Chapitre 2 : Espaces affines euclidiens

Dans tout ce chapitre E désigne un espace vectoriel sur le corps de nombres réels $\mathbb{R}$ de dimension n.

2.1 Définitions

Définition 2.1.
On dit que la fonction $(\cdot \mid \cdot): E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E si $(\cdot \mid \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, autrement dit la fonction $(\cdot,\cdot)$ vérifie les propriétés suivantes.

1. Linéarité par rapport à la première variable : pour tous $v \in E$, l'application $u \mapsto (u|v)$ est linéaire.
2. Linéarité par rapport à la deuxième variable : pour tous $u \in E$ l'application $v \mapsto (u|v)$ est linéaire.
3. Symétrique : pour tout $u, v \in \mathbb{R}$ $(u|v) = \lambda(v|u)$,
4. Positivité : pour tout $u \in E$, $(u|u) \geq 0$.
5. Définie : $(v|v) = 0$ si et seulement si $v = 0_E$.

Le produit scalaire de $x, y \in E$ sera notée $(\cdot \mid \cdot)$ ou $x \cdot y$.

Exemple.

- Le produit usuel dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}$.
- L'application définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par dans $\mathbb{R}$, $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ pour tous $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ **canonique**.
- Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble de polynôme de degré inférieur ou égal à n à coefficient dans $\mathbb{R}$. Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, alors l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par dans $\mathbb{R}$, $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ pour tous $(f, g) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

- L'application $(\vec{u}|\vec{v}) = \left||u|\right| \times ||v||\cos(\vec{u},\vec{v})$ définit un produit scalire sur $\overrightarrow{E_{(\pi)}}$ (l'ensemble de vecteurs du plan usuel (π)).

Définition 2.2.
Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Exemple.
Lorsqu'on munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique : on parle de la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2.3.
- Un espace vectoriel réel de dimension infinie muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.
- Dans ce cours on ne s'intéresse qu'à des espaces euclidiens.

Proposition 2.2.
Soit $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur E, alors

1. L'application $u \mapsto \left||u|\right| = \sqrt{(u|u)}$ définie un norme sur E dite la norme associe au produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$, c-à-dire elle vérifie les propriétés suivantes :
a. pour tout $u \in E$: $||u|| \geq 0$,
b. pour tous $u \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$: $\left||\alpha u|\right| = |\alpha|\left||u|\right|$.
c. pour tout $u, v \in E$: $\left||u - v|\right| \leq \left||u|\right| + ||v||$.

2. La fonction $d(u, v) \mapsto \left||u - v|\right|$ définie une distance sur E dite la distance associe à la norme $|| \cdot ||$, c-à-dire elle vérifie les propriétés suivantes :
α. pour tout $u, v \in E$: $d(u, v) \geq 0$, et $d(u, u) = 0$ si et seulement si $u = 0$.
β. pour tous $u, v \in E$: $d(u, v) = d(v, u)$.
γ. pour tout $u, v, w \in E$: $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

2.2 Orthogonalité

Dans toute la suit E désigne un espace Euclidien muni du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$

Définition 2.3

Soit $u, v \in E$, on dit que u et v sont ortogonaux et on écrit $u \perp v$ si

$$(u|v) = 0.$$

Exemple .

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidien canonique, les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Définition 2.4

Soit $(u_i), 1 \leq i \leq N$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille $(u_i)_{1\leq i \leq N}$ est orthogonale ses les vecteurs u_i sont deux à deux orthogonaux autrement dit $\left(u_i \middle| u_j\right) = 0$, pour $i \neq j \; et \; 1 \leq i,j \leq N$.
- La famille $(u_i)_{1\leq i \leq N}$ est dite orthonormée ou ortho-normale si elle est orthogonale et ses les vecteurs u_i vérifient $||u_j|| = 1, \; 1 \leq j \leq N$.

  En particulier, si $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E telle que la famille $(e_i)_{1\leq i \leq n}$ est orthogonale (ortho-normale) alors on dit que la base B est orthogonale (ortho-normale**).**

Exemlpe.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidien canonique, la base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ est orthonormée.

Proposition 2.5

- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- En particulier, toute famille orthogonale de n vecteurs non nuls de E est une base de E.

Démonstration.

Soit $(u_i)_{1\leq i\leq N}$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E, c-à-dire $(u_i|u_j) = 0$, si $i \neq j$ et $\left|\left|u_j\right|\right| \neq 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i = 0$, alors

Pour tout $1 \leq j \leq N$: on a

$\left((\sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i)|u_j\right) = 0$, donc $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i (u_i|u_j) = 0$, alors $\alpha_j \left|\left|u_j\right|\right| = 0$,

donc $\alpha_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq N$.

Théorème 2.6.

Soient $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $x(x_1, x_2, \dots, x_n)_B, y(y_1, y_2, \dots, y_n)_B \in E$ alors,

1. $x_i = (x|e_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
2. $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
3. $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$.

Démonstration.

On a $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$, donc

1. $(x|e_i) = ((x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n)|e_i)$

$$= x_1 \underbrace{(e_1|e_i)}_{=0} + x_2 \underbrace{(e_2,e_i)}_{=0} + \cdots + x_i \underbrace{(e_i,e_i)}_{=1} + \cdots + x_n \underbrace{(e_n,e_i)}_{=0}$$

$$= x_i.$$

2. $(x,y) = ((x_1e_1 + \cdots + x_ne_n)|(y_1e_1 + \cdots + x_ne_n))$

$$= (x_1e_1|(y_1e_1 + \cdots + x_ne_n)) + \ldots + (x_ne_n|(y_1e_1 + \cdots + x_ne_n))$$

$$= x_1y_1(e_1|e_1) + x_2y_2(e_2,e_2) + \cdots + x_ny_n(e_n|e_n)$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

3. $||x||^2 = (x|x) = x_1x_1 + x_2x_2 + \cdots + x_nx$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}.$$

Remarque 2.7.
Lorsqu' on fixe une base orthonormée dans E, les règles de calculs sont les mêmes que dans $\mathbb{R}^n$ munit de sa structure euclidien canonique et de sa base canonique.

2.3 Ortho-normalisation de Gram-Schmidt

Nous avons déjà vu que l'existence d'une base orthonormée rend les calculs dans l'espace euclidien semblables à ceux de $\mathbb{R}^n$. Dans ce paragraphe, nous allons voir qu'on peut toujours construire une base orthonormée à partir d'une base quelconque d'un espace euclidien.

Théorème 2.8.
Soit $(u_1, \ldots, u_N)$ une famille libre de vecteurs de E. Il existe une famille orthonormée $(e_1, \ldots, e_N)$ vérifiant :
pour tout $1 \leq k \leq N$: $vect\left((e_1, \ldots, e_k)\right) = vect\left((u_1, \ldots, u_k)\right)$.
En particulier, de toute base de E on peut construire une base orthonormée de E.

Démonstration.

1ère étape. Construction d'une famille orthogonale $(v_1,\ldots,v_N)$ vérifiant $vect\left((v_1,\ldots,v_k)\right) = vect\left((u_1,\ldots,u_k)\right)$ et $(v_k,u_k) \neq 0$, pour tout $1 \leq i \leq N$.

On raisonne par récurrence sur N.

Pour $N = 2$, soit (u_1,u_2) une famille libre de E.

On pose $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2 + \alpha u_1$ et on cherche la valeur de α qui rend $v_1 \perp v_2$ c-à-dire $(u_1,u_2 + \alpha u_1) = 0$, d'où $\alpha = -\frac{(u_1,u_2)}{(u_1,u_1)}$.

La famille $(v_1,v_2) = \left(u_1,u_2 - \frac{(u_1,u_2)}{(u_1,u_1)}u_1\right)$ est orthogonale telle que $(u_1,v_1) \neq 0$ et $(v_2,u_2) \neq 0$.

Soient maintenant $N > 3$. On suppose que de toute famille libre $(u_1,\ldots,u_N)$, on peut construire une famille orthogonale $(v_1,\ldots,v_N)$ vérifiant $vect\left((v_1,\ldots,v_k)\right) = vect\left((u_1,\ldots,u_k)\right)$, pour tout $1 \leq i \leq N$ et on montreque cette propriété reste vrais pour toute fammile libre de N+1 vecteurs de E.

Soit $(u_1,\ldots,u_{N+1})$ une famille libre de vecteurs de E. La famille $(u_1,\ldots,u_N)$ est une famille libre de N vecteurs de E, d'après l'hypothèse de récurrence il existe une famille orthogonale $(v_1,\ldots,v_N)$ vérifiant $vect\left((v_1,\ldots,v_k)\right) = vect\left((u_1,\ldots,u_k)\right)$, pour tout $1 \leq k \leq N$. On cherche un vecteur v_{N+1} sous la forme

$$v_{N+1} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_N v_N + u_{N+1}.$$

La famille $(v_1,\ldots,v_N)$ est orthogonale, donc pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$(v_i|u_{N+1}) = \alpha_i(v_i|v_i) + (u_{N+1}|v_i).$$

La famille $(v_1,\ldots,v_N,v_{N+1})$ est orthogonale si est seulement si

$$\alpha_i = -\frac{(u_{N+1}|v_i)}{(v_i|v_i)},\ \text{pout tout } 1 \leq i \leq N.$$

La famille $(u_1,u_2,\ldots,u_{N+1})$ est libre donc

$u_{N+1} \notin vect(u_1,u_2,\ldots,u_n) = vect(v_1,v_2,\ldots,v_n)$,

ainsi

$$u_{N+1} - \frac{(u_{N+1}|v_1)}{(v_1|v_1)}v_1 - \frac{(u_{N+1}|v_2)}{(v_2|v_2)}v_2 \ldots - \frac{(u_{N+1}|v_N)}{(v_N|v_N)}v_N \neq O_E.$$

Si on pose

$$v_{N+1} = u_{N+1} - \frac{(u_{N+1}|v_1)}{(v_1|v_1)}v_1 - \frac{(u_{N+1}|v_2)}{(v_2|v_2)}v_{2+} \ldots - \frac{(v_{N+1}|v_N)}{(v_N|v_N)}v_N,$$

alors la famille $(v_1,\ldots,v_N,v_{N+1})$ est orthogonale.

On a $v_{N+1} = u_{N+1} - \underbrace{\left(\frac{(u_{N+1}|v_1)}{(v_1|v_1)}v_1 + \frac{(u_{N+1}|v_2)}{(v_2|v_2)}v_2 + \cdots + \frac{(v_{N+1}|v_N)}{(v_N|v_N)}v_N\right)}_{\in vect(v_1,v_2,\dots,v_N)=vect(u_1,u_2,\dots,u_n)}$,

donc $v_{N+1} \in vect(u_1, u_2, \dots, u_n, u_{N+1})$ ainsi

$$vect(u_1, u_2, \dots, u_n, u_{N+1}) = vect(v_1, v_2, \dots, v_n, v_{N+1}).$$

2ère étape Soit $(u_1, \dots, u_N)$ une famille libre de vecteurs de E. D'après la première étape, il existe une unique famille orthogonale $(v_1, \dots, v_N)$ vérifiant pour tout $1 \leq k \leq N$:

$vect\left((v_1, \dots, v_k)\right) = vect\left((u_1, \dots, u_k)\right)$.

On pose $e_i = \frac{1}{||v_i||}v_i$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Alors, la famille cherchée est $(e_i)_{1\leq i\leq N}$.

Exemple.

On se place dans $\mathbb{R}^3$ munit de sa structure euclidien canonique, on cherche une base orthonormée de $F = vect\left(u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, u_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

On pose $v_1 = u_1$ et on cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v_2 = u_2 + \alpha v_1$ et $v_1 \perp u_1 = 0$.

$v_1 \perp u_1$ si et seulement si $v_2 \cdot v_1 = 0$ c-à-dir $u_2 \cdot u_1 + \alpha u_1 \cdot u_1 = 0$,

donc $= -\frac{u_1\cdot u_2}{u_1\cdot u_1} = -\frac{1}{2}$, d'où $u_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$.

La base orthonormée cherchée et

$$\left(e_1 = \frac{v_1}{||v_1||}, e_2 = \frac{v_2}{||v_2||}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right).$$

2.4 Sous-espaces orthogonaux

Définition 2.9.
Soit F un sous-espace vectoriel de E. On définit l'orthogonal de F par $F^{\perp} = \{u \in E : u \perp v, \forall v \in F\}$.

Exemple.
$\{O_E\}^{\perp} = E$ puisque $(O_E|v) = 0$ pour tout $v \in E$.

Définition 2.10.

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dites orthogonaux si $F \subset G^{\perp}$ ou, ce qui revient au même, si $G \subset F^{\perp}$, on écrit dans ce cas $F \perp G$.

Proposition 2.11.
Soient $u \in E$, F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $B_p = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Alors, $u \in F^{\perp}$ si et seulement si $(e_i|u) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq p$.

Démonstration.

- Si $u \in F^{\perp}$ alors $(v|u) = 0$ pour tout $v \in F$, en particulier pour $v \in \{e_1, \dots, e_p\}$ on trouve $(e_i|u) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq p$.
- Supposons $(e_i|u) = 0$ pour tout $1 \leq e_i \leq p$. Soit $v \in F$ alors il existe $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $v = (x_1, \dots, x_p)_{B_F}$. Alors,

$(v|u) = \big((x_1e_1 + \cdots + x_pe_p)|u\big) = x_1(e_1|u) + x_1(e_1|u) = 0,$ donc $v \perp u$. Le vecteur v est quelconque dans F, alors $u \in F^{\perp}$.

Proposition 2.12.
Soit F un sous-espace vectoriel de E alors $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E, de plus $E = F \bigoplus F^{\perp}$.

Démonstration.
Soient $u_1, u_2 \in F^{\perp}$ alors $(u_1|v) = (u_2|v) = 0, \forall v \in F$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $v \in F$, on a $((\alpha u_1 + \beta u_2)|v) = \alpha(u_1|v) + \beta(u_2|v) = 0$, donc $\alpha u_1 + \beta u_2 \in F^{\perp}$, d'où $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
Montrons que $E = F \bigoplus F^{\perp}$.
Si $F = \{0_E\}$ alors $F^{\perp} = E$ et on a $E = \{0_E\} \bigoplus E$.
Supposons $F \neq \{0_E\}$ alors $0 < \dim(F) \leq n$.

On pose $p = \dim(F)$. Soit $B_p = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F alors il existe $e_{p+1}, \dots, e_n \in E$ tels que $B_n = (e_1, e_2, \dots, e_p, \boldsymbol{e_{p+1}}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ soit une base orthonormée de E.
Soit $x \in E$, alors il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
Soit $x \in F^\perp$ alors pour tout $y \in F$: $(x|y) = 0$. En écrivant $(x|y) = 0$ pour les éléments de la base B_p on trouve $x_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq p$, alors $x \in vect\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$.
Soit $x \in vect\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$, alors $x = \left(0,0, \dots, x_{p+1}, \dots, x_n\right)_{B_n}$, donc $(x|v) = 0$ pour tout $v \in F$ alors $x \in F^\perp$.
En résumé tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F$ s'écrit sous la forme

$$x = \underbrace{\left(x_1, x_2, \dots, x_p, 0,0, \dots, 0\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(0,0, \dots, 0, x_{p+1}, \dots, x_n\right)}_{\in F^\perp}.$$

Si $x \in F \cap F^\perp$ alors $x \perp x$, alors $(x|x) = 0$, d'où $x = O_E$, donc
$E = F \oplus F^\perp$.

Corollaire 2.13.
- Soit F un sous espace vectoriel de F de dimension p alors la dimension de $F^\perp$ est $n - p$.
- $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration.

- Le premier point est un résultat direct de la **proposition 2.12.**
- On suppose que $Dim(F) = p$. Soit $u \in F$ alors pour tout $v \in F^\perp$ on a $(u|v) = 0$, d'où $F \subset (F^\perp)^\perp$. D'autre part, $Dim((F^\perp)^\perp) = n - (n - p) = p$, alors $F = (F^\perp)^\perp$.

Exemple.
$E^\perp = (\{O_E\}^\perp)^\perp = O_E$.

2.5 Application dans les espaces affines Euclidiens

Définition 2.14.
- Un espace affine euclidien est un espace affine attaché à un espace euclidien.

- Un repère orthogonal (resp. orthonormé) d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ attaché à un espace euclidien E est un repère (O, B) de $\mathcal{E}$ où B est une base orthogonale (resp. orthonormée) de E.

Dans toute la suite de ce chapitre, $\mathcal{E}$ est un espace affine Euclidien attachée à l'espace Euclidien E de dimension n.

2.5.1 Distance dans un espaces affines Euclidiens

Définition 2.15.

- La distance entre les deux point $A, B \in \mathcal{E}$ est $AB = ||\overrightarrow{AB}||$.
- La distance entre une partie $\mathcal{P}$ non vide $\mathcal{E}$ et un point $A, B \in \mathcal{E}$ est $d(A, \mathcal{P}) = min\,\{d(A, M), M \in \mathcal{P}\}$.
- La distance entre deux parties non vides $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de $\mathcal{E}$ est $d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = min\,\{d(N, M), N \in \mathcal{P}_1, M \in \mathcal{P}_2\}$.

Exemple

- Pour tout $A \in \mathcal{E}$, $d(A, A) = 0$,
- Si $A \in \mathcal{P} \subset \mathcal{E}$, alors $d(A, \mathcal{P}) = 0$.
- Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux parties de $\mathcal{E}$ d'intersection non vide alors $d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = 0$.

Définition 2.16.
Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Soit A un point de $\mathcal{E}$.
La projection orthogonale de A sur $\mathcal{F}$ est l'unique point H de $\mathcal{F}$ vérifiant $\overrightarrow{AH} \perp \mathrm{Dir}(\mathcal{F})$.

Définition 2.17.
Soient $\mathcal{F}$ et A comme dans la **définition 2.16**. Alors
La projection orthogonale H de A sur $\mathcal{F}$ est l'unique point de $\mathcal{F}$ tel que $d(A, \mathcal{F}) = AH$.

Démonstration.

On a $d(A,\mathcal{F}) = min_{\mathrm{M}\in\mathcal{F}}\{\mathrm{AM}\}$.

Pour tout $M \in \mathcal{F}$, on a $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{HM}$, donc par le théorème de Pythagore $AM = \sqrt{AH^2 + HM^2}$, donc la valeur minimal de AM prend sa plus petite valeur pour $HM^2 = 0$, c-à-dire $H = M$, ainsi $AH = min_{\mathrm{M}\in\mathcal{F}}$ $\{\mathrm{AM}\}$.

2.5.2 Orthogonalité des sous-espaces affines

Définition 2.18.
Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont orthogonaux et on écrit $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$ si Dir($\mathcal{F}$) $\perp$ Dir($\mathcal{G}$).

Proposition 2.19.
Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines orthogonaux alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est soit vide soit un singleton.

Démonstration.

On sait que Dir($\mathcal{F}$)$\cap$ Dir $(\mathcal{F})^{\perp} = \{0_E\}$, donc Dir($\mathcal{F}$) $\perp$ Dir($\mathcal{G}$) alors Dir($\mathcal{F}$) $\cap$ Dir($\mathcal{G}$) $= \{0_E\}$.

Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ n'est pas vide, alors il est un sous-espace affine de direction $\{0_E\}$, c-à-dire un singleton.

Proposition 2.20.
1) Soient D une droite de $\mathcal{E}$ et $A \in \mathcal{E}$, alors il existe un seule hyperplan orthogonal à D et passant par A.
2) Soient p un hyperplan de $\mathcal{E}$ et $A \in \mathcal{E}$, alors il existe une seule droite orthogonale à P et passant par A.

Démonstration.

1) On a $Dir\ (D)$ et de dimension 1, donc i existe $u \in F$ tel que $Dir\ (D) = vect(u)$, ainsi tout hyperplan de direction F\ $\{vect\{u\}\}$ est orthogonal à D. Il existe un seule hyperplan de direction F\ $\{vect\{u\}\}$ pasant par A, donc la preuve est terminée.

2) On a $Dir\ (P)$ et de dimension $n-1$, donc i existe $u \in F$ tel que $Dir\ (P) = \text{F} \setminus \{vect\{u\}\}$ ainsi toute droite de direction $vect(u)$ est orthogonal à P. Il existe une seule droite de direction $vect\{u\}$ pasant par A, donc la preuve est terminée.

2.5.3 Isométrie et similitude

Définition 2.21.

- Soit k un réel strictement positif. On appelle similitude de rapport k toute application affine f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ multipliant la distance par k,c-à-dire,
$$d\big(f(A), f(B)\big) = k\, d(A, B), \forall A, B \in \mathcal{E}.$$
- Une similitude de rapport 1 s'appelle une isométrie.

Exemple

- Toute homothétie de rapport α est une similitude de rapport $|\alpha|$.
- L'identité est une isométrie.
- Toute homothétie de rapport -1 est une isométrie.
- Toute translation est une isométrie.

Proposition 2.22.

Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, soit $k > 0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

1) f est une similitude de rapport k.
2) Pour tout $u \in E$: $\big||Linf(u)|\big| = k||u||$.
3) Pour tout $u, v \in E$:
$$\big(Lin\, f(u)\big|Linf(v)\big) = k^2(u|v).$$
4) Pour tout $A, B, C, D \in \mathcal{E}$:
$$\left(\overrightarrow{f(A)f(B)}\middle|\overrightarrow{f(C)f(D)}\right) = k^2\left(\overrightarrow{AB}\middle|\overrightarrow{CD}\right).$$

Démonstration

(1) ⟹2)) Soit $u \in E$. Il existe $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $u = \overrightarrow{AB}$, alors

$$\big||Linf(u)|\big| = \left||Lin\, f\big(\overrightarrow{AB}\big)|\right| = \left||\overrightarrow{f(A)f(B)}|\right|$$

$$= d(f(A), f(B))$$
$$= kd(A, B)$$
$$= k||\overrightarrow{AB}||$$
$$= k||u||.$$

(2) ⟹3))

$$\left(Lin\, f(u)\middle|Linf(v)\right) = \frac{1}{4}\left(\left||f(u) + f(v)|\right|^2 - ||f(u) - f(v)||^2\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\left||f(u + v)|\right|^2 - ||f(u - v)||^2\right)$$
$$= \frac{k^2}{4}\left(\left||u + v|\right|^2 - ||u - v||^2\right)$$
$$= k^2(u|v).$$

(3) ⟹4)) Soit $A, B, C, D \in \mathcal{E}$: il existe $u, v \in E$ tel que $\overrightarrow{AB} = u, \overrightarrow{CD} = v$, alors

$$\left(\overrightarrow{f(A)f(B)}\middle|\overrightarrow{f(C)f(D)}\right) = (Lin\, f(\overrightarrow{AB})|Linf(\overrightarrow{CD}))$$
$$= (Lin\, f(u)|Linf(v))$$
$$= k^2(u|v)$$
$$= k^2\left(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{CD}\right).$$

(4) ⟹1)) Soit $A, B \in \mathcal{E}$.

$$d\left(f(A), f(B)\right) = \sqrt{\left(\overrightarrow{f(A)f(B)}\middle|\overrightarrow{f(A)f(B)}\right)}$$
$$= \sqrt{k^2(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AB})}$$
$$= kd(A, B).$$

Corollaire 2.23.
Soit f une similitude. Alors, f conserve l'orthogonalité, autrement dit, pour tout $A, B, C, D \in \mathcal{E}$: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{f(A)f(B)} \perp \overrightarrow{f(C)f(D)}$.

Proposition 2.24.
Soit f une similitude de rapport k. Alors, f est bijective.

Démonstration.
Pour tous $A, B \in \mathcal{E}$ on a
$f(A) = f(B) \Longrightarrow f(A)f(B) = 0$

$$\Longrightarrow \; kAB = 0$$
$$\Longrightarrow A = B.$$

Alors, f est injective, donc $Lin\ f$ est injective et comme E et de dimension finie, il vient que $Lin\ f$ est bijective ainsi f est bijective.