Exercices sur le chapitre 1

Exercice 01

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine attaché à E . Montrer les résultats suivants:

- 1) pour tout $A, B, C \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. (Relation de Chasles).
- 2) pour tout $A, B \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
- 3) pour tout $A, B, O \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
- 4) pour tout $A, B \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB} = 0_E$ si et seulement si $B = A$.
- 5) pour tout $A, B, C \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ si et seulement si $B = C$.

Solution

- 1) D'après l'axiome 2) de la **définition 1.1**, on a

$$\begin{aligned} A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) &= (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} \\ &= B + \overrightarrow{BC} \\ &= C. \end{aligned}$$

D'après l'axiome 3) de la **définition 1.1**, et la définition de et la définition de $\overrightarrow{AC}$, il vient $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

- 2) D'après la relation de Chasles et, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$.

D'autre part, d'après les axiomes 1) et 3) de la **définition 1.1**, on a $\overrightarrow{AA} = 0_E$ alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0_E$, d'où $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

- 3) Par la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$, alors par la propriété précédente $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

- 4) On a : $\overrightarrow{AB} = 0_E \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} \Leftrightarrow A = B$.

- 5) Si $B = C$, on a clairement $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Supposons $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ alors $-\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$, donc $0_E = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$, d'où $B = C$.

Exercice 02

Soient A, B, C et D quatre points d'un espace affine $\mathcal{E}$ attaché à E . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

$$\begin{aligned} a) \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{DC}, \\ b) \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{BC}, \\ c) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Solution

[a) $\Rightarrow$ b)] Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$, d'où $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

[b) $\Rightarrow$ c)] Si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, donc

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, d'où $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

[c) $\Rightarrow$ a)] Si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}$.

Exercice 03

On munit $\mathcal{E}$ d'un repère $(O, e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Soit $A(a_1, a_2, \dots, a_n), B(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathcal{E}$. Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Solution.

On a

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \quad -\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ alors } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 04

Soient A, B, C, A', B', C' six points d'un espace affine $\mathcal{E}$. Soit G le barycentre de point pondérés $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$.

Montrer que $\alpha AA' + \beta BB' + \gamma CC' = 0_E$ si et seulement si

Soit G le barycentre de point pondérés $(A', \alpha), (B', \beta), (C', \gamma)$.

Solution.

On note G' le barycentre de point pondérés $(A', \alpha), (B', \beta), (C', \gamma)$.

On suppose que $\alpha\overrightarrow{AA'} + \beta\overrightarrow{BB'} + \gamma\overrightarrow{CC'} = 0_E$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{MG'} - \overrightarrow{MG} \\ &= \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} (\alpha\overrightarrow{MA'} + \beta\overrightarrow{MB'} + \gamma\overrightarrow{MC'}) \\ &\quad - \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} (\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}) \\ &= \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} (\alpha\overrightarrow{AA'} + \beta\overrightarrow{BB'} + \gamma\overrightarrow{CC'}) = 0_E. \end{aligned}$$

Alors $G = G'$.

Supposons maintenant $G = G'$ alors $\begin{cases} \alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} + \gamma\overrightarrow{CG} = 0_E \\ \alpha\overrightarrow{GA'} + \beta\overrightarrow{GB'} + \gamma\overrightarrow{GC'} = 0_E \end{cases}$,

donc

$$\begin{aligned} \alpha\overrightarrow{AA'} + \beta\overrightarrow{BB'} + \gamma\overrightarrow{CC'} &= (\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} + \gamma\overrightarrow{CG}) + (\alpha\overrightarrow{GA'} + \beta\overrightarrow{GB'} + \gamma\overrightarrow{GC'}) \\ &= 0_E + 0_E = 0_E. \end{aligned}$$

Exercice 05

Soient A, B, C trois points de $\mathcal{E}$, soient P le barycentre de points pondérés $(A, 1), (B, 2), (C, 4)$ et Q le barycentre de points pondérés $(A, 2), (B, 3), (C, 1)$.

- 1) Calculer $\overrightarrow{PQ}$.
- 2) On suppose que $\mathcal{E}$ est de dimension 2 et le munit d'un repère (O, e_1, e_2) . Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de coordonnées de A, B et C .

Solution.

- 1) On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{QA} \\ &= \frac{1}{7}(2\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{CA}) - \frac{1}{6}(3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) \\ &= -\frac{9}{42}\overrightarrow{BA} + \frac{17}{42}\overrightarrow{CA}.\end{aligned}$$

2) On suppose que $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ alors

$$P\left(\frac{a_1+2b_1+4c_1}{7}, \frac{a_2+2b_2+4c_2}{7}\right) \text{ et } Q\left(\frac{2a_1+3b_1+c_1}{6}, \frac{2a_2+3b_2+c_2}{6}\right), \text{ d'où}$$

$$\overrightarrow{PQ}\left(\frac{-8a_1-9b_1+17c_1}{42}, \frac{-8a_2-9b_2+17c_2}{42}\right).$$

Exercice 06

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Soient A, B et C trois points de $\mathcal{F}$ et D le point de $\mathcal{E}$ vérifiant $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BD}$. Montrer que $D \in \mathcal{F}$.

Solution.

On a $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BD}$ implique

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BD}, \text{ donc}$$

$3\overrightarrow{AD} - 5\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = 0_E$, alors D est le barycentre de points pondérés (A, 3), (B, -5) et (C, -1), d'où l'appartenance de D à $\mathcal{F}$, car ce dernier est stable par barycentration.

Exercice 07

Dans l'espace affine de dimension 3 rapporté à un repère cartésien, soient D la droite dirigée par le vecteur $(3, -1, 1)$ et passant par le point $(2, 0, 1)$ et P le plan passant par le point $(1, -1, 1)$ et de dirigé par les vecteurs $(2, -3, 1)$ et $(1, 2, 0)$. Déterminer $P \cap D$.

Solution.

$$\text{On a } P: \begin{cases} x = 2\alpha + \beta + 1 \\ y = -3\alpha + 2\beta - 1 \\ z = \beta + 1 \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } D: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Le système
$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + 1 = 3t + 2 \\ -3\alpha + 2\beta - 1 = -t \\ \beta + 1 = t + 1 \end{cases}$$
 n'admet pas des solutions, alors

$$P \cap D = \Phi.$$

Exercice 08

Soit, dans l'espace affine de dimension 3, D_1 une droite définie par un

point A_1 et un vecteur directeur u_1 et D_2 une droite définie par un point A_2 et un vecteur directeur u_2 .

Montrer que D_1 et D_2 sont coplanaires (de même plan) si et seulement si les trois vecteurs u_1 , u_2 et $\overrightarrow{A_1A_2}$ sont liés.

Solution.

($\Rightarrow$) Supposons que D_1 et D_2 sont coplanaires c'est à dire il existe un plan P tel que $D_1 \subset P$ et $D_2 \subset P$. Alors $A_1, A_2 \in P$ et $\overrightarrow{A_1A_2}, u_1, u_2 \in \text{dir}(P)$. La dimension de P est 2 donc $\overrightarrow{A_1A_2}, u_1$ et u_2 sont liés.

($\Leftarrow$) Supposons les trois vecteurs u_1, u_2 et $u_3 = \overrightarrow{A_1A_2}$ sont liés. Soit $F = \text{vect}(u_1, u_2, u_3)$ alors $1 \leq \text{Dim}(F) \leq 2$. On distingue deux cas.

1^{er} cas : $\text{Dim}(F) = 1$, alors $\text{dir}(D_1) = \text{dir}(D_2)$ et les deux droites D_1 et D_2 sont incluses dans le plan passant par A_1 et dirigé par u_1 et v où v est un vecteur non colinéaire avec u_1 .

2^{ème} cas : $\text{Dim}(F) = 2$, et on distingue encore deux cas.

- $F = \text{vect}(u_1, u_2)$, alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{A_1A_2} = u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$. Soit $P = \{M : \overrightarrow{A_1M} \in F\}$.

Soit $M \in D_1$ alors il existe $\alpha_1 \in \mathbb{R} : \overrightarrow{A_1M} = \alpha_1 u_1$, donc $M \in P$ ainsi $D_1 \subset P$.

Soit $N \in D_2$ alors il existe $\alpha_2 \in \mathbb{R} : \overrightarrow{A_2N} = \alpha_2 u_2$, donc

$\overrightarrow{A_1N} = \overrightarrow{A_1A_2} + \alpha_2 u_2 = \alpha u_1 + (\beta + \alpha_2) u_2$, d'où l'appartenance de N à P et donc $D_2 \subset P$.

- $F = \text{vect}(u_1, u_3)$ ou $F = \text{vect}(u_2, u_3)$. On se procède comme dans le cas précédant (les détails sont laissés au lecteur).

Exercice 09

Soit, dans l'espace affine de dimension 3 rapporté à un repère cartésien, P un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et D une droite de vecteur directeur $u(\alpha, \beta, \gamma)$.

Donner une condition pour que D soit parallèle à P .

Solution.

On a $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. On suppose que . Alors,

Cas 1, $a \neq 0$: On a

$$A\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right), B\left(-\frac{d+c}{a}, 0, 1\right), C\left(-\frac{d+b}{a}, 1, 0\right) \in P.$$

Il est clair que P est orienté par les vecteurs $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(-\frac{b}{a}, 1, -1\right)$.

Donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \text{vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une condition nécessaire suffisante pour que D soit parallèle à P .

$(\alpha, \beta, \gamma) \in \text{vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \exists t, s \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} a\alpha = -ct - bs \\ \beta = s \\ \gamma = t - s \end{cases} \quad \text{alors } a\alpha = -c(\gamma + \beta) - b\beta.$$

Cas 2, $b \neq 0$

$$A\left(0, -\frac{d}{b}, 0\right), B\left(0, -\frac{d+c}{b}, 1\right), C\left(1, -\frac{d+a}{b}, 0\right) \in P.$$

P est orienté par les vecteurs $\overrightarrow{AB}\left(0, -\frac{c}{b}, 1\right)$ et $\overrightarrow{BC}\left(1, -\frac{a}{b}, -1\right)$.

D est parallèle à P il suffit qu'il existe $t, s \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \alpha = s \\ b\beta = -tc - sa \\ \gamma = t - s \end{cases} \quad \text{autrement dit } b\beta = -c(\gamma + \alpha) - a\alpha.$$

Cas 3, $c \neq 0$

$$A\left(0, 0, -\frac{d}{c}\right), B\left(0, 1, -\frac{d+b}{c}\right), C\left(1, 0, -\frac{d+a}{c}\right) \in P.$$

P est orienté par les vecteurs $\overrightarrow{AB}\left(0, 1, -\frac{b}{c}\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(1, -1, -\frac{a}{c}\right)$.

D est parallèle à P s'il existe $t, s \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \alpha = s \\ \beta = t - s \\ c\gamma = -bt - as \end{cases} \quad \text{autrement dit}$$

$$c\gamma = -b(\beta + \alpha) - a\alpha.$$

Application.

Soit $P: 2x - y + 3z - 4 = 0$ et (α, β, γ) . si $2\alpha = -3\gamma - 2\beta$
ou $\beta = -3\gamma - 5\alpha$ ou $3\gamma = -\beta - 3\alpha$ alors D est parallèle à P

Exercice 10

L'espace affine de dimension 3 est rapportée à un repère cartésien.

- 1) Écrire l'équation du plan Q passant par le point $(0, 1, 0)$ et parallèle au plan d'équation $P: x + y - z + 3 = 0$.
- 2) Soit D la droite d'équations $x + y - z + 3 = 0, 2x + z - 2 = 0$.
Donner l'équation du plan L contenant D et passant par le point $(1, 1, 1)$.

Solution.

1) On a $A(-3, 0, 0), B(0, -3, 0), C(0, 0, 3) \in P$.

$\overrightarrow{AB}(3, -3, 0)$ et $\overrightarrow{AC}(3, 0, 3)$ sont linéairement indépendant, alors P est orienté par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Comme P et Q sont parallèle il vient que Q est aussi orienté par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Un paramétrage de Q est alors

$$\begin{cases} x = 3\alpha + 3\beta \\ y = -3\alpha + 1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \\ z = 3\beta \end{cases}$$

De la première et la deuxième équation on a $\beta = \frac{1}{3}(x + y - 1)$.

On remplace dans la troisième équation on trouve l'équation de Q .

$$Q : z = x + y + 1$$

$$2) D : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x + z - 2 = 0 \end{cases}, \text{ donc un paramétrage de } D \text{ est}$$

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 3t - 4, t \in \mathbb{R}. \\ z = 2t \end{cases}$$

On a $A(1, -4, 0), B(0, -1, 2), C(1, 1, 1) \in L$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(-1, 3, 2)$ et $\overrightarrow{AC}(0, 5, 1)$ sont linéairement indépendant, donc on peut trouver un paramétrage de L et donc une équation cartésienne.

Exercice 11

Soient $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ et $g: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$ deux applications affines. Alors $f \circ g: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}''$ est une application affine et $Lin(g \circ f) = Ling \circ Linf$.

Solution.

Rappelons que la composée de deux application linéaire est une application linéaire.

Pour tout $A, B \in \mathcal{E} : \overrightarrow{f(A)f(B)} = Linf(\overrightarrow{AB})$.

D'autre part,

$$\overrightarrow{f \circ g(A)f \circ g(B)} = Ling(\overrightarrow{f(A)f(B)}) = Ling(Linf(\overrightarrow{AB})),$$

donc $g \circ f(B) = g \circ f(A) + Ling \circ Linf(\overrightarrow{AB})$.

Ainsi $g \circ f$ est affine de partie linéaire $Linf \circ Ling$.

Exercice 12

Soient $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ une application affine. Alors

1- f est injective $\Leftrightarrow Lin f$ est injective,

2- f est surjective $\Leftrightarrow Lin f$ est surjective,

3- f est bijective $\Leftrightarrow \text{Lin } f$ est bijective, et dans ce cas f^{-1} est une application affine et $\text{Lin}(f^{-1}) = (\text{Lin } f)^{-1}$.

Solution.

1- ($\Rightarrow$) Supposons f injective. Soient $u, v \in E$ tels que $\text{Lin } f(u) = \text{Lin } f(v)$.

Soit $A \in \mathcal{E}$, on a $f(A) + \text{Lin } f(u) = f(A) + \text{Lin } f(v)$, donc $f(A + u) = f(A + v)$, ce qui implique $A + u = A + v$, car f est injective, d'où $u = v$ et $\text{Lin } f$ est injective.

($\Leftarrow$) Supposons f non injective. Il existe alors deux points distincts A et B tel que $f(A) = f(B)$, donc

$f(B) = f(A + \overrightarrow{AB}) = f(A) + \text{Lin } f(\overrightarrow{AB}) = f(B) + \text{Lin } f(\overrightarrow{AB})$, donc $\text{Lin } f(\overrightarrow{AB}) = 0_E$, ainsi $\text{Ker}(\text{Lin } f) \neq 0_E$, d'où $\text{Lin } f$ n'est pas injective.

2- ($\Rightarrow$) Supposons f surjective. Soit $v \in E'$, il existe $A', B' \in \mathcal{E}$ tels que $v = \overrightarrow{A'B'}$. Comme f est surjective il existe $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$, alors $v = \overrightarrow{A'B'} = \text{Lin } f(\overrightarrow{AB})$, avec $\overrightarrow{AB} \in E$, d'où la surjectivité de $\text{Lin } f$.

($\Leftarrow$) Supposons $\text{Lin } f$ surjective. Soit $A \in \mathcal{E}$ et $A' = f(A)$.

Soit $B' \in \mathcal{E}'$, il existe $u' \in E'$ tel que $\overrightarrow{A'B'} = u'$, comme $\text{Lin } f$ est surjective, il existe $u \in E$ tel que $\overrightarrow{A'B'} = u' = \text{Lin } f(u)$, Alors, $B' = f(A) + \text{Lin } f(u)$, d'où l'existence de $B = A + u$ tel que $M' = f(M)$ ainsi f est surjective.

3- L' équivalence découle des deux question précédentes.

Supposons f bijective alors $\text{Lin } f$ est aussi bijective.

Montrons que f^{-1} est bijective de partie linéaire $(\text{Lin } f)^{-1}$.

Soient $A \in \mathcal{E}$, $A' = f(A)$ et $g: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$ l'application affine de partie linéaire $(\text{Lin } f)^{-1}$ tel que $g(A') = A$.

Pour tout $B \in \mathcal{E}'$: $g(B) = g(A) + (\text{Lin } f)^{-1}(\overrightarrow{AB})$.

Pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} g \circ f(M) &= g(f(M)) = g(A' + \text{Lin } f(\overrightarrow{AM})) \\ &= g(A') + (\text{Lin } f)^{-1}(\text{Lin } f(\overrightarrow{AM})) \\ &= A + \overrightarrow{AM} = M. \end{aligned}$$

Donc $g = f^{-1}$, ainsi f^{-1} est linéaire de partie linéaire $(Linf)^{-1}$.

Exercice 13

Soit $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ une application affine.

- Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ alors $f(\mathcal{F})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$ et $\text{dir}(f(\mathcal{F})) = Linf(\text{dir}(\mathcal{F}))$.
- Soit $\mathcal{G}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$ alors $f^{-1}(\mathcal{G})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ et $\text{dir}(f(\mathcal{G})) = Linf^{-1}(\text{dir}(\mathcal{G}))$.

Solution.

Devoir

Exercice 14

L'espace affine $\mathcal{E}$ est muni d'un repère (O, e_1, e_2, e_3) . On désigne par $H_{A,5}$ l'homothétie de centre $A(4, -2, 0)$ et de rapport 5.

Soit P le plan d'équation $2x - 3y - z = 2$.

Déterminer l'équation de l'image P' de P par $H_{A,5}$.

Solution.

Si $M'(x', y', z')$ est l'image de $M(x, y, z)$ par $H_{A,5}$ alors $\overline{AM'} = 5\overline{AM}$,

$$\text{donc } \begin{cases} x' = 5x - 24 \\ y' = 5y + 8 \\ z' = 5z \end{cases} \text{ c-à-dire } \begin{cases} x = \frac{1}{5}(x' + 24) \\ y = \frac{1}{5}(y' - 8) \\ z = \frac{1}{5}z' \end{cases},$$

$$P': \frac{2}{5}(x' + 24) - \frac{3}{5}(y' - 8) - \frac{1}{5}z' = 2, \text{ d'où}$$

$$P': 2x - 3y - z = -62$$

Exercice 15

Le plan affine $\mathcal{E}$ est muni d'un repère (O, e_1, e_2) .

Soient $A(1, -1), B(0, 2)$ de points de $\mathcal{E}$ et $u(2, 2)$ un vecteur de E .

1. Ecrire l'expression analytique des applications affines

suyvantes : $t_u, H_{A,2}, H_{A,3}, H_{B,-1}$

2. Déterminer la nature et les caractéristiques de chacun des applications affines suivantes :

$$t_u \circ H_{A,3}, H_{A,2} \circ H_{A,3} \text{ et } H_{A,2} \circ H_{B,-1}$$

Solution.

1.

$$t_u: \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 2' \end{cases} \quad H_{A,2}: \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$$

$$H_{A,3}: \begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y + 2' \end{cases} \quad H_{B,-1}: \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y + 4 \end{cases}$$

$$2. \underline{t_u \circ H_{A,3}} : \quad M(x, y) \xrightarrow{H_{A,3}} M'(x', y') \xrightarrow{t_u} M''(x'', y''),$$

On a $\begin{cases} x'' = x' + 2 \\ y'' = y' + 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y + 2 \end{cases}$, donc

$$\begin{cases} x'' = (3x - 2) + 2 = 3x \\ y'' = (3y + 2) + 2 = 3y + 4 \end{cases}, \text{ d'où}$$

$$t_u \circ H_{A,3}: \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y + 4 \end{cases}$$

Si $M(x, y)$ est un point fixe de $t_u \circ H_{A,3}$ alors $\begin{cases} x = 3x \\ y = 3y + 4 \end{cases}$

donc $t_u \circ H_{A,3}$ admet un oint fixe unique $A_0(0, -2)$.

$$\overrightarrow{A_0M'} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y + 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y + 2 \end{pmatrix} = 3\overrightarrow{A_0M}, \text{ donc } t_u \circ H_{A,3} = H_{A_0,3}.$$

$$\underline{H_{A,2} \circ H_{A,3}} : \quad M(x, y) \xrightarrow{H_{A,3}} M'(x', y') \xrightarrow{H_{A,2}} M''(x'', y''),$$

On a $\begin{cases} x'' = 2x' - 1 \\ y'' = y' + 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y + 2 \end{cases}$, donc

$$\begin{cases} x'' = 6x - 5 \\ y'' = 6y + 5 \end{cases}, \text{ d'où } H_{A,2} \circ H_{A,3}: \begin{cases} x' = 6x - 5 \\ y' = 6y + 5 \end{cases}$$

Si $M(x, y)$ est un point fixe de $H_{A,2} \circ H_{A,3}$ alors $\begin{cases} x = 6x - 5 \\ y = 6y + 5 \end{cases}$

donc $H_{A,3} \circ t_u$ admet un point fixe unique $A(1, -1)$.

$$\overrightarrow{AM'} = \begin{pmatrix} 6x - 6 \\ 6y + 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix} = 6\overrightarrow{AM}, \text{ donc } H_{A,2} \circ H_{A,3} = H_{A,6}.$$

$$\underline{H_{A,3} \circ H_{B,-1}} : \quad M(x, y) \xrightarrow{H_{B,-1}} M'(x', y') \xrightarrow{H_{A,3}} M''(x'', y''),$$

On a $\begin{cases} x'' = 3x' - 2 \\ y'' = 3y' + 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y + 4 \end{cases}$, donc

$$\begin{cases} x'' = -3x - 2 \\ y'' = -3y + 14 \end{cases}, \text{ d'où } H_{A,3} \circ H_{B,-1} : \begin{cases} x' = -3x - 2 \\ y' = -3y + 14 \end{cases}.$$

Si $M(x, y)$ est un point fixe de $H_{A,3} \circ H_{B,-1}$ alors

$$\begin{cases} x = -3x - 2 \\ y = -3y + 14 \end{cases}, \text{ donc } H_{A,3} \circ t_u \text{ admet un point fixe}$$

unique $A_1(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$.

$$\overrightarrow{AM'} = \begin{pmatrix} -3x - \frac{3}{2} \\ -3y + \frac{21}{2} \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2} \\ y - \frac{7}{2} \end{pmatrix} = -3 \overrightarrow{A_1 M}, \text{ donc } H_{A,3} \circ H_{A,2} =$$

$H_{A_1, -3}$.