## تمـارين المحـور الثاني والحلول:

**التمرين 01**:إذا كان مجتمع يتكون من 20 قيمة، وسحبنا منه العينة العشوائية التالية:

5 ، 7 ، 8 ، 9 ، 4 ، 3

المطلوب:

1 -قدر بقيمة الوسط الحسابي للمجتمع.

2 -قدر بقيمة نسبة قيم المجتمع التي تزيد على 5 .

3 -قدر بقيمة تباين المجتمع في حالة سحب العينة مع الإرجاع.

4 -قدر بقيمة تباين المجتمع في حالة سحب العينة مع عدم الإرجاع.

**التمرين 02**: أخذت عينة عشوائية $X_1$ , $X_2$ , $X_3$ , $X_4$ , $X_5$ من مجتمع طبيعي وسطه $\mu$ وتباينه $\sigma^2$

المطلوب: أي المقدرات التالية غير متحيز، وأي منها هو الأفضل ؟

$$X_1 \ , \ \overline{X} \ , (X_1+X_2)/2 \ \ , X_5$$

**التمرين 03**: عينة عشوائية حجمها 25 ، أخذت من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري 5 ، فأعطت المعدل 80

المطلوب: أوجد فترة ثقة 98% لوسط المجتمع $\mu$.

**التمرين 04**: أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها 81 ، فكان وسطها الحسابي 63 وانحرافها المعياري 6 .

المطلوب: أوجد فترة ثقة 98% لوسط المجتمع $\mu$.

**التمرين 05**: قيست أطوال عينة عشوائية مؤلفة من 50 طالبا في إحدى الجامعات معدل أطوالهم 170 سم بانحراف معياري قدره 7 سم.

المطلوب: أوجد فترة ثقة 98% لمعدل أطوال جميع طلبة الجامعة.

**التمرين 06**: لدينا محتويات 9 عبوات من أحد أنواع المنظفات كما يلي:

10.1 ، 10.3 ، 9.9 ، 9.8 ، 10.2 ، 9.7 ، 10 ، 9.7 ، 10.3 لترا.

المطلوب: أوجد فترة ثقة 99% لمتوسط محتويات العبوات لذلك النوع من المنظفات على افتراض أن محتويات العبوات يخضع للتوزيع الطبيعي.

**التمرين 07**: أخذت عدة أفلام من إنتاج شركة ما بطريقة عشوائية فوجد أن الفترة الزمنية لها هي :

101 ، 98 ، 103 ، 105 ، 96 ، 99 ، 102 دقيقة.

المطلوب:

1- أوجد تقديرا نقطيا لمعدل زمن جميع الأفلام التي أنتجتها تلك الشركة .

2- على افتراض أن أزمنة الأفلام تخضع لتوزيع طبيعي، أوجد فترة ثقة 95% لمعدل زمن جميع الأفلام التي أنتجتها تلك الشركة.

**التمرين 08**: لاحظ أستاذ مقياس الإحصاء من خلال خبراته السابقة في تدريس هذا المقياس أن الوسط الحسابي لعلامات الطلبة في هذا المقياس كان 75 بانحراف معياري 9 علامات. إذا رغب هذا الأستاذ في تطوير أسلوب تدريس هذا المقياس ومن ثم تقدير الوسط الحسابي للعلامات وفق الأسلوب الجديد، بحيث انه يكون متأكدا بنسبة 95% أن الخطأ في التقدير الناتج لا يزيد عن 3 علامات.

المطلوب: كم طالب يحتاج الأستاذ لكي يخضعهم لهذه التجربة ؟.

**التمرين 09**: في عملية تخطيط تجارية لمشاهدة برامج التلفزيون TV رغبت إدارة التسويق في تقدير فترة لمتوسط أعمار المشاهدين لبرنامج معين فيTV وتحديدا فترة ثقة 92% ، وكانت مرغوبة باتساع لا يزيد عن 4 سنوات. باحث التسويق عليه أن يحدد عدد المشاهدين الذين تشملهم العينة بهدف تحقيق فترة ثقة بهذا الاتساع. بناءا على معلومات تاريخية ، يعتقد أن عمر المشاهدين لهذا النوع من البرامج التلفزيونية يلائمه التوزيع الطبيعي بانحراف معياري قدره 8 سنوات.

المطلوب:بفرض أن هذا الاعتقاد صحيحا، ما هو حجم العينة ؟.

**التمرين 10**: تبين في إحدى التجارب البيئية، أن متوسط المواد الملوثة المنبعثة من بنزين السيارات يساوي 2.73 ميكروغرام لكل متر مكعب ،بانحراف معياري يساوي 0.48 ميكروغرام وذلك من عينة حجمها 9 ، وبافتراض أن المجتمع الذي آخذت منه العينة يتوزع طبيعيا .

المطلوب:

1- أحسب حدود الثقة لمتوسط المجتمع عند المستوى 95% .

2- أحسب الحد الأقصى للخطأ في تقدير متوسط المجتمع عند مستوى الثقة 99% .

**التمرين 11**: في دراسة خاصة بمقارنة متوسط الدخل الشهري للأسر القاطنة في ولاية بسكرة ، بمتوسط الدخل الشهري للأسر القاطنة في ولاية باتنة ،كان تباين الدخل في ولاية بسكرة 64000 و تباين الدخل في ولاية باتنة 36000 ، فإذا اخترنا من ولاية بسكرة عينة عشوائية تحتوي على 400 أسرة ، ووجدنا أن متوسط الدخل الشهري لهذه الأسر يساوي 25000 دج ، واخترنا من ولاية باتنة عينة عشوائية مستقلة عن العينة السابقة تحتوي على 300 أسرة ووجدنا أن متوسط الدخل الشهري لهذه الأسر يساوي 21000 دج.

المطلوب : أحسب فترة ثقة 90% للفرق بين متوسطي الدخل في الولايتين$(\mu_1 - \mu_2)$ .

**التمرين 12**: اعتمد على البيانات التالية لإيجاد فترة ثقة 98% للفرق بين المتوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$

| العينة الأولى: | العينة الثانية: |
|---|---|
| $n_1 = 90$ | $n_2 = 160$ |
| $\bar{x}_1 = 76.4$ | $\bar{x}_2 = 81.2$ |
| $s_1 = 8.2$ | $s_2 = 7.6$ |

**التمرين 13**: بفرض أننا نرغب في معرفة ما إذا كان برنامج صيفي مقترح في الرياضيات من شأنه أن يحسن مستوى درجات الطلبة في الرياضيات. فإن كان لدينا 30 طالبا بالصف الخامس من مدرسة محلية بإحدى الولايات، ممن حققوا درجات متشابهة في الرياضيات في فصل الربيع ،قد اختيروا لإجراء الدراسة عليهم ؛ 10 من هؤلاء الطلبة " **مجموعة الاختبار** " اختيروا عشوائيا للالتحاق بالبرنامج الصيفي للرياضيات وكان متوسط الدرجات فيها 510.2 وذلك بعد حضورهم البرنامج. والباقي 20 طالبا " **المجموعة الضابطة** " لم تشارك في هذا البرنامج ، فكان متوسط درجاتهم 501.1.

فإذا كان: $s_1^2 = 88.36$ ، $s_2^2 = 72.25$ ، وتوزيعي المجتمعين قريبين من التوزيع الطبيعي بتباينين مجهولين ومتساويين.

المطلوب:

1- قدر الفرق بين متوسط درجات الطلبة الذين حضروا البرنامج الصيفي والطلبة الذين لم يحضروا هذا البرنامج .

2- مستخدما مستوى ثقة 95% ، حدد هامش خطأ المعاينة للتقدير.

3- هل فترة ثقة 95% تشير إلى أن البرنامج الصيفي مفيد ؟ برر إجابتك.

**التمرين 14**: أخذت عينتين مستقلتين من مجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا وكانت المشاهدات كما يلي:

- العينة الأولى : 7 ، 9، 6 ، 7 ، 5 ، 8
- العينة الثانية : 6 ، 7، 4 ، 6 ، 2

المطلوب : أحسب فترة ثقة 90% للفرق بين الوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$ هذا إذا كان تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين .

**التمرين 15**:يعطي الجدول التالي ضغط الدم السفلي لمجموعة من الأشخاص قبل استخدام العلاج وبعده

| قبل أخذ العلاج | بعد أخذ العلاج |
|---|---|
| 70 | 68 |
| 80 | 72 |
| 72 | 62 |
| 76 | 58 |
| 76 | 70 |
| 76 | 66 |
| 72 | 68 |
| 78 | 52 |
| 82 | 64 |
| 64 | 72 |
| 74 | 74 |
| 92 | 60 |
| 74 | 74 |
| 68 | 72 |
| 84 | 74 |

المطلوب: أوجد فترة ثقة 95% للفرق بين متوسطي ضغط الدم قبل وبعد أخذ العلاج ، وذلك بافتراض أن المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا.

**التمرين 16**: إذا كانت درجات امتحان مادة إحصائية معينة تتبع توزيعا طبيعيا، واخترنا من المشتركين في هذا الامتحان عينة عشوائية تشمل 5 طلبة وكانت درجاتهم :59 ، 74 ، 65 ،80 ،42 . المطلوب :باستخدام هذه البيانات أوجد فترة ثقة 90% لتباين درجات كل الطلبة المشتركين في هذا الامتحان .

**التمرين 17**: عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا بتباين مجهول ، فإذا كان حجم العينة 13 ، وكان مجموع مربعات انحرافات قيم العينة عن وسطها الحسابي يساوي : 128.41

المطلوب: قدر تباين المجتمع والانحراف المعياري للمجتمع باستخدام فترة ثقة عند مستوى ثقة 95% .

**التمرين 18**: إذا كان لدينا عينة عشوائية حجمها 5 سحبت من مجتمع طبيعي وسطه $\mu_1$ وتباينه $\sigma_1^2$ ، وكان لدينا عينة عشوائية أخرى مستقلة عن العينة الأولى حجمها 7 سحبت من مجتمع طبيعي آخر مستقل عن المجتمع الأول وسطه $\mu_2$ وتباينه $\sigma_2^2$ ، وحصلنا على البيانات التالية :

العينة الأولى:

$\overline{x}_1 = 525.3$
$s_1^2 = 2273$

العينة الثانية:

$\overline{x}_2 = 510.8$
$s_2^2 = 1759$

المطلوب: أوجد فترة الثقة لنسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني وذلك باستخدام مستوى ثقة 95% .

**التمرين 19**: إذا سحبنا عينة عشوائية حجمها 6 من مجتمع طبيعي وسطه $\mu_1$ وتباينه $\sigma_1^2$ ، ثم سحبنا عينة عشوائية أخرى مستقلة عن العينة الأولى حجمها 5 من مجتمع طبيعي آخر مستقل عن المجتمع الأول وسطه $\mu_2$ وتباينه $\sigma_2^2$ ، وكانت بيانات العينتين كما يلي:

- العينة الأولى : 4 ، 9، 5 ، 7 ، 8 ، 9
- العينة الثانية : 5 ، 4، 7 ، 6 ، 3

المطلوب: اعتمادا على هذه البيانات، حدد فترة الثقة لنسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني وذلك باستخدام مستوى ثقة 99% .

**التمرين 20**: لتقدير نسبة المدخنين بين طلبة إحدى الجامعات، قام باحث بمقابلة عينة عشوائية حجمها 200 طالب فوجد أن 70 طالبا يدخنون.

المطلوب: ما هي نسبة الطلبة المدخنين في الجامعة ؟.

**التمرين 21**: في إحدى تجارب علم النفس،يسمح للأشخاص الخاضعين لإحدى التجارب بالاستجابة لأحد المؤشرين A أو B ، ويريد الباحث أن يقدر نسبة الأشخاص الذين يختارون المؤشر A ، ولتكن هذه النسبة (P) .

المطلوب : كم شخصا يجب أن نخضع لهذه الدراسة كي نكون واثقين بنسبة 90% أن الخطأ في تقدير P لا يزيد عن 0.04 في كل من الحالتين التاليتين :

1- إذا كنا نعلم أن P تساوي تقريبا 0.2 .

2- إذا لم يكن لدينا أية فكرة عن قيمة P .

**التمرين 22**: أخذت عينة عشوائية حجمها 400 من معلمي المرحلة الابتدائية فوجد أن 80 منهم حاصلون على شهادة البكالوريا.

المطلوب :

1- قدر نسبة المعلمين في المرحلة الابتدائية الحاصلين على شهادة البكالوريا.

2- أوجد فترة ثقة 99% للنسبة الحقيقية للمعلمين في هذه المرحلة الحاصلين على شهادة البكالوريا.

**التمرين 23**: لإيجاد فترة ثقة $95\%$ لنسبة عدد التلاميذ في المدارس الابتدائية الذين يستعملون النظارات الطبية، أخذت عينة عشوائية حجمها $900$ تلميذ فوجد أن عدد مستعملي النظارات الطبية $100$.

المطلوب: أوجد فترة الثقة المطلوبة.

**التمرين 24**: عينتان عشوائيتان مستقلتان ، الأولى من دائرة طولقة وتشمل $250$ رجلا ، والثانية من دائرة بسكرة وتشمل $300$ رجلا ، فإذا كان عد المدخنين في عينة طولقة $120$ مدخنا ، وعدد المدخنين في عينة بسكرة $150$ مدخنا .

المطلوب: أحسب فترة ثقة $95\%$ للفرق بين نسبة المدخنين في الدائرتين.

**التمرين 25**: في استفتاء خاص ببرنامج تليفزيوني للأطفال ، تم اختيار عينتين عشوائيتين مستقلتين الأولى تشمل $125$ طفلا ، والثانية تشمل $100$ طفلة ، فكان عدد المعجبين بالبرنامج من الأولاد $80$ طفلا ، وعدد المعجبين من البنات $75$ طفلة .

المطلوب : أوجد فترة ثقة $94\%$ للفرق بين نسبة كل المعجبين من الأولاد ونسبة كل المعجبين من البنات.

## حلول تمارين المحور الثاني:

**التمرين01**: لدينا : $n = 6 \quad ، \quad N = 20$

1.تقدير الوسط الحسابي للمجتمع بقيمة: ويتم ذلك من خلال إيجاد الوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ ،حيث :

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{3+4+9+8+7+5}{6} = 6$$

وعليه فان 6 هي تقدير للوسط الحسابي للمجتمع $\mu$

2.تقدير نسبة قيم المجتمع التي تزيد عن 5 (أي تقدير$P$): ويتم ذلك من خلال إيجاد نسبة قيم العينة التي تزيد عن 5 (أي تقدير$P$ بـ $p$ ) حيث :

$$\bar{p} = \frac{X}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$$

وعليه فان 0.5 هي تقدير لنسبة قيم المجتمع التي تزيد عن 5

3.تقدير تباين المجتمع بقيمة في حالة السحب مع الإرجاع : ويتم ذلك اعتمادا على تباين العينة $S^2$

$$S^2 = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{(3-6)^2+(4-6)^2+(9-6)^2+(8-6)^2+(7-6)^2+(5-6)^2}{6-1}$$

$$= 5.6$$

وعليه فان 5.6 هي تقدير لتباين المجتمع في حالة السحب مع الإرجاع.

4. تقدير تباين المجتمع بقيمة في حالة السحب دون إرجاع : ويتم ذلك من خلال ما يلي :

$$\frac{N-1}{N} S^2 = \frac{(20-1)}{20} 5.6 = 5.32$$

وعليه فان 5.32 هي تقدير لتباين المجتمع في حالة السحب دون إرجاع.

**التمرين02**:لدينا عينة تشمل القيم التالية: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

1.إثبات عدم تحيز المقدرات التالية: $x_1 \,,\, \overline{X} \,,\, \frac{x_1+x_2}{2} \,,\, x_5$

لدينا :
$$E(x_1) = \mu \quad , \quad E(\overline{x}) = \mu$$
$$E\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \mu \quad , \quad \mathbf{E}(x_5) = \mu$$

وعليه نستنتج أن كل المقدرات السابقة هي مقدرات غير متحيزة للمعلمة $\mu$ .

2.إيجاد المقدر الأفضل من بين المقدرات السابقة : ويتم ذلك من خلال المقارنة بين تباينات هاته المقدرات ، حيث أن المقدر الأقل تباين هو المقدر الأفضل.

$$\sigma^2_{x_1} = \sigma^2 \quad , \quad \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{5}$$

$$\sigma^2_{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)} = \frac{\sigma^2}{2} \quad , \quad \sigma^2_{x_5} = \sigma^2$$

نلاحظ أن $\overline{X}$ هو المقدر ذو التباين الأقل، وبالتالي يكون $\overline{X}$ هو المقدر الأفضل أو الأكثر كفاءة.

**التمرين03**:

المطلوب إيجاد فترة ثقة $98\%$ للوسط $\mu$

بما أن المجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وانحرافه المعياري معلوم فان فترة الثقة المطلوبة تأخذ الشكل التالي:

وبما أن : $1-\alpha = 0.98$ فان : $\frac{\alpha}{2} = 0.01$ وبالتالي يكون : $z_{\alpha/2} = 2.33$ من جدول التوزيع الطبيعي في الملحق رقم (01).

إذن بالتعويض في فترة الثقة السابقة نجد أن فترة ثقة $98\%$ للوسط $\mu$ هي :

$$77.67 \leq \mu \leq 82.33$$

ومنه نحن واثقون بدرجة ثقة $98\%$ بأن معلمة المجتمع $\mu$ تتراوح بين $77.67$ و $82.33$ .

**التمرين04**:

نريد إيجاد فترة الثقة $98\%$ للوسط $\mu$ :

بما أن المجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا وحجم العينة كبير بدرجة كافية فان فترة الثقة المطلوبة تأخذ الشكل التالي:

وبما أن : $1-\alpha = 0.98$ فان : $\frac{\alpha}{2} = 0.01$ وبالتالي يكون : $z_{\alpha/2} = 2.33$ من جدول التوزيع الطبيعي في الملحق رقم (01).

إذن بالتعويض في فترة الثقة السابقة نجد أن فترة ثقة 98% للوسط $\mu$ هي :

$$61.44 \leq \mu \leq 64.55$$

ومنه نحن واثقون بدرجة ثقة 98% بأن معلمة المجتمع $\mu$ تتراوح بين 61.44 و 64.55.

**التمرين05**:

المطلوب هو إيجاد فترة الثقة 98% لمعدل أطوال جميع طلبة الجامعة :

نلاحظ أن المجتمع لا يتبع التوزيع الطبيعي لكن حجم العينة كبير بدرجة كافية فان فترة الثقة المطلوبة تأخذ الشكل التالي:

وبما أن : $1-\alpha = 0.98$ فان : $\frac{\alpha}{2} = 0.01$ وبالتالي يكون : $z_{\alpha/2} = 2.33$ من جدول التوزيع الطبيعي في الملحق رقم (01).

إذن بالتعويض في فترة الثقة السابقة نجد أن فترة ثقة 98% للوسط $\mu$ هي :

1

$$167.7 \leq \mu \leq 172.3$$

ومنه نحن واثقون بدرجة ثقة 98% بأن معدل أطوال جميع طلبة الجامعة يتراوح بين 167.7سم و 172.3 سم.

**التمرين06**:

إيجاد فترة ثقة 99% لمتوسط محتويات العبوات لذلك النوع من المنظفات على افتراض أن محتويات العبوات يخضع للتوزيع الطبيعي.

بما أن حجم العينة صغير وتباين المجتمع مجهول فان فترة الثقة المطلوبة تأخذ الشكل التالي :

$[\overline{X}$

بما أن : $1-\alpha = 0.99$ فان : $\frac{\alpha}{2} = 0.005$

ومن جدول توزيع $t$ بدرجات حرية 8 الوارد في الملحق رقم (02) نجد أن :

$$t_{(0.005,8)} = 3.355$$

وبعد القيام بجميع العمليات الحسابية نجد أن الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعينة هما على التوالي :

$\overline{X} = 10$ ، $S = 0.76$

إذن فترة ثقة 99% لمتوسط محتويات العبوات لذلك النوع من المنظفات هي:

$10 -$

$$9.15 \leq \mu \leq 10.85$$

ومن هنا نستنتج أن متوسط محتويات العبوات لذلك النوع من المنظفات يتراوح بين 9.15 لتر و 10.85 لتر وهذا بدرجة ثقة 99% .

**التمرين07**:

1. إيجاد تقدير نقطي لمعدل زمن جميع الأفلام التي أنتجتها الشركة : ويتم ذلك من خلال إيجاد الوسط الحسابي لزمن عينة من الأفلام وهو $\overline{X}$ ،حيث :

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{102+99+96+105+103+98+101}{7} = 100.57$$

وعليه فان 100.57 هي تقدير نقطي لمعدل زمن جميع الأفلام المنتجة.

2. إيجاد فترة ثقة 95% لمعدل زمن جميع الأفلام التي أنتجتها تلك الشركة.

نلاحظ أن حجم العينة صغير وتباين المجتمع مجهول فان فترة الثقة المطلوبة تأخذ الشكل التالي :

$[\overline{X}$

بما أن : $1-\alpha = 0.95$ فان : $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

ومن جدول توزيع $t$ بدرجات حرية 6 الوارد في الملحق رقم (02) نجد أن :

$$t_{(0.025,6)} = 2.447$$

وبعد القيام بجميع العمليات الحسابية نجد أن الانحراف المعياري للعينة هو : $S = 3.10$

إذن فترة ثقة 95% لمعدل زمن جميع الأفلام التي أنتجتها تلك الشركة هي:

100.57

$$97.70 \le \mu \le 103.43$$

ومن هنا نستنتج أن معدل زمن جميع الأفلام التي أنتجتها تلك الشركة يتراوح بين 97.70 دقيقة و 103.43 دقيقة وهذا بدرجة ثقة 95% .

**التمرين08**:

لدينا:

$$E = 3 \quad , \quad \overline{x} = 75 \quad , \quad \sigma = 9$$

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

ومنه يكون:

$$z_{0.025} = 1.96$$

لتحديد حجم العينة اللازمة، فإننا سوف نطبق العلاقة التالية:

$$n \ge [\ \frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\ ]^2 \Leftrightarrow n \ge [\ \frac{1.96\ x\ 9}{3}\ ]^2$$

$$\Leftrightarrow n \ge 34.57$$

$$\Rightarrow n \approx 35 \text{ طالبا}$$

**التمرين09**:

لدينا:

$$E = 2 \quad , \quad \sigma = 8$$

$$1-\alpha = 0.92 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.04$$

ومنه يكون:

$$z_{0.04} = 1.75$$

ولتحديد حجم العينة اللازمة، فإننا سوف نطبق العلاقة التالية:

$$n \ge [\ \frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\ ]^2 \Leftrightarrow n \ge [\ \frac{1.75\ x\ 8}{2}\ ]^2$$

$$\Rightarrow n = 49 \text{ مشاهد}$$

وهو المطلوب

**التمرين 10**:

1.إيجاد حدود الثقة لمتوسط المجتمع عند مستوى الثقة 95% .

نلاحظ أن حجم العينة صغير وتباين المجتمع مجهول فان فترة الثقة المطلوبة تأخذ الشكل التالي :

$$\left[\bar{X}\right.$$

بما أن : $1-\alpha = 0.95$ فان : $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

ومن جدول توزيع $t$ بدرجات حرية 8 الوارد في الملحق رقم (02) نجد أن :

$$t_{(0.025,8)} = 2.306$$

إذن فترة ثقة 95% لمتوسط المجتمع هي:

2.73 .

$$2.36 \le \mu \le 3.1$$

ومن هنا نستنتج أن متوسط المجتمع يتراوح بين 2.36 و 3.1 وهذا بدرجة ثقة 95% .

2. حساب الحد الأقصى للخطأ في تقدير متوسط المجتمع عند مستوى الثقة 99% .

$$t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} = t_{(0.005,8)}\cdot\frac{0.48}{\sqrt{9}} = 3.355.\frac{0.48}{3} = 0.537$$

وهذا أقصى خطأ ممكن في تقدير متوسط المجتمع $\mu$.

**التمرين 11**:

بما أن العينتين كبيرتا الحجم ومستقلتان ، وتبايني المجتمعين معلومين ، فان فترة الثقة المطلوبة هي على الشكل التالي:

$$\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \right.$$

لدينا: $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.64$ وبالتعويض في هذه الفترة بالبيانات المتوافرة لدينا نتحصل على:

**الحد الأدنى لفترة الثقة:**

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = (4000) - 1.64.\sqrt{\frac{64000}{400} + \frac{36000}{300}}$$

$$= 3972.25$$

**الحد الأعلى لفترة الثقة:**

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{\alpha/2}.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = (4000) + 1.64.\sqrt{\frac{64000}{400} + \frac{36000}{300}}$$
$$= 4027.44$$

إذن **فترة الثقة للفرق** بين متوسطي الدخل في الولايتين$(\mu_1 - \mu_2)$ عند مستوى الثقة $90\%$ هي:

$$[3972.25 ، 4027.44]$$

**التمرين 12**:

بما أن العينتين كبيرتا الحجم ومستقلتان ، وتبايني المجتمعين مجهولين ، فان فترة الثقة المطلوبة هي على الشكل التالي:

$$\Big[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)-$$

لدينا: $z_{\alpha/2} = z_{0.01} = 2.33$ وبالتعويض في هذه الفترة بالبيانات المتوافرة لدينا نتحصل على:

**الحد الأدنى لفترة الثقة:**

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{\alpha/2}.\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = (-4.8) - 2.33.\sqrt{\frac{67.24}{90} + \frac{57.76}{160}}$$
$$= -7.25$$

**الحد الأعلى لفترة الثقة:**

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{\alpha/2}.\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = (-4.8) + 2.33.\sqrt{\frac{67.24}{90} + \frac{57.76}{160}}$$
$$= -2.24$$

إذن **فترة الثقة للفرق** بين المتوسطي $(\mu_1 - \mu_2)$ عند مستوى الثقة$98\%$ هي:

$$[-7.25 ، -2.24]$$

ومن هنا نستنتج أن متوسط المجتمع الثاني أكبر من متوسط المجتمع الأول.

**التمرين 13**:

1. تقدير الفرق بين متوسط درجات الطلبة الذين حضروا البرنامج الصيفي والطلبة الذين لم يحضروا هذا البرنامج :

لدينا البيانات التالية:

العينة الأولى:

$n_1 = 10$

$\overline{X}_1 = 510.2$

$s_1^2 = 88.36$

العينة الثانية:

$n_2 = 20$

$\overline{X}_2 = 501.1$

$s_2^2 = 72.25$

وبالتالي المطلوب هو : $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 = 510.2 - 501.1 = 9.1$

2. تحديد هامش خطأ المعاينة للتقدير: بما أن العينتان مستقلتان وحجمهما صغير ، وتبايني المجتمعين مجهولين ومتساويين فان هامش خطأ المعاينة للتقدير يأخذ الشكل التالي:

لدينا: $1 - \alpha = 0.95$ فان : $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

ولدينا: $\upsilon = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 20 - 2 = 28$

فيكون: $t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = t_{(0.025,28)} = 2.048$

كذلك نجد أن :

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)\,s_1^2 + (n_2-1)\,s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(10-1)88.36 + (20-1)72.25}{10+20-2} = 77.42$$

وعليه يكون :

$$t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \cdot \sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = 2.048\sqrt{77.42\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right)} = 6.98$$

وهو المطلوب

3. تحديد ما إذا كانت فترة ثقة 95% تشير إلى أن البرنامج الصيفي مفيد :

بعد القيام بجميع الحسابات نجد أن فترة الثقة المطلوبة هي:

$$(\mu_1 - \mu_2) = [2.12 \text{ ، } 16.08]$$

من خلال فترة الثقة السابقة نلاحظ أنها لا تحتوي لا على قيم سالبة ولا على القيمة صفر، وبالتالي فان فترة ثقة 95% تشير إلى أن البرنامج الصيفي مفيد .

**التمرين 14**:

حساب فترة ثقة 90% للفرق بين الوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$ هذا إذا كان تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين:

بعد القيام بمختلف العمليات الحسابية يتوفر لدينا البيانات التالية:

| العينة الأولى: | العينة الثانية: |
| --- | --- |
| $n_1 = 6$ | $n_2 = 5$ |
| $\overline{X}_1 = 7$ | $\overline{X}_2 = 5$ |
| $s_1^2 = 2$ | $s_2^2 = 4$ |

بنا أن المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا بتباينين غير متساويين ، والعينتين مستقلتان ، فان فترة الثقة المطلوبة في هذه الحالة هي:

$$\left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}.\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}\ ,(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}.\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}\right]$$

ولدينا : $1\text{-}\alpha = 0.90$ فان : $\frac{\alpha}{2} = 0.05$ ،ونجد أن درجة الحرية تساوي:

$$\upsilon = \left(\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1-1)} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2-1)}}\right) = \left(\frac{\left(\frac{2}{6}+\frac{4}{5}\right)^2}{\frac{\left(\frac{2}{6}\right)^2}{(6-1)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2}{(5-1)}}\right) = 7$$

وعليه يكون :

$$t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = t_{(0.05,7)} = 1.895$$

وعند التعويض في فترة الثقة المطلوبة نحصل على:

**الحد الأدنى لفترة الثقة:**

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}.\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)} = (7-5) - 1.895.\sqrt{\left(\frac{2}{6} + \frac{4}{5}\right)}$$
$$= \text{-}\ 0.017$$

**الحد الأعلى لفترة الثقة:**

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \cdot \sqrt{(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2})} = (7-5) + 1.895 \cdot \sqrt{(\frac{2}{6} + \frac{4}{5})}$$
$$= 4.017$$

إذن فترة ثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1 - \mu_2)$ عند مستوى الثقة %90 هي بالتقريب:

$$[-0.017 \;،\; 4.017]$$

**التمرين 15:**

بما ان العينتين مزدوجتين ، والمجتمعين يتوزعان طبيعيا ، فان فترة ثقة %95 للفرق بين متوسطي ضغط الدم قبل وبعد أخذ العلاج تحسب كما يلي:

$$\left[\bar{d} - t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \cdot \frac{s_d}{\sqrt{n}} \;,\; \bar{d} + t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \cdot \frac{s_d}{\sqrt{n}}\right]$$

وبعد القيام بجميع العمليات الحسابية نجد:

$$\bar{d} = 8.8$$

$$s_d = 10.50$$

لدينا: $1-\alpha = 0.95$ فان : $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

$$\upsilon = n - 1 = 15 - 1 = 14$$

فيكون : $t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = t_{(0.025,14)} = 2.145$

وعند التعويض في فترة الثقة السابقة نحصل على:

**الحد الأدنى لفترة الثقة:**

$$\bar{d} - t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \cdot \frac{s_d}{\sqrt{n}} = 8.8 - (2.145) \cdot \frac{10.50}{\sqrt{15}} = 2.99$$

**الحد الأعلى لفترة الثقة:**

$$\bar{d} + t_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} \cdot \frac{s_d}{\sqrt{n}} = 8.8 + (2.145) \cdot \frac{10.50}{\sqrt{15}} = 14.61$$

إذن فترة ثقة %95 للفرق بين متوسطي ضغط الدم قبل وبعد أخذ العلاج هي:

$$[2.99 \;،\; 14.61]$$

**التمرين 16:**

لدينا المجتمع محل الدراسة يتكون من درجات كل الطلبة المشتركين في هذا الامتحان، وبما أن هذا المجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا، فان فترة الثقة لتباين درجات كل الطلبة المشتركين في هذا الامتحان ستكون كما يلي :

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)}}$$

بعد القيام بالعمليات الحسابية نجد أن الوسط الحسابي وتباين العينة هما على التوالي:

$$\overline{x} = 64 \quad ، \quad S^2 = 216.5$$

ولدينا: $1-\alpha = 0.90$ ، $\alpha = 0.1$ ، $\frac{\alpha}{2} = 0.05$ ، $\upsilon = n-1 = 5-1 = 4$

ويكون: $\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = \chi^2_{(0.05,4)} = 9.488$

$$\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = \chi^2_{(0.95,4)} = 0.711$$

وبالتالي فان الحد الأدنى لهذه الفترة هو: $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}} = \frac{(5-1)216.5}{9.488} = 91.27$

و الحد الأعلى هو: $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)}} = \frac{(5-1)216.5}{0.711} = 1218$

وعليه فان فترة الثقة لتباين درجات كل الطلبة المشتركين في هذا الامتحان عند مستوى الثقة 90% هي: [91.27 ، 1218] ؛بعبارة أخرى نستطيع القول بثقة قدرها 90% بأن تباين درجات كل الطلبة المشتركين في هذا الامتحان يقع بين القيمتين 91.27 و 1218 .

**التمرين 17:**

بما أن المجتمع محل الدراسة يتوزع توزيعا طبيعيا، فان فترة الثقة لتباين المجتمع ستكون كما يلي :

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)}}$$

بعد القيام بالعمليات الحسابية نجد أن تباين العينة هو:

$$S^2 = \frac{128.41}{13-1} = 10.7$$

ولدينا: $1-\alpha = 0.95$ ، $\alpha = 0.05$ ، $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

$$\upsilon = n-1 = 13-1 = 12$$

ويكون: $\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = \chi^2_{(0.025,12)} = 23.337$

$$\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)} = \chi^2_{(0.975,12)} = 4.404$$

وبالتالي فان الحد الأدنى لهذه الفترة هو: $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon)}} = \frac{(13-1)10.7}{23.337} = 5.5$

و الحد الأعلى هو: $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon)}} = \frac{(13-1)10.7}{4.404} = 29.15$

وعليه فان فترة الثقة لتباين المجتمع عند مستوى الثقة 95% هي: [5.5 ، 29.15]

وبالتالي تكون فترة الثقة للانحراف المعياري للمجتمع عند نفس مستوى الثقة هي :

[2.34 ،5.40]

**التمرين 18**:

نلاحظ أن المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا ، والعينتين مستقلتان ، إذن فترة الثقة المطلوبة هي :

$$\frac{s_1^2/\,s_2^2}{F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{s_1^2/\,s_2^2}{F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}}$$

لدينا: $\upsilon_1 = n_1 - 1 = 5 - 1 = 4\ ,\quad \upsilon_2 = n_2 - 1 = 7 - 1 = 6$

وبما أن : $1-\alpha = 0.95$ ، $\alpha = 0.05$ ، $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ ، يكون :

$$F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)} = F_{(0.025,4,6)} = 6.23$$

$$F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)} = F_{(0.975,4,6)} = 0.11$$

وبالتالي فان الحد الأدنى لفترة الثقة هو: $\frac{s_1^2/\,s_2^2}{F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}} = \frac{2273/1759}{6.23} = 0.20$

و الحد الأعلى هو: $\frac{s_1^2/\,s_2^2}{F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}} = \frac{2273/1759}{0.11} = 11.75$

وعليه فان فترة الثقة لنسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ عند مستوى الثقة

95% هي: [ 0.20 ، 11.75 ] .

**التمرين 19**:

بنفس الطريقة السابقة نلاحظ أن المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا ، والعينتين مستقلتين ، إذن فترة الثقة المطلوبة تأخذ الشكل التالي :

$$\frac{s_1^2/\ s_2^2}{F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{s_1^2/\ s_2^2}{F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}}$$

بعد القيام بمختلف العمليات الحسابية نجد أن تبايني العينتين هما على التوالي : 4.4 و 2.5 .

ولدينا: $\upsilon_2 = n_2 - 1 = 5 - 1 = 4 \quad , \quad \upsilon_1 = n_1 - 1 = 6 - 1 = 5$

وبما أن : $1-\alpha = 0.99$ ، $\alpha = 0.01$ ، $\frac{\alpha}{2} = 0.005$ ، يكون :

$$F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)} = F_{(0.005,5,4)} = 15.52$$

$$F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)} = F_{(0.995,5,4)} = 0.09$$

وبالتالي فان الحد الأدنى لفترة الثقة هو: $\frac{s_1^2/\ s_2^2}{F_{(\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}} = \frac{4.4/2.5}{15.52} = 0.11$

والحد الأعلى هو: $\frac{s_1^2/\ s_2^2}{F_{(1-\frac{\alpha}{2},\upsilon_1,\upsilon_2)}} = \frac{4.4/2.5}{0.09} = 19.55$

وبالتالي فان فترة الثقة لنسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ عند مستوى الثقة 99% هي: [ 0.11 ، 19.55 ] .

**التمرين 20**:

لدينا: $n = 200$ ، $x = 70$

فإذا رمزنا لنسبة الطلبة المدخنين في الجامعة بـ P ، مع العلم أن هذه النسبة مجهولة فيتم تقديرها اعتمادا على نسبة الطلبة المدخنين في العينة $\bar{p}$ ، ومنه نجد:

$$\bar{p} = \frac{70}{200} = 0.35$$

وبالتالي فان النسبة 35% هي تقدير نقطي لنسبة الطلبة المدخنين في الجامعة ككل.

**التمرين 21**:

لدينا: $1-\alpha = 0.90$ فان : $\frac{\alpha}{2} = 0.05$ ، ومنه $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.65$

1- $P = 0.2 \quad , \quad E = 0.04$

فتكون: $$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 .P(1-P)$$

$$n \geq \left(\frac{1.65}{0.04}\right)^2 .(0.2)(0.8)$$

$$n \geq 272.25$$

ومنه حجم العينة المطلوب هو $n = 272$

2 - بما أن P غير معلومة فإننا نضع مكانها أسوأ قيمة وهي : $P = \frac{1}{2}$

فتكون: $$n \geq \frac{1}{4}\left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2$$

$$n \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1.65}{0.04}\right)^2$$

$$n \geq 425.39$$

ومنه حجم العينة المطلوب هو $n = 426$

**التمرين 22**:

1- نسبة المعلمين في المرحلة الابتدائية الحاصلين على شهادة البكالوريا تقدر بالقيمة :

$$\bar{p} = \frac{80}{400} = 0.2$$

2- بما أن حجم العينة كبير، فان فترة الثقة المطلوبة تأخذ الشكل التالي:

$$\left[\bar{p} - \boldsymbol{z_{\alpha/2}}\cdot\sqrt{\left(\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}\right)} \quad , \quad \bar{p} + \boldsymbol{z_{\alpha/2}}\cdot\sqrt{\left(\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}\right)}\right]$$

ولدينا $1-\alpha = 0.99$ فان : $\frac{\alpha}{2} = 0.005$ ، وبالتالي من جدول التوزيع الطبيعي المعياري الموضح في الملحق رقم (01) يكون : $z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.58$

وعند التعويض في فترة الثقة السابقة نحصل على:

**الحد الأدنى لفترة الثقة:**

$$\left[\bar{p} - z_{\boldsymbol{\alpha/2}} . \sqrt{(\frac{\bar{p}\bar{q}}{n})}\ \right] = 0.2 - 2.58\sqrt{\frac{(0.2)(0.8)}{400}}$$
$$= 0.1484$$

**الحد الأعلى لفترة الثقة:**

$$\left[\bar{p} + z_{\boldsymbol{\alpha/2}} . \sqrt{(\frac{\bar{p}\bar{q}}{n})}\ \right] = 0.2 + 2.58\sqrt{\frac{(0.2)(0.8)}{400}}$$
$$= 0.2516$$

وعليه يمكن القول بثقة $99\%$ بأن النسبة الحقيقية للمعلمين في هذه المرحلة الحاصلين على شهادة البكالوريا تقع بين $14.84\%$ و $25.16\%$ .

**التمرين 23:**

نسبة عدد مستعملي النظارات الطبية في العينة تساوي $\bar{p} = \frac{100}{900} = 0.11$

بما أن حجم العينة كبير، فان فترة الثقة المطلوبة تأخذ الشكل التالي:

$$\left[\bar{p} - \boldsymbol{z_{\alpha/2}} . \sqrt{(\frac{\bar{p}\bar{q}}{n})}\quad ,\quad \bar{p} + \boldsymbol{z_{\alpha/2}} . \sqrt{(\frac{\bar{p}\bar{q}}{n})}\ \right]$$

لدينا $1\text{-}\alpha = 0.95$ فإننا نجد : $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ ، ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري الموضح في الملحق رقم (01) يكون : $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$

وعند التعويض في فترة الثقة السابقة نحصل على:

**الحد الأدنى لفترة الثقة:**

$$\left[\bar{p} - z_{\boldsymbol{\alpha/2}} . \sqrt{(\frac{\bar{p}\bar{q}}{n})}\ \right] = 0.11 - 1.96\sqrt{\frac{(0.11)(0.89)}{900}}$$
$$= 0.0904$$

**الحد الأعلى لفترة الثقة:**

$$\left[\bar{p} + z_{\alpha/2}.\sqrt{(\frac{\bar{p}\bar{q}}{n})}\right] = 0.11 + 1.96\sqrt{\frac{(0.11)(0.89)}{900}}$$
$$= 0.1304$$

وعليه فان فترة الثقة لنسبة التلاميذ الذين يستعملون نظارات طبية في المدارس الابتدائية تقع بين $9.04\%$ و $13.04\%$ وهذا بدرجة ثقة قدرها $95\%$ .

**التمرين 24:**

بما أن العينتان العشوائيتان مستقلتان وكبيرتا الحجم ، فان فترة الثقة المطلوبة هي:

$$(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}_1\,\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\,\bar{q}_2}{n_2}}$$

ومن البيانات المتوافرة لدينا نستطيع حساب ما يلي:

نسبة المدخنين في عينة دائرة طولقة هي: $\bar{p}_1 = \frac{120}{250} = 0.48$

نسبة المدخنين في عينة دائرة بسكرة هي: $\bar{p}_2 = \frac{150}{300} = 0.50$

ولدينا: $1-\alpha = 0.95$ فان : $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ ، ومنه $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$

وعند التعويض في فترة الثقة السابقة نحصل على:

$$(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}_1\,\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\,\bar{q}_2}{n_2}} = (-0.02) \pm 1.96\sqrt{\frac{(0.48)(0.52)}{250} + \frac{(0.5)(0.5)}{300}}$$

$$\Rightarrow (P_1 - P_2) \in [-0.10\ ,\ 0.06]$$

أي نستطيع القول بثقة قدرها $95\%$ أن الفرق بين نسبة المدخنين في الدائرتين يقع بين النسبتين $-10\%$ و $6\%$ .

**التمرين 25**:

نلاحظ أن العينتان العشوائيتان مستقلتان وكبيرتا الحجم ، ومنه فان فترة الثقة المطلوبة هي:

$$(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}_1\,\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\,\bar{q}_2}{n_2}}$$

ومن البيانات المتوافرة لدينا نستطيع حساب ما يلي:

نسبة المعجبين بالبرنامج التلفزيوني من الأولاد هي: $\bar{p}_1 = \frac{80}{125} = 0.64$

نسبة المعجبين بالبرنامج التلفزيوني من البنات هي : $\bar{p}_2 = \frac{75}{100} = 0.75$

ولدينا: $1-\alpha = 0.94$ فان : $\frac{\alpha}{2} = 0.03$ ، ومنه $z_{\alpha/2} = z_{0.03} = 1.88$

وعند التعويض في فترة الثقة السابقة نحصل على:

$$(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}_1\,\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\,\bar{q}_2}{n_2}} = (-0.11) \pm 1.88 \sqrt{\frac{(0.64)(0.36)}{125} + \frac{(0.75)(0.25)}{100}}$$

$$\Rightarrow (P_1 - P_2) \in [-0.2246 \;,\; 0.0046]$$

وبالتالي نستطيع القول بثقة قدرها 94% أن الفرق بين نسبة كل المعجبين من الأولاد ونسبة كل المعجبين من البنات يقع بين النسبتين -22.46% و 0.46% .