

série n°2: Fonctions convexes multidimensionnelles

Exercice n°1:

Sont les fonctions suivantes:

1) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f(x) = x_1^2 + x_2^2$

2) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f(x) = x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2$

3) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Calculer, pour chaque fonction, le vecteur gradient, la matrice hessienne et trouver la nature de chaque fonction en utilisant la méthode des valeurs propres / celle des mineurs principaux.

Exercice n°2:

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$

Montrer que f est convexe et trouver l'optimum local, et si global.

b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f(x) = e^{-x_1} + x_2$

Montrer que f est concave, f admet-elle un optimum global?

Exercice n°3

1) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f(x) = 2x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 8x_2^2 + 4$

2) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f(x) = 3x_1 + 5x_2 - 4x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 x_2$

3) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f(x) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 3x_2 + x_3$

Quelle est la nature de chaque fonction? s'agit-il d'une fonction convexe? concave? strictement ou non? justifier votre réponse.

Exercice n°4:

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow f(x) = 9x_1^2 + 4x_2^2 + 24x_1 x_2$

lesquelles f est convexe.

Exercice n° 5:

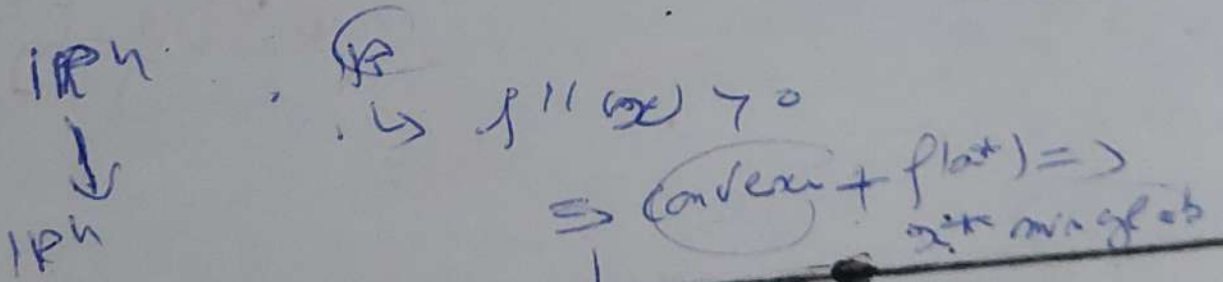
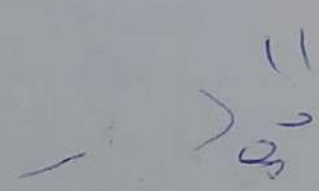
Donner une condition suffisante, sur les fonctions g_i , pour que l'ensemble $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, p\}$ soit convexe et fermé, puis donner une condition suffisante sur les fonctions $g_i, i=1, \dots, p$ et $h_j, j=1, \dots, q$, pour que l'ensemble $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, p, h_j(x) = 0, j=1, \dots, q\}$ soit convexe fermé.

Exercice n° 6:

Soit F une fonction de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, pour u et v fixés dans \mathbb{R}^n , on définit la fonction de $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, suivante:

$$\forall \lambda > 0, \quad \Phi(\lambda) = \frac{F(u + \lambda v) - F(u)}{\lambda}$$

Montrer que si F est convexe, alors Φ est une fonction croissante.



$H(x) = \frac{1}{x^2}$
 de f pour $x > 0$

$f(x) = 3x \rightarrow$ ni de min
 $x^* \rightarrow > 0 \rightarrow$ min l
 $< 0 \rightarrow$ max l