4. Contraintes normales et tangentielles en flexion

Une flexion simple, engendre les deux types de contraintes :

- Des contraintes normales, dues au moment fléchissant M_z ;
- Des contraintes tangentielles, dues à l'effort tranchant Q_y.

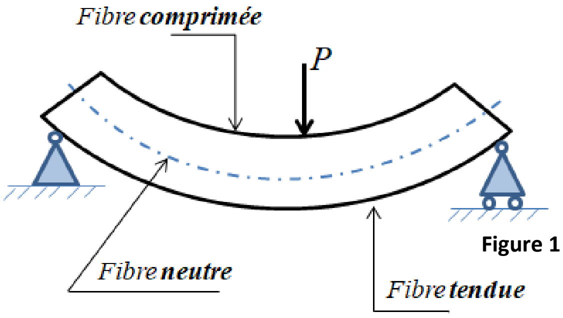

Figure 1

4.1 Etude des déformations en flexion

Considérons un élément dS de la poutre avant et après déformation :

Avant déformation **Après déformation**

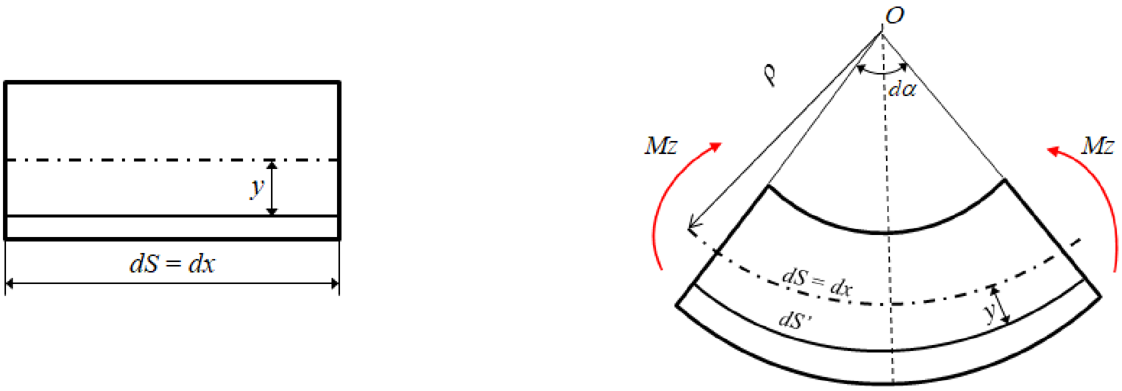

Figure 7

Soit ρ le rayon de courbure de l'élément dS de la déformée. La déformation relative dans la direction de l'axe est donnée par :

$$\varepsilon_x = \frac{dS' - dS}{dS} = \frac{(\rho + y)d\alpha - \rho d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{y}{\rho}$$

La déformation normale le long de la section droite est :

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho} \tag{5}$$

$\kappa = \frac{1}{\rho}$ est la courbure de la déformée.

4.2 Contraintes Normales

L'équation de la contrainte normale s'écrit alors selon la loi de Hook :

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{y}{\rho}$$

E est le module de Young.

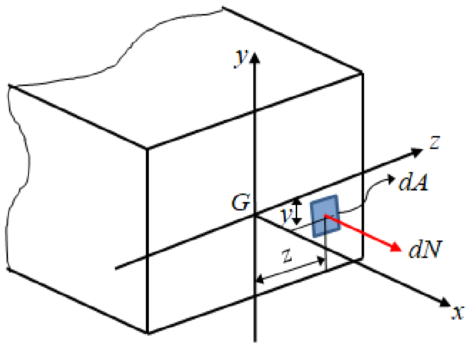

Figure 8

Equations d'équilibre :

- $1^{ière}$ condition d'équilibre : $N = \int_{(dA)} dN = 0$

$$dN = \sigma_x dA = \frac{E}{\rho} y dA \quad \text{et donc} \quad N = \int_{(dA)} \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_{(dA)} y dA = 0$$

Le rapport E/ρ ne dépend pas des dimensions de la section ; donc seul le terme $\int y dA$ représentant le moment statique de l'aire de la section par rapport à l'axe 'z' est nul : $\int y dA = 0$.

Conclusion : l'axe z est un axe central c'est – à – dire qui passe par le centre de gravité de la section.

- Calcul du moment par rapport à l'axe z

$$dM_z = ydN = y\sigma_x dA = \frac{E}{\rho} y^2 dA \Rightarrow M_z = dM_z = \frac{E}{\rho}\int y^2 dA$$

La quantité $\int y^2 dA$ représente le moment quadratique I_z.

L'équation des contraintes normale de flexion s'écrit :

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{y}{\rho} = E\frac{M_z y}{EI_z} = \frac{M_z y}{I_z}$$

On écrit enfin :

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} \qquad (6)$$

M_z : Le moment fléchissant agissant sur la section droite ;
I_z : Le moment d'inertie par rapport à l'axe z ;
y: L'ordonnée du point considéré.
Remarque : σ_x est calculée en tous point $M(z,y)$ d'une section.

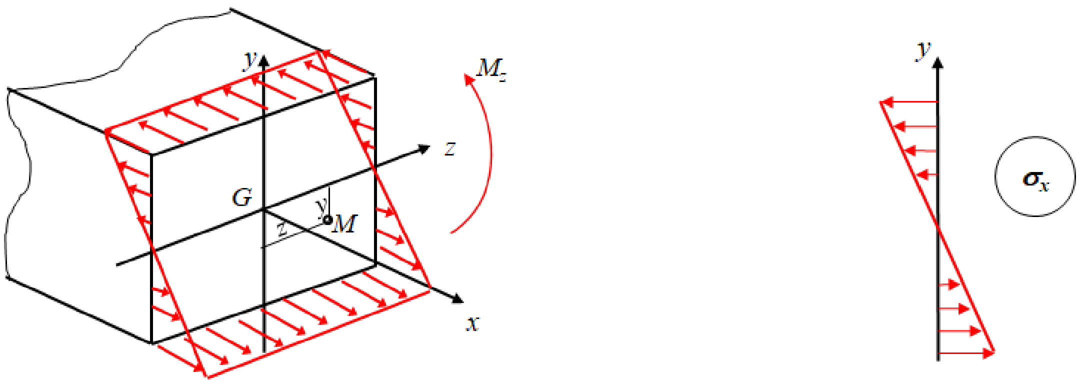

Figure 9 : Distribution des contraintes normales σ_x dans la section

4.3 Contraintes tangentielles

Considérons deux poutres collées le long de la surface de contact de sorte qu'ils deviennent une seule poutre. Lorsque cette poutre est chargée, des contraintes de cisaillement horizontales doivent se développer le long de la surface collée afin d'éviter le glissement illustré à la figure 10.

Figure 10 : Phénomène de cisaillement du à la flexion

En un point arbitrairement choisi de la section droite d'une poutre en flexion, la valeur de la contrainte tangentielle est déterminée par la formule suivante :

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y . S_z^*(y)}{I_z b(y)} \qquad (7)$$

- Q_y est l'effort tranchant dans la section ;
- $S_z^*(y)$ est le moment statique par rapport à l'axe z de la partie de la section droite située au dessous du niveau y où la contrainte est déterminée ;
- $b(y)$ est la largeur de la section au niveau de y ;
- I_z est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe z.