(\|H\|)$$

Ainsi, $df_{I_n}(H) = 2H$, soit $df_{I_n} = 2\,Id_{M_n(\mathbb{R})} \implies$ elle est inversible.

le Thm d'inversion locale à f s'applique en l'identité et $\exists$ un voisinage ouvert U_{I_n} de I_n dans $M_n(\mathbb{R})$ et un voisinage $V_{f(I_n)}$ de $f(I_n) = I_n$ dans $M_n(\mathbb{R})$ t.q f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféom. de U_{I_n} sur $V_{f(I_n)}$.

Soit $\alpha > 0$ t.q toute matrice vérifiant $\|A - I_n\| < \alpha$ vérifie $A \in V_{f(I_n)}$.
Alors $\exists M \in U_{I_n}$ t.q $f(M) = M^2 = A$, Ainsi A possède bien une racine carrée.

$$f(x,y) = e^{xy} + y^2 - xy - 3y + 2x + 1$$

$(x_0,y_0) = (0,1)$, $\phi(0) = 1$, $f(0,1) = 1$

2^{nd} Méthode : $\{ f(x,y) = 0 \iff y = \phi(x) \}$ $\forall x \in I_0$ et $\forall y \in J_1$

Le DL de la fn. $\phi(x)$ au voisinage $x=0$ s'écrivant

$$\phi(x) = \phi(0) + \phi'(0)x + \frac{1}{2}\phi''(0)x^2 + o(x^2)$$

pour calculer $\phi'(0)$, on peut utiliser la formule : $\phi'(0) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} + 2y - x - 3 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -1 \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} - y + 2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 2$$

$$\Rightarrow \phi'(0) = -\frac{2}{-1} = 2$$

donc $\phi(x) = 1 + 2x + ax^2 + o(x^2)$ t.q. $a = \frac{1}{2}\phi''(0)$.

mais : $e^{x\phi(x)} = e^{x+2x^2+o(x^2)} = 1 + (x+2x^2) + \frac{1}{2}(x+2x^2)^2 + o(x^2)$

$$= 1 + x + 2x^2 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\phi^2(x) = (1 + 2x + ax^2 + o(x^2))^2 = 1 + 4x + 4x^2 + 2ax^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + 4x + (4+2a)x^2 + o(x^2)$$

$$-3\phi(x) = -3 - 6x - 3ax^2 + o(x^2)$$

$$-x\phi(x) = -x - 2x^2 + o(x^2)$$

on substitue ces expressions dans l'eqn. $f(x,y) = 0$, on trouve :

$$f(x,\phi(x)) = 0 \iff \cancel{1+x} + 2x^2 + \frac{1}{2}x^2 + 1 + \cancel{4x} + (4+2a)x^2 - \cancel{x} - 2x^2 - 3 - \cancel{6x} - 3ax^2 + \cancel{2x} + \cancel{1} + o(x^2) = 0$$

$$\Rightarrow 0 + 0x + (\cancel{2} + \frac{1}{2} + 4 + 2a - \cancel{2} - 3a)x^2 + o(x^2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + 4 - a = 0 \Rightarrow a = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = 1 + 2x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$$