Exercices sur le chapitre 2 : Espaces affines euclidiens

Exercice 01

Soient $(\cdot \mid \cdot)$ un produit scalaire et $|| \cdot ||$ la norme associe à $(\cdot,\cdot)$.
Montrer les affirmations suivantes :

1. Pour tout $u, v \in E$: $\left||u \pm v|\right|^2 = \left||u|\right|^2 \pm 2(u|v) + \left||v|\right|^2$.
2. Identité du parallélogramme : pour tout $u, v \in E$:
$$\left||u+v|\right|^2 + \left||u-v|\right|^2 = 2\left||u|\right|^2 + 2\left||v|\right|^2.$$
3. Identité de polarisation : pour tout $u, v \in E$:
$$(u|v) = \frac{1}{2}\left(\left||u+v|\right|^2 - \left||u|\right|^2 - \left||v|\right|^2\right).$$
4. Inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout $u, v \in E$:
$$|(u|v)| = \left||u|\right| \times \left||v|\right|.$$

Solution.

1. $$\begin{aligned}\left||u+v|\right|^2 &= \big((u+v)\big|(u+v)\big)\\ &= \big(u\big|(u+v)\big) + (v|(u+v))\\ &= (u|u) + (u|v) + (v|u) + (v,v)\\ &= \left||u|\right|^2 + 2(u|v) + \left||v|\right|^2.\end{aligned}$$
   De même
   $$\begin{aligned}\left||u-v|\right|^2 &= \big((u-v)\big|(u-v)\big)\\ &= \big(u\big|(u-v)\big) - (v|(u-v))\\ &= (u|u) + (u|(-v)) - (v|u) - (v,-v)\\ &= (u|u) - (u|v) - (v|u) - (v,-v)\\ &= \left||u|\right|^2 + 2(u|v) + \left||v|\right|^2.\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\left||u+v|\right|^2 + \left||u-v|\right|^2 = &\left||u|\right|^2 + 2(u|v) + \left||v|\right|^2\\ &+ \left||u|\right|^2 + 2(u|v) + \left||v|\right|^2\end{aligned}$$

$$= 2||u||^2 + 2||v||^2.$$

3. $On\ a\ ||u+v||^2 = ||u||^2 + 2(u|v) + ||v||^2$,

donc $2(u|v) = ||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2$, d'où

$$(u|v) = \frac{1}{2}\left(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\right).$$

4. Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $u, v \in E$, on a

$0 \leq \big((xu+v)\big|(xu+v)\big) = x^2||u||^2 + 2x(u|v) + ||v||^2$,

$x^2||u||^2 + 2x(u|v) + ||v||^2$ est un polynôme en x de degré 2 avec les coefficients $a = ||u||^2$,$b = 2(u|v)$ et $c = ||v||^2$, ce polynôme est positive pour tous $x \in \mathbb{R}$, donc on a

$(u|v)^2 \leq ||v||^2||v||^2$, c-à-dire $|u,v| \leq ||u|| \times ||v||$.

Exercice 02. (Théorème de Pythagore)
Deux vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$$

Solution.

Supposons u et v orthogonaux, alors

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + 2\underbrace{(u|v)}_{=0} + ||v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$$

Inversement, si $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$, alors

$(u|v) = \frac{1}{2}\left(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\right) = 0$, donc u et v sont orthogonaux.

Exercice 03.

On munit $\mathbb{R}_1[X]$ du produit scalaire $(p|q) = \int_{-2}^{2} p(x)q(x)dx$.

Soit $p_0(x) = \frac{1}{2}, p_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x$.

1. Montrer que (p_0, p_1) est une base orthonormé de $\mathbb{R}_1[X]$ munit du produit scalaire $(\cdot, | \cdot)$.
2. Soit $q(x) = ax + b$ et $r(x) = cx + d$ deux éléments de $\mathbb{R}_1[X]$. Calculer les composante de q et r dans la base (p_0, p_1).
3. En déduire la valeur de $\int_{0}^{1} q(x)r(x)dx$.

Solution.

1. $\int_{-2}^{2} p_0(x)p_1(x)dx = \frac{\sqrt{3}}{8}\int_{-2}^{2} xdx = 0$, $\int_{-2}^{2}(p_0(x))^2 dx = \int_{-2}^{2} \frac{1}{4} dx = 1$ et $\int_{-2}^{2}(p_1(x))^2 dx = \frac{3}{16}\int_{-2}^{2} x^2 dx = 1$, donc (p_0, p_1) est une base orthonormée
2. On suppose que $q\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ et $r\begin{pmatrix}\gamma\\ \lambda\end{pmatrix}$ dans la base (p_0, p_1).

Alors, $\alpha = \int_{-2}^{2} p_0(x)q(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(ax + b)dx = 2b$.

$$\beta = \int_{-2}^{2} p_0(x)q(x)dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-2}^{2} x(ax + b)dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}a.$$

De même, $\gamma = 2d$ et $\lambda = \frac{4\sqrt{3}}{3}c$.

3. $\int_{0}^{1} q(x)r(x)dx = (q|r) = \alpha\gamma + \beta\lambda = 4bd + \frac{16}{3}ac$.

Exercice 04.

1. Déterminer les valeurs de $(a, b) \in \mathbb{R} \times R_+$, pour que $(1, x)$ soit une base orthogonale de $\mathbb{R}_1[X]$ munit du produit scalaire défini par
$$\forall p, q \in \mathbb{R}_1[X]: (p|q) = \int_{a}^{b} p(x)q(x)dx.$$
2. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

Solution.

1. $(1,x)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_1[X]$ si et seulement si $(1|x)=0$ c-à-dire $\int_a^b xdx=0$, d'où $a=-b$.
2. On a $\int_{-b}^{b} 1^2dx=2b$ et $\int_{-b}^{b} x^2dx=\frac{2}{3}b^3$.

Une base orthonormée de de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire est $\left(\sqrt{\frac{1}{2b}},\sqrt{\frac{3}{2b^3}}x\right)$.

Exercice 05.
Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire défini par : $\forall p,q\in\mathbb{R}_2[X]$: $(p|q)=\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.

Solution.

La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $(u_0,u_1,u_2)=(1,x,x^2)$ n'st pas orthonormée pour ce produit scalaire. On utilise l'algorithme de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ à partir de la base $(1,x,x^2)$.

On pose $\boxed{v_0=u_0}$.

Soit $v_1=u_1+\alpha v_0$ alors $v_0\perp v_1=0$ si et seulement si $\alpha=-\frac{(u_0|u_1)}{(v_0|v_0)}=0$ car

$(v_0|v_0)=(u_0|u_0)=\int_{-1}^{1}1^2dx=\frac{1}{2}$ et $(u_0|u_1)=\int_{-1}^{1}xdx=0.$

alors, $\boxed{v_1=u_1}$.

Soit $v_2=u_2+\beta v_0+\gamma v_1$.

$$\begin{cases} v_2 \perp v_0 \\ v_2 \perp v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_2|v_0) + \beta(v_0|v_0) = 0 \\ (u_2|v_1) + \gamma(v_1|v_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\dfrac{(u_2|v_0)}{(v_0|v_0)} = -\dfrac{1}{3} \\ \gamma = -\dfrac{(u_2|v_1)}{(v_1|v_1)} = 0 \end{cases}.$$

$v_2 = x^2 - \frac{1}{3}$.

La base orthonormée cherchée est

$$\left(\frac{v_0}{||v_0||}, \frac{v_1}{||v_1||}, \frac{v_2}{||v_2||}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}x, \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1)\right).$$

Dans la suite, $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3 muni du repère orthonormé (O, e_1, e_2, e_3).

Exercice 06.

1) Soit P un plan de $\mathcal{E}$ passant par le point $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$ tel que le vecteur $u\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est orthogonal à $Dir(P)$.

Ecrire une équation de P.

2) Soit Q le plan de $\mathcal{E}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Montrer que le vecteur $u\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est orthogonal à $Dir(Q)$.

3) Soit D une droite de $\mathcal{E}$ passant par le point $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$ tel que les vecteurs $u\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $u'\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux à $Dir(D)$.

Ecrire des équations de D.

Remarque. Soit $\mathcal{F}$ un sous espace affine de $\mathcal{E}$.

Si $u \in E$ est orthogonal à $Dir(F)$, on dit que u est normale à $\mathcal{F}$.

Solution.

1) Si $M(x,y,z) \in P$ alors $\in Dir(P)$, donc $\left(u\middle|\overrightarrow{AM}\right) = 0$, ainsi pour tout $M(x,y,z) \in P$: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$, donc une équation de P est : $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$.

2) On a $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. On suppose $a \neq 0$.

On a $\left(-\frac{d}{a}, 0,0\right), \left(-\frac{d+b}{a}, 1,0\right), \left(-\frac{d+c}{a}, 0,1\right) \in Q$.

Donc $u_1 = \begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 \begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in Dir(Q)$, et comme u_1 et u_2 ne sont pas liés, ils forment une base de $Dir(Q)$.

Doc pour monter que $u \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est orthogonal à $Dir(Q)$, il suffit de vérifier que $(u|u_1) = (u|u_2) = 0$.

On a $(u|u_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ et $(u|u_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

Si $M(x,y,z) \in D$ alors $\in Dir(D)$, donc $\left(u\middle|\overrightarrow{AM}\right) = \left(u'\middle|\overrightarrow{AM}\right) = 0$, ainsi pour tout $M(x,y,z) \in P$: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$, un systèmes d'équation de (D) est

$$\begin{cases} ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 \\ a'x + b'y + c'z = a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 \end{cases}$$

Exercice 07.

Soit P le plan de $\mathcal{E}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et D la droite de $\mathcal{E}$ passant par l'origine et du vecteur directeur $u \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Soit $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$. Déterminer $d(A,D), d(A,P)$.

Solution.

Détermination de $\boldsymbol{d(A,D)}$

On a $D:\begin{cases} x=\alpha t \\ y=\beta t \\ z=\gamma t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$. On cherche H le projection orthogonale de A sur D. On a $H(\alpha t,\beta t,\gamma t)$ avec $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\alpha t-x_0\\ \beta t-y_0\\ \gamma t-z_0\end{pmatrix}=0$, alors $t=\frac{\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, donc $H(\underbrace{\alpha\frac{\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}_{x_H},\underbrace{\beta\frac{\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}_{y_H},\underbrace{\gamma\frac{\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}_{z_H})$,

donc $d(A,D)=AH=\sqrt{(x_H-x_0)^2+(y_H-y_0)^2+(z_H-z_0)}$.

Détermination de $\boldsymbol{d(A,P)}$

Soit $v\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$. On a $M(x,y,z)\in P\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}.v=-d$.

Soit $H(x,y,z)$ le projection orthogonale de A sur P. Alors il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AH}=\lambda v$, c-à-dire $\overrightarrow{OH}=\lambda v+\overrightarrow{OA}$, et comme $H\in P$, on a $\overrightarrow{OH}.v=-d$, donc $\left(\lambda v+\overrightarrow{OA}\right).v=-d$, alors

$\lambda v.v=-d-\overrightarrow{OA}.v$, d'où $\lambda(a^2+b^2+c^2)=-d-ax_0-b_{y0}-cz_0$

ainsi $\lambda=\frac{-d-ax_0-b_{y0}-cz_0}{a^2+b^2+c^2}$.

$$d(A,P)=AH=|\lambda|\times||v||=\frac{|ax_0+b_{y0}+cz_0+d|}{a^2+b^2+c^2}\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$=\frac{|ax_0+b_{y0}+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Exercice 08.
Soient $A(1,2,6)$, P le plan d'équation $2x-3y+z-5=0$ et D la droite de paramétrage $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=-t+5 \\ z=3t-2 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

1) Déterminer la droite Δ passant par et orthogonale à P.
2) Déterminer le plan Q passant par $A\in\mathcal{E}$ et orthogonal à D.

Solution.

1) On sait que $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à P, donc Δ est orienté par $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$,
donc Δ: $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-3t+2 \\ z=t+6 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$..
2) On a $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal à Q, donc pour tout $M(x,y,z)\in Q$ on a
$\overrightarrow{AM}.\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}=0$, donc $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}=0$. Une équation de Q est $2x-y+3z-18=0$.

Exercice 09.
Soit $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 2 muni du repère orthonormé (O, e_1, e_2).

Soit f l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tels que
$\begin{cases} x'=ax-ay \\ y'=ax+ay-1 \end{cases}$, avec a un réel non nul.

1) Déterminer l'ensemble de points fixes de f.
2) Montrer que f est une application affine.
3) Montrer que f est une similitude.

4) Quelles sont les valeurs du réel a pour laquelle f soit une isométrie ?
5) Monter que f est bijective et que f^{-1} est aussi une similitude.

Solution.

1) On résout le système $\begin{cases} x = ax - ay \\ y = ax + ay - 1 \end{cases}$,

Si $a = 1$ alors f admet un seule point fixe (1, 0).

Si $a \neq 1$ alors f admet un seule point fixe $(\frac{a}{2a^2-2a+1}, \frac{a-1}{2a^2-2a+1})$.

2) Pour tous $M \in \mathcal{E}$ et $u \in E$, on pose $\varphi(u) = \overrightarrow{f(M)f(M+u)}$.

Si $u\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ et $M(x, u)$ alors $(M+.u)(x+\alpha, y+\beta)$, donc

$f(M)(ax - ay, ax + ay - 1)$

$f(M+u)(ax + a\alpha - ay - a\beta, ax + a\alpha + ay + a\beta - 1)$, alors

$\varphi(u) = \begin{pmatrix} a(\alpha - \beta) \\ a(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$. L'application φ est linéaire donc f est affine et $Lin\, f = \varphi$.

3) $\left|\left|Lin\, f(u)\right|\right| = \sqrt{2a^2(\alpha^2 + \beta^2)} = \sqrt{2}|a|||u||$. Donc f est une similitude de rapport $\sqrt{2}|a|$.
4) f est une isométrie si $\sqrt{2}|a| = 1$, c-à-dire $a \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
5) On sait que toute similitude est bijective, donc f est bijective. L'application réciproque d'une application affine de partie linéaire ψ est une application affine de partie linéaire ψ^{-1}, donc

f^{-1} est affine de partie linéaire $\varphi^{-1}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} = \frac{1}{2a}\begin{pmatrix}(\alpha + \beta) \\ (\alpha - \beta)\end{pmatrix}$, ainsi on peut montrer que f^{-1} est une similitude de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}|a|}$.