Exo 1 ① on a $df_1(x,y) = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ cette matrice est tjrs de rang 2 (= la dimension de l'espace de départ), donc f_1 une immersion en tout pt de $\mathbb{R}^2$, mais pas une submersion.

② on a $df_2(x,y,z) = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ cette matrice est tjrs de rang 2 (= la dim de l'espace d'arrivée), donc f_2 est une submersion en tout pt de $\mathbb{R}^3$, mais pas une immersion.

③ on a $df_3(x,y,z) = (y+3z, x+2z, 3x+2y)$ cette matrice est identiquement nulle si $x=y=z=0$ $\Rightarrow$ la fn. f_3 est une submersion en tout pt. $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ (mais pas une immersion).

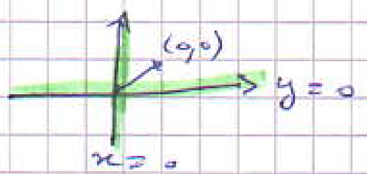
⑤ on a $df_5(x,y) = \begin{pmatrix}e^x&0\\0&-\sin y\\0&\cos y\end{pmatrix}$ cette matrice est de rang 2 pr. tout pt $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. En effet; $e^x\neq 0$ et le vecteur $\begin{pmatrix}-\sin y\\ \cos y\end{pmatrix}$ ne peut pas être le vecteur nul. Ainsi f_5 est une immersion en tout pt. de $\mathbb{R}^2$ (mais pas une submersion).

Exo 2. ① S_1 est le graphe de la fn. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x,y)\mapsto x-2(x^2+y^2)$ c'est donc une sous-variété de dim $= 2$ de $\mathbb{R}^3$

② S_2 est le graphe de la fn. $f_2 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}; x\mapsto x^2$, c'est une sous-variété de dim $= 1$ de $\mathbb{R}^2$.

③ on note que $f_3(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ de sorte que $S_3 = f_3^{-1}(\{0\})$, Alors f_3 est une submersion en chaque pt. de S_3. En effet $df_3 = (2x, 2y, 2z)$ et df_3 est surjective sauf si $x=y=z=0$ mais ce pt. n'est pas un élément de S_3. Ainsi S_3 est une sous-variété de dim $= 2$ de $\mathbb{R}^3$.

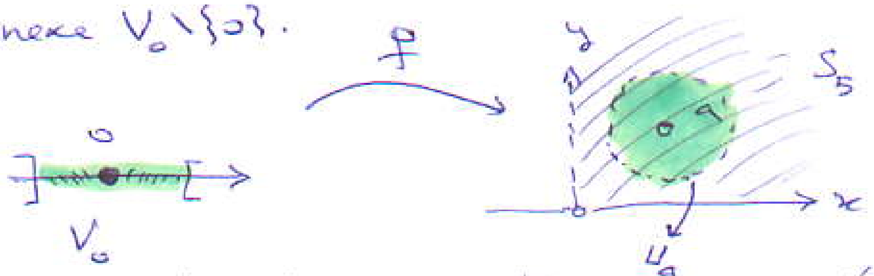
④ S_4 n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, car $(0,0)$ est un pt. double de S_4



⑤ S_5 n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. Raisonnons par l'absurde

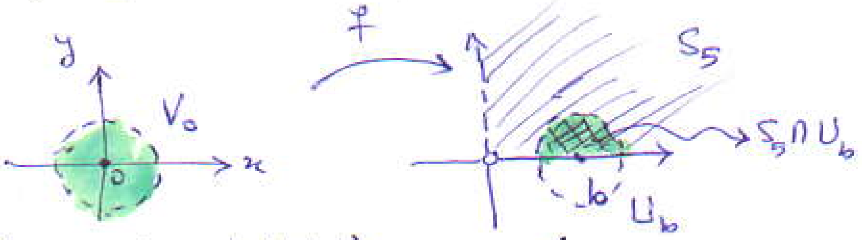
- supposons que S_5 est une sous-variété de dim = 1, posons $a=(1,1)\in S_5$

$\exists$ Un voisinage ouvert V_0 de 0 dans $\mathbb{R}$, U_a un voisinage de a dans $\mathbb{R}^2$ et $f : V_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une immersion vérifiant $f(0)=a$ et $f_{|V_0}$ est un homéo. de V_0 sur $S_5 \cap U_a$, en particulier, $f^{-1}_{|V_0}$ doit être continue, c'est impossible. car elle envoie l'ensemble connexe $S_5 \cap U_a \setminus \{a\}$ sur l'ensemble non-connexe $V_0 \setminus \{0\}$.



- Supposons maintenant que S_5 soit une sous-variété de dim = 2, Alors $\exists\ V_0$ voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^2$, U_b un voisinage ouvert de $b=(1,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et $f : V_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une immersion vérifiant $f(0)=b$.

$f_{|V_0}$ est un homéom. de V_0 sur $S_5 \cap U_b$ / mais c'est impossible, car $S_5 \cap U_b \setminus \{b\}$ est simplement connexe alors que $V_0\setminus\{0\}$ ne l'est pas



(Il y a un trou ds $V_0\setminus\{0\}$)

(Il n'y a pas de trou dans $S_5 \cap U_b \setminus\{b\}$)

Ex3. posons $f(x,y)=x^2-y^2-\alpha$ de sorte que $f^{-1}(\{0\})=S$, on a donc $df_{(x,y)}=(2x,-2y)$ est une surjection si $(x,y)\neq(0,0)$. Ainsi, f ~~est~~ une submersion partout sauf en $(0,0)$.

→ si $\alpha \neq 0$: $(0,0)\notin S$ et f est une submersion en tout pt. de S, S est donc une sous-variété.

→ si $\alpha = 0$: S est la réunion de deux droites distincts qui se coupent en 0. ce n'est pas une sous-variété car elle admet un pt. double.

Exo 4

* Les parties de $\mathbb{R}^2$: (1), (3) et (6) sont des sous-variétés C^∞ mais les parties : (2), (4), (5) et (7) ne le sont pas car elles présentent des recoupements.

* Les parties de $\mathbb{R}^3$: (1), (2), (4) et (5) sont des sous-variétés C^∞ mais les parties (3) et (6) ne le sont pas car elles ~~sont~~ des coins.

Ex 5 On pose $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-14,\ x^3+y^3+z^3-36)$, on calcule d_mf pour $m=(x,y,z)$ $m \in M = \{x^2+y^2+z^2=14 \wedge x^3+y^3+z^3=36\}$, on obtient :

$$d_mf = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix}$$

Pour montrer que le $rg(f)=2$, il suffit de montrer que ce système n'a pas de solutions sur M. c-à-d :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14 \\ \wedge \\ x^3+y^3+z^3=36 \\ \wedge \\ \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & 3y^2 \end{vmatrix}=0 \wedge \begin{vmatrix} 2x & 2z \\ 3x^2 & 3z^2 \end{vmatrix}=0 \wedge \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=14 \ \wedge \\ x^3+y^3+z^3=36 \ \wedge \\ 6xy(x-y)=0 \ \wedge \\ 6xz(x-z)=0 \ \wedge \\ 6yz(y-z)=0 \end{cases}$$

Nous avons $2^3=8$ cas possible, mais comme notre système est symétrique par rapport à (x,y,z), il suffit de ne traiter que les cas suivants :

- $\underline{x=0,\ y=0,\ z=0}$ $\longrightarrow$ $\nexists$ sol.
- $\underline{x=0,\ y=0,\ z\neq 0}$ $\longrightarrow$ $z^2=14$ et $z^3=36$ impossible $\longrightarrow$ $\nexists$ sol.
- $\underline{x=0,\ y\neq 0,\ z\neq 0}$ $\longrightarrow$ $y=z$ et $2y^2=14$ et $2y^3=36$ $\longrightarrow$ $\nexists$ sol.
- $\longrightarrow$ $x=y=z$ et $3x^2=14$ et $3x^3=36$ $\longrightarrow$ $\nexists$ sol.

$rg(f)=2$. Depuis qu'on a $M=f^{-1}(\{0\})$ et $rg_m(f)$ ~~...~~ $=2$, $\forall m\in M$

$\Rightarrow$ 0 une valeur régulière pour f et $M=f^{-1}(\{0\})$

$\Rightarrow$ M est une sous-variétés de $\mathbb{R}^3$ de dimension $3-2=1$.

Ex6

On remarque que f est bien $\mathcal{C}^\infty$ et $0\leq f(x,y,z)\leq 1$.

- La ligne de niveau $\{f=0\}$ est la droite $\{x=y=0\}$ et la ligne de niveau $\{f=1\}$ est le cercle $\{z=x^2+y^2-1=0\}$.

Ces deux lignes de niveau sont des sous-variétés de dim $=1$ de $\mathbb{R}^3$.

- Maintenant, nous allons montrer que f est submersion sur les autres lignes de niveau de f.

Par calcul direct, $\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{2(x^2+y^2)z}{(x^2+y^2+z^2+(1-x^2+y^2)^2)^2}=0$ exactement quand $z=0$ ou $x=y=0$.

Toujours par calcul immédiat, en un pt. où $z=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ exactement qd $x=0$ ou $x^2+y^2-1=0$, symétriquement, en un pt. où $z=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ qd $y=0$ ou $x^2+y^2-1=0$.

De ces calculs on voit que f est submersion hors de la droite $\{x=y=0\}$ et du cercle $\{z=x^2+y^2-1=0\}$.

Donc les lignes de niveau de f hors de 0 et 1 sont des sous-variétés de dim $=2$ de $\mathbb{R}^3$.

soit P_+ le demi-plan $P_+ = \{(x,0,z) \mid z>0\}$, on a $T^2 \cap P_+ = C$ le cercle centré en $(R,0,0)$ et de rayon r, donc $R_\theta T^2 \cap R_\theta P_+ = R_\theta C$

$\Rightarrow \left(\bigcup_\theta R_\theta T^2\right) \cap \left(\bigcup_\theta R_\theta P_+\right) = \bigcup_\theta R_\theta C$, comme $\bigcup_\theta R_\theta P_+ = \mathbb{R}^3$ et $R_\theta T^2 = T^2$

on aît $T^2 \cap \mathbb{R}^3 = \bigcup_\theta R_\theta C \Rightarrow T^2 = \bigcup_\theta R_\theta C$.

Dit autrement, on obtient T^2 en faisant tourner C autour de l'axe (oz)

Ex 7

(1) Si on prend un pt $m = (x,y,z) \in S_f \Rightarrow y^2 + z^2 = f^2(x)$, ceci suggère de définir l'ouvert $O \subset \mathbb{R}^3$ comme $O =]a,b[\times \mathbb{R}^2$ et la fn. $F : O \longrightarrow \mathbb{R}$ par:

(2)
$$F(x,y,z) = y^2 + z^2 - f^2(x)$$

on vient de montrer qu'on a $S_f \subset F^{-1}(0)$. Pour montrer l'inclusion dans l'autre sens on prend donc $(x,y,z) \in F^{-1}(0) \Rightarrow \left(\frac{y}{f(x)}\right)^2 + \left(\frac{z}{f(x)}\right)^2 = 1 \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}$ t.q on a $\frac{y}{f(x)} = \cos\theta$ et $\frac{z}{f(x)} = \sin\theta \Rightarrow (x,y,z) \in S_f$ et donc l'égalité $S_f = F^{-1}(0)$.

(2) la fn. f étant de classe C^1, F l'est aussi. Si on calcule sa diff., on trouve pour $m = (x,y,z) \Rightarrow d_mF = (-2f(x)f'(x), 2y, 2z)$.

Maintenant on remarque que ~~$m \in F^{-1}(0)$~~ pour $m \in F^{-1}(0)$, on a $y^2 + z^2 = f^2(x) > 0$ car f est str. +, il n'est ~~pas~~ donc pas possible que y et z sont en même temps nuls. $\Rightarrow$ pour $m \in F^{-1}(0)$, $d_mF \neq 0 \Rightarrow rg(F) = 1 \Rightarrow S_f$ est une sous-variété de dim $= 3 - 1 = \underline{\underline{2}}$ de $\mathbb{R}^3$

(3) • L'injectivité de $\varphi :]a,b[\times]\alpha, \alpha+2\pi[\longrightarrow S_f$ est immédiate, car si $\varphi(x_1,\theta_1) = \varphi(x_2,\theta_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ et $\theta_1 = \theta_2$ psq $\underline{\underline{f(x)>0}}$

• on calcule donc $d_{(x,\theta)}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(x)\cos\theta & -f(x)\sin\theta \\ f'(x)\sin\theta & f(x)\cos\theta \end{pmatrix}$, la $1^{\text{ère}}$ colonne est non-nulle $\neq 0$

et parce que $f(x) > 0$, la $2^{\text{ème}}$ colonne ne peut pas être nulle non-plus. On note