Espace Tangent à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$:

Dfn. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ et de $\dim = p$.
Un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ sera dit tangent à M en un pt $x \in M$ s'il existe une application différentiable $\gamma : I_\varepsilon =]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

① $\gamma(I_\varepsilon) \subset M$ ② $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$

L'ensemble de ces vecteurs est l'espace tangent à M en x et est noté $T_x M$

$$T_x M = \{ v \in \mathbb{R}^n \ / \ \exists \gamma : I_\varepsilon \xrightarrow{\gamma \in \mathcal{C}^1(I_\varepsilon)} \mathbb{R}^n : \gamma(I_\varepsilon) \subset M, \ \gamma(0) = x, \ \gamma'(0) = v \}$$

Thm. si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de $\dim = p$, alors pour tout $x \in M$ $T_x M$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\dim = p$.

Rem.
- si $v \in T_x M$, alors il existe une infinité de courbes γ dans M telque $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$

En effet, si γ est une courbe qui représente v et $f : I_\varepsilon \longrightarrow I_\varepsilon$ une fn. de classe $\mathcal{C}^1$ telleque $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, alors $\gamma \circ f : I_\varepsilon \to \mathbb{R}^n$ est une fn. de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie : ① $\gamma \circ f(I_\varepsilon) \subset M$, ② $\gamma \circ f(0) = x$, ③ $(\gamma \circ f)'(0) = \gamma'(f(0)) \cdot f'(0) = \gamma'(0) = v$

Ex. $S^1 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x_1^2 + x_2^2 = 1 \}$

$\exists \gamma : I_\varepsilon =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto (\cos t, \sin t)$

on a : $\gamma(I_\varepsilon) \subset S^1$, $\gamma(0) = (1, 0) = x$, $v = \binom{0}{1} = \gamma'(0)$ est un vecteur tangent en x à S^1

Thm. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Posons $\tilde{M} = M \cap \Omega$, alors $z \in T_x \tilde{M} \iff z \in T_x M$ (i.e. $T_x M = T_x \tilde{M}$)

Thm. Soient Ω un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \subset E \to F = \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ (E, F evn)
- si M est une sous-variété de E contenu dans Ω ($M \subset \Omega$) et W est une sous-variété de F, telleque $f(M) = W$
- si $x \in M$ et $y = f(x) \in W$, alors $z \in T_x M \Rightarrow d_x f(z) \in T_y W$

Thm. Soit $K_x = \{ \gamma : I_\varepsilon \to \mathbb{R}^n,\ \gamma \in \mathcal{C}^1(I_\varepsilon),\ \gamma(I_\varepsilon) \subset M,\ \gamma(0) = x \}$

- Si on désigne par "$\sim$" la relation définie sur K_x par :

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad \underline{\text{ssi}} \quad \gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$$

Alors "$\sim$" est une relation d'équivalence et on a $K_x/_\sim \cong T_xM$

$$T_xM \cong \{ [\gamma] \ / \ \gamma \in K_x \}$$

Déf. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de $\dim = p$

l'ensemble $TM = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_xM = \{ (x, v) \ / \ x \in M,\ v \in T_xM \} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

est dit fibré tangent à M

Rem.

- Le fibré tangent à une sous-variété M en général n'est pas un espace vectoriel

Ex. (Espace tangent à un ouvert de $\mathbb{R}^n$)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$ et $v \in \mathbb{R}^n$. Puisque Ω est un voisinage de x, alors $\exists \varepsilon > 0 : \forall |t| < \varepsilon ;\ tv + x \in \Omega$

- si on pose $\gamma : I_0 =]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \Omega$
$t \longmapsto x + tv$, alors

$\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$, d'où $T_x\Omega = \mathbb{R}^n$ et

$T\Omega$ $= \bigcup_{x \in \Omega} \{x\} \times \mathbb{R}^n = \Omega \times \mathbb{R}^n$

Thm. Si M est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 2$) et de $\dim = p$ de $\mathbb{R}^n$, Alors TM est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de $\dim = 2p$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

preuve : soit $(x_0, v_0) \in TM$. Il existe Ω un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n-p}$ une submersion en x_0 de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω telle que $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$.

Alors $\Omega \times \mathbb{R}^n$ est un voisinage de (x_0, v_0) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et on a :

$$TM \cap (\Omega \times \mathbb{R}^n) = \{ (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \ / \ x \in \Omega \cap M,\ v \in T_xM \} = \{ (x, v) \ / \ f(x) = 0,\ d_xf(v) = 0 \}$$
$$= \{ (x, v) \ / \ F(x, v) = 0 \} = F^{-1}(0) \quad \text{où} \quad F : (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \to (f(x), d_xf(v)) \in \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^{n-p}$$

Comme $JF_{(x_0, v_0)} = \begin{pmatrix} J_{x_0}f & 0 \\ ? & J_{x_0}f \end{pmatrix}$ est de rang $2(n-p)$ $\Rightarrow$ F est une submersion en (x_0, v_0)

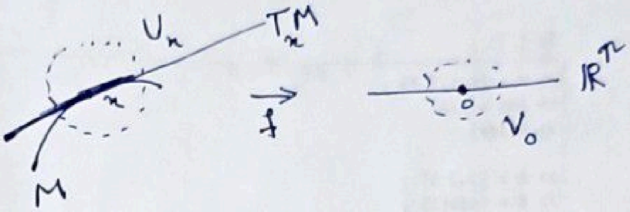
telle que $F^{-1}(0) = TM \cap (\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Notons pour finir que $2n - 2(n-p) = 2p$.

thode de calcul de T_xM :

Thm (par redressant)

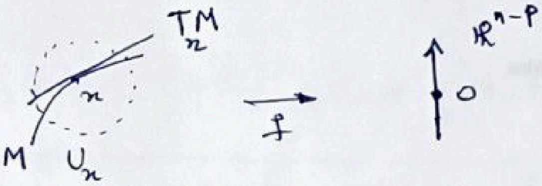
si U_x est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$ et V_0 est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U_x \to V_0$ un $\mathcal{C}^1$-difféom. tels que $f(x)=0$ et $f(U_x \cap M) = V_0 \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$

alors $T_xM = (d_xf)^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$



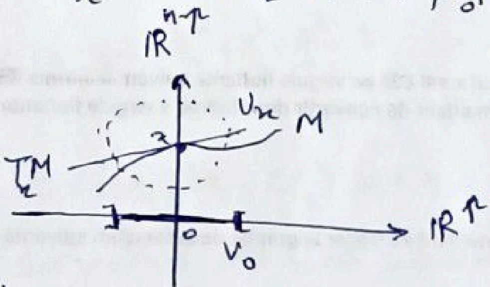
Thm (par fn implicite)

si U_x est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$ et si $f : U_x \to \mathbb{R}^{n-p}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ qui est une submersion en x avec $f(x)=0$, tels que $U_x \cap M = f^{-1}(0)$, alors $T_xM = \operatorname{Ker} d_xf$



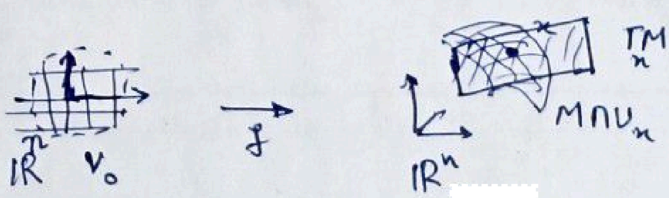
Thm. (par graphe)

si U_x est un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, si V_0 est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et $f : V_0 \to \mathbb{R}^{n-p}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, tels que $U_x \cap M = \text{graphe}(f)$ et $x = (0, f(0))$, alors $T_xM = \operatorname{Im}\{u \mapsto (u, d_0f(u))\}$



Thm (par paramétrage)

si U_x est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, si V_0 est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et $f : V_0 \to \mathbb{R}^n$ avec $f(0) = x$, est un paramétrage local $\mathcal{C}^1$ de $U_x \cap M$ en x, (qui est un plongement régulier) alors $T_xM = \operatorname{Im} d_0f$



1 Le plan affine dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est définie par le plongent régulier suivant :

$$f : (t,s) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto w + tu + sv \in \mathbb{R}^3$$ où $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ et u et v sont linéairement ind

L'espace tangent à $M = f(\mathbb{R}^3)$ est donné par $T_m M = \operatorname{Im} df_{(t,s)}$

$$\Rightarrow T_m M = df_{(t,s)}(\mathbb{R}^2) = \{ h_1 u + h_2 v \ / \ h_1, h_2 \in \mathbb{R} \} = \operatorname{Vect}\{u, v\}$$

$$TM = \bigcup_{m \in M} \{m\} \times \operatorname{Vect}\{u, v\} = M \times \operatorname{Vect}\{u, v\}$$

Ex2 Soit le cercle S^1 définie par l'immersion suivante :

$$f : t \in \mathbb{R} \longmapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 \quad , \text{ on a } S^1 = f(\mathbb{R})$$

$$T_{f(t)} S^1 = \operatorname{Im} df_t = df_t(\mathbb{R}) = \{ h(-\sin t, \cos t) \ / \ h \in \mathbb{R} \} = \operatorname{Vect}\{(-\sin t, \cos t)\} \simeq \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow TS^1 = \bigcup_{m \in S^1} \{m\} \times T_m M \qquad / \ m = f(t)$$

$$\simeq S^1 \times \mathbb{R}$$

Ex3 Soit $M = S^2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$, $x = (0,0,1)$, calculer $T_x M$

Soit : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \Rightarrow f^{-1}(0) = \underbrace{\mathbb{R}^3 \cap S^2}_{U_x} = S^2$

f est submersion ? on a : $df_x = (2x_1, 2x_2, 2x_3) = 2x \Rightarrow rg(f) = 1 = \dim(\mathbb{R})$

$\Rightarrow df_x$ est surjective $\Rightarrow f$ est submersion.

$$\Rightarrow T_{(0,0,1)} S^2 = \operatorname{Ker}(df_{(0,0,1)}) \quad , \quad df_{(0,0,1)} = (0,0,2) \Rightarrow df_{(0,0,1)} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 2h_3$$

$$\Rightarrow T_{(0,0,1)} S^2 = \{ \underbrace{(h_1, h_2, h_3)}_{h} \in \mathbb{R}^3 \ / \ df_{(0,0,1)}(h) = 0 \} = \{ (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ h_3 = 0 \}$$

$\Rightarrow T_{(0,0,1)} S^2$ est le plan d'équ. $\{x_3 = 0\}$ / $x = (x_1, x_2, x_3)$

10 Calculer l'espace tangent à la sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \|x\|_2 = 1\}$

On a déjà vu que $S^n = f^{-1}(\{0\})$ et $df_x = 2x^T$ est une submersion en tout pt. $x \in S^n$. ($f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \|x\|_2^2 - 1 = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1$.)

Alors $T_x S^n = \mathrm{Ker}(df_x) = \{h \in \mathbb{R}^{n+1} / 2x \cdot h = 0\} = \{x\}^{\perp}$ c'est l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal à x.

<u>**Ex 5**</u> Soit $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = \phi(x,y)\}$ où $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi \in \mathcal{C}^1(U)$ et U ouvert de $\mathbb{R}^2$.

* Calculer $T_m M$; $m \in \mathbb{R}^3$.

Soient $m_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $g(t,s) = (x_0+t, y_0+s, \phi(x_0+t, y_0+t))$

$\Rightarrow g(0,0) = (x_0, y_0, \phi(x_0,y_0)) = m_0$, $dg_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \phi_x(x_0,y_0) & \phi_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$, $g \in \mathcal{C}^1(U)$

* le $\mathrm{rg}(g) = 2 \Rightarrow g$ est immersion sur U.
* g est injective sur U car $g(t_1,s_1) = g(t_2,s_2) \Rightarrow t_1 = t_2$ et $s_1 = s_2$.
* g est surjective de U sur $g(U)$, de plus sa réciproque $g^{-1} : g(U) \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^2$

$g^{-1}(x,y,\phi(x,y)) = (x-x_0, y-y_0)$ et g est continue. Ainsi, g est une bijection bicontinue de U sur $g(U)$ $\Rightarrow g$ homéomorphisme sur U

$\Rightarrow g$ est un plongement régulier sur U. ($\Rightarrow M$ est une sous-variété de $\dim = 2$

* <u>l'espace tangent $T_{m_0} M$ / $m_0 = (x_0, y_0, \phi(x_0,y_0))$</u> ? ($g(0,0) = m_0$)

on a : $T_{m_0} M = \mathrm{Im}(dg_{(0,0)}) = dg_{(0,0)}(\mathbb{R}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \phi_x(x_0,y_0) & \phi_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} / (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= \{(h_1, h_2, h_1 \phi_x(x_0,y_0) + h_2 \phi_y(x_0,y_0)) / (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \mathrm{Vect}\{(1,0,\phi_x(x_0,y_0)), (0,1,\phi_y(x_0,y_0))\}$

<u>2^{nd} Méthode</u> : Notons que M est définie par le graphe de ϕ, $M = \text{graphe}(\phi)$ et $\phi \in \mathcal{C}^1(U)$

$\Rightarrow M$ est une sous-variété de $\dim = 2$, $T_{m_0} M = \mathrm{Im}\{h \longmapsto (h, d\phi_{(x_0,y_0)}(h)\}$ t.q $m_0 = (x_0,y_0,z_0)$ et $z_0 = \phi(x_0,y_0)$. $\Rightarrow T_{m_0} M = \{(h_1, h_2, d\phi_{(x_0,y_0)}(h_1,h_2)) / (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2\}$

$d\phi_{(x_0,y_0)}(h_1,h_2) = (\phi_x(x_0,y_0), \phi_y(x_0,y_0)) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \phi_x(x_0,y_0) h_1 + \phi_y(x_0,y_0) h_2 \Rightarrow T_{m_0} M = \mathrm{Vect}\{(1,0,\phi_x(x_0,y_0)), (0,1,\phi_y(x_0,y_0))\}$

Intersection et produit de sous-variétés :

Déf. Soit $M_1^{p_1}$ et $M_2^{p_2}$ des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. On dit que M_1 et M_2 sont transverses en $x \in M_1 \cap M_2$ ssi $\mathbb{R}^n = T_x M_1 + T_x M_2$.

Thm.

si $M_1^{p_1}$ et $M_2^{p_2}$ sont deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ transverses en tout pt. de $M_1 \cap M_2$, alors $M_1 \cap M_2$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^n$ et de dimension $\dim(M_1) + \dim(M_2) - \dim(\mathbb{R}^n) = p_1 + p_2 - n$.

De plus, on a $T_x(M_1 \cap M_2) = (T_x M_1) \cap (T_x M_2)$

Rem. Soit M^p une sous-variété de dim $= p$ de $\mathbb{R}^n$ et d'équ. locale régulière $f = (f_1, \dots, f_{n-p}) = 0$ au voisinage de $x \in M$. Alors $d_x f$ surjective $\Rightarrow \{ S_i := \{ f_i = 0 \}$ sont des hypersurface (i.e. sous-variété de dim $= n-1$) de $\mathbb{R}^n$ et $S_1 \cap \dots \cap S_l$ et S_{l+1} sont transverses $\forall l \leq n-p-1 \}$

Thm. Soit $M_1^{p_1}$ et $M_2^{p_2}$ deux sous-variétés de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ resp.

Alors $M_1 \times M_2 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m / x_1 \in M_1$ et $x_2 \in M_2 \}$ est une sous-variété de dimension $= p_1 + p_2$ et de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. De plus, on a :

$$T_{(x_1,x_2)}(M_1 \times M_2) = (T_{x_1} M_1 \times \{0_m\}) \oplus (\{0_n\} \times T_{x_2} M_2)$$

Preuve : TD

Ex. $\mathbb{T}^2 \cong S^1 \times S^1$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ et de dim $= 2$ de $\mathbb{R}^4$. De plus, pour tout $\underbrace{(x_1, x_2, y_1, y_2)}_{m} \in S^1 \times S^1$ on a $T_m(S^1 \times S^1) = \mathrm{Vect}\{ (x_2, -x_1, 0, 0), (0, 0, y_2, -y_1) \}$

Différentielle d'une application entre sous-variétés :

Défn. Soit $f : \Omega \subset M_1^{p_1} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M_2^{p_2} \subset \mathbb{R}^m$ où Ω un ouvert de M_1, M_1 et M_2 sont des sous-variétés de dimension p_1 et p_2 resp. de classe $\mathcal{C}^l$

- f est dite différentiable (resp. de classe $\mathcal{C}^k_{(k \leq l)}$) en un pt. $x \in \Omega$ ssi il existe un voisinage V_x de x dans $\mathbb{R}^n$ et une application $F : V_x \to \mathbb{R}^m$ différentiable (resp. $\mathcal{C}^k$) au sens usuel en x telle que $F(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega \cap V_x$.
- F est alors appelée un prolongement local de f au voisinage de x.
- f est dite différentiable sur Ω ssi f est différentiable en tout pt de Ω

Ex. la fn. f définie sur $\mathbb{S}^n$ par $f(x) = x_1 x_2 \cdots x_{n+1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{S}^{n+1}$

Ex. l'application $f : SO(n) \longrightarrow \mathbb{R}$: $f(M) = tr(M)$ est une application $\mathcal{C}^\infty$ sur $SO(n)$ (groupe spécial orthogonal).

Défn. Soit $f : M_1^{p_1} \longrightarrow M_2^{p_2}$ de classe $\mathcal{C}^k$ en $x \in \Omega \subset M_1$.
On appelle différentielle de f en x (notée $d_x f$) l'application de $T_x M_1$ dans $T_{f(x)} M_2$ définie par $d_x f(u) = (f \circ \gamma)'(0)$, où γ est un chemin de $K_x M_1$ vérifiant $\gamma'(0) = u$:

$$d_x f : T_x M_1 \longrightarrow T_{f(x)} M_2$$
$$[\gamma] \longmapsto [f \circ \gamma]$$

Proposition : si $f : \Omega \subset M_1^{p_1} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^m$ est différentiable en $x \in \Omega$ alors $d_x f$ est une application linéaire bien définie entre les espaces vectoriels $T_x M_1$ et $T_{f(x)} M_2$.

- si $F : V_x \to \mathbb{R}^m$ est un prolongement local de f au voisinage de x (i.e. si V_x est un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ et $F|_{\Omega \cap V_x} = f|_{\Omega \cap V_x}$), alors $d_x f$ est la restriction de $d_x F$ au sous-espace $T_x M_1$.

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, un pt. $x \in \mathbb{R}^n$ où f n'est pas une submersion ($rg(df_x) < m$)

(i.e. df_x n'est pas surjective) est appelé pt. critique de f.

* les pts. non critiques sont dits régulier
* Un pt $y \in \mathbb{R}^m$ sera dit une valeur régulière de f si $f^{-1}(\{y\})$ ne contient pas de pt. critique. On notera $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des pts. critique de f et $\mathcal{R}(f)$ l'ensemble des valeurs régulières de f ; ainsi $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}^m \setminus f(\mathcal{C}(f))$.

Corollaire:

Soit f une application différentiable d'un ouvert U_n de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

* supposons que $y \in \mathbb{R}^m$ soit une valeur régulière et que $f^{-1}(\{y\})$ ne soit pas vide. Alors $f^{-1}(\{y\})$ est une sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de $\dim = n-m$.

En particulier; si $n = m$, $f^{-1}(\{y\})$ est un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}^n$.

Remarque:

* tout pt. $y \in \mathbb{R}^m$ qui n'est pas dans l'image de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est valeur régulière de f.
* si $n < m$, tout pt. de $\mathbb{R}^n$ est critique et alors $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}^m \setminus f(\mathbb{R}^n)$.

proposition: Soit $f : M \longrightarrow N$ (M, N deux sous-variétés de même dimension et que M est compacte. Alors l'application:

$$\delta : \mathcal{R}(f) \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$y \longmapsto \# f^{-1}(\{y\})$$ est localement constante.

Thm. de Sard:

Lemma 1: Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application différentiable où Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $A \subset \Omega$ un sous-ensemble de mesure (de Lebesgue) nulle. Alors $f(A)$ est de mesure nulle.

Corollaire: soit $f : \Omega \to f(\Omega) \subset \mathbb{R}^m$ un difféom. et soit $A \subset \Omega$. Alors A est de mesure nulle ssi $f(A)$ est de mesure nulle

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, une application diffé. où Ω un ouvert avec $n<m$.
Alors $f(\Omega)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^m$.

Démonstration:

posons $A = \Omega \times 0 \subset \mathbb{R}^m$ avec $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Alors A est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^m$ (Thm. de Fubini) et on peut appliquer à $f \times 0 : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ le lemme 1.

Corollaire:

Soit M^p est une sous-variété de dimension p et soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application différentiable avec $p<m$. Alors $f(M)$ est de mesure nulle

Thm. de Sard:

Soient $M_1^{p_1}$ et $M_2^{p_2}$ deux sous-variétés, la $\dim(M_2) = p_2 > 0$ et soit $f : M_1 \longrightarrow M_2$ une application diffble. Alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle. (i.e. $\mu(f(\mathcal{C}(f))) = 0$)

Corollaire:

En particulier, l'ensemble $\mathcal{R}(f)$ des valeurs régulières de f est dense sur M_2.

Démonstration:

l'ensemble $f(\mathcal{C}(f))$ est d'intérieur vide (i.e. $\overset{\circ}{\overline{f(\mathcal{C}(f))}} = \phi$) sinon il ne serait pas de mesure nulle. Il s'ensuit que tout ouvert de M_2 rencontre son complémentaire $\mathcal{R}(f)$.

($\overline{\mathcal{R}(f)} = \overline{M_2 \setminus f(\mathcal{C}(f))} = M_2 \setminus \overset{\circ}{\overline{f(\mathcal{C}(f))}} = M_2$)

Soit une fn. lisse $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sur une sous-variété différentielle M de $\dim = n$.

Les pts critique de f sont les pts. $x \in M$ Tels que $d_x f = 0$.

Dfn. Un pt. critique x de f est dit dégénéré si la matrice hessienne en x, Soit $Hess_x(f) = (\partial^2_{ij} f(x))$ est singulière

si elle est non-singulière, le pt. critique x est dit non-dégénéré.

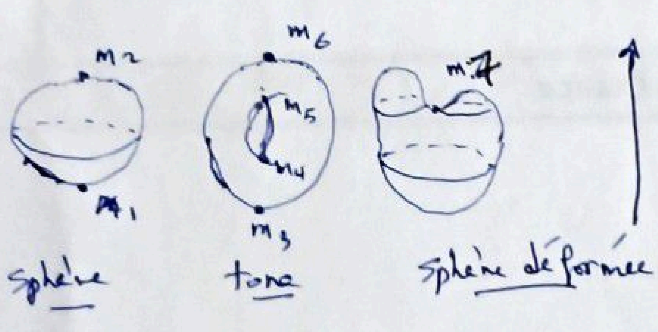
Dfn. L'indice d'un pt. critique non-dégénéré x est le nombre de valeurs propres négatives de la hessienne de f définie en x, et est noté $Ind_x(f) = k$

On désigne par $\mathcal{C}_k(f)$ l'ensemble des pts. critiques d'indice k de f.

Dfn.
Une fn. réelle sur une sous-variété $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite une fn. de Morse si elle ne possède aucun pt. critique dégénéré.

Ex.
- $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow \underline{x=0}$ pt. critique
  $\Rightarrow f''(x) = 2 \Rightarrow f''(0) \neq 0 \rightarrow x=0$ pt. non-dégénéré
- $f(x) = x^3 \longrightarrow x = 0$ pt. dégénéré.

Ex: la fn. hauteur sur une sous-variété incluse dans $\mathbb{R}^3$ est la fn. qui associe à chaque pt. de la sous-variété la valeur de sa dernière coordonnée ces fns. fournissent de bons exemples de fns. de Morse.



. les pts identifiés sur la figure $(m_1, m_2, \dots, m_7)$ sont des pts critique pr. la fn. hauteur.
m_2 et m_6 sont des maximums (pts. critiques d'indice 2), m_7 pt. selle (d'indice 1) (aussi m_4 et m_5), m_1 et m_3 des minimums (d'indice 0)

Lemme de Morse

. Soit m un pt. critique non-dégénéré d'indice k d'une fn. de Morse $f: M^n \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors il existe une carte (U_m, ϕ) de M autour de x telle que :

$$\phi(m) = 0 \in \mathbb{R}^n$$

$$f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(m) - \sum_{j=1}^{k} x_j^2 + \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2 \quad / \quad m \in M, \ x = (x_1, \dots, x_n) \text{ cordonnée dans la carte locale de } m.$$

pour tout $(x_1, x_2, \dots x_n) \in Im(\phi)$. cette carte est appelée une carte de Morse.

Ex.

Si $\dim = 2$, pour local minima $\to$ l'indice $= 0$ $\to f \circ \phi^{-1}(x) = x_1^2 + x_2^2 + f(m)$ / $x = (x_1, x_2)$

saddle pt. $\to$ l'indice $= 1$ $\to f \circ \phi^{-1}(x) = x_1^2 - x_2^2 + f(m)$

local maxima $\to$ l'indice $= 2$ $\to f \circ \phi^{-1}(x) = -x_1^2 - x_2^2 + f(m)$

} carte locale de Morse

~~Rem.~~

Rem. dans une carte de Morse, $d_x f$ ne peut s'annuler qu'au pt. $x = m$.

cela entraîne les deux corollaires suivants :

Corollaire : les pts. critiques d'une fn. de Morse sont isolés.

Corollaire : Une fn. de Morse sur une sous-variété compacte possède un nombre fini de pts. critiques.

Thm. (généricité des fns. de Morse) : Soit M une sous-variété compacte. Alors l'ensemble des fns. de Morse sur M forme un ouvert dense dans $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Sous-variété à bord :

Soient $M\subset\mathbb{R}^n$, $p\in\mathbb{N}$ $(p\leq n)$ et soit $H_+^p=\{(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p : x_p\geq 0\}$

On dit que M est une sous-variété à bord de dimension p, si pour tout $x\in M$, il existe $U_x\subset\mathbb{R}^n$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ voisinage de x, V_0 un ouvert voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme : $\phi : U_x\longrightarrow V_0$
$$x\longmapsto(\phi_1(x),\dots,\phi_n(x))$$

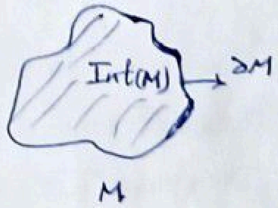
tels que $\phi(x)=0$ et $\phi(U_x\cap M)=V_0\cap(H_+^p\times\{0\}_{(n-p)})$

i.e. $(x\in U_x\cap M)\Leftrightarrow(\phi_p(x)\geq 0,\ \phi_{p+1}(x)=\dots=\phi_n(x)=0)$.

* Le bord de la sous-variété M est le sous-ensemble ∂M tel que :
$$\phi(U_x\cap\partial M)=V_0\cap(\mathbb{R}^{p-1}\times\{0\}_{(n-p+1)})$$

i.e. $(x\in U_x\cap\partial M)\Leftrightarrow(\phi_p(x)=\phi_{p+1}(x)=\dots=\phi_n(x)=0)$

* L'intérieur de la sous-variété M est l'ensemble $\mathrm{Int}(M)=M-\partial M$



M

Rem

① $M=\bigcup_\phi(\phi^{-1}(V_0\cap(H_+^p\times\{0\}))$

② $\partial M=\bigcup_\phi\phi^{-1}(V_0\cap(\mathbb{R}^{p-1}\times\{0\}))$

③ ∂M est une sous-variété de dimension $p-1$

④ L'intérieur $\mathrm{Int}(M)$ ne signifie pas l'intérieur topologique $(\mathring{M})$ (si $p<n\Rightarrow\mathring{M}=\phi$)

⑤ Si $p=n$ alors $\mathrm{Int}(M)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et ∂M est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

⑥ $\mathrm{Int}(M)=M\setminus\partial M$.

⑦ une sous-variété sans bord peut être vue comme une sous-variété à bord de bord vide.

Ex. H_+^p est une sous-variété à bord de dim $=p$ de $\mathbb{R}^p$

H_+^p est une sous-variété à bord de dim$=p$ de $\mathbb{R}^p$, $\partial H_+^p=\mathbb{R}^{p-1}\times\{0\}$

Il suffit d'utiliser la déf ~~dans~~ avec $U_x=V_0=\mathbb{R}^p$ et $\phi=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p}$