Interrogation n° 01

Exercice 01

Soit ABC trois points de E tel que $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$ non colinéaires.
Soient
A' le barycentre de $(B,1)$ et $(C,1)$,
B' le barycentre de $(A,1)$ et $(C,1)$,
C' le barycentre de $(A,1)$ et $(B,1)$,
et G le barycentre de points $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$.
1. Montrer que G est le barycentre de points $(A',1)$, $(B',1)$ et $(C',1)$.
3. Montrer que : $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{B'C'}$.

Solution.

1. On a

$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = 0_E$
$\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = 0_E$, donc $\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA})$.
$\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C} = 0_E$, donc $\overrightarrow{B'B} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB})$.
$\overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'B} = 0_E$, donc $\overrightarrow{C'C} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})$.
Alors,

$$\overrightarrow{A'G} + \overrightarrow{B'G} + \overrightarrow{C'G} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} + \underbrace{\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}}_{=0_E}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right) = 0_E.$$

Donc, G est le barycentre de points $(A',1)$, $(B',1)$ et $(C',1)$.

2. On a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'C}$

$$= \overrightarrow{B'C'} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right)$$
$$= \overrightarrow{B'C'} + \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BC}\right),$$

D'où $-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$ ainsi $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{B'C'}$.

Exercice 02

Déterminer l'intersection des deux droites

$$D: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases} \qquad \Delta: \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 1 + 3s \quad s \in \mathbb{R} \\ z = -1 + s \end{cases}$$

Solution. On résout le système $\begin{cases} 1 + t = 2 - s \\ 2 - t = 1 + 3s \\ 3t = -1 + s \end{cases}$.

On $\begin{cases} 1 + t = 2 - s \\ 2 - t = 1 + 3s \\ 3t = -1 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + t = 2 - s \\ 3 = 3 + 2s \\ 3t = -1 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ s = 0 \\ 3t = -1 \end{cases}$, donc le système n'admet pas des solutions, ainsi $D \cap \Delta = \Phi$.