série n° 2 : Fonctions convexes multidimensionnelles

Exercice n° 1 :

Soient les fonctions suivantes :

1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = x_1^2 + x_2^2$

2) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2$

3) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Calculer, pour chaque fonction, le vecteur gradient, la matrice hessienne et trouver la nature de chaque fonction en utilisant la méthode des valeurs propres et celle des mineurs principaux.

Exercice n° 2 :

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$

Montrer que f est convexe et trouver l'optimum local, est-il global.

b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = e^{-x_1} + x_2$

Montrer que f est convexe, f admet-elle un optimum global ?

Exercice n° 3

1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = 2x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4$

2) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = 3x_1 + 5x_2 - 4x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$

3) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 - 3x_2 + x_3$

~~Quelle est la nature de chaque fonction ? s'agit il d'une~~ fonction convexe ? concave ? strictement ou non ?
justifier votre réponse.

Exercice n° 4 :

Soit $f_{M} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f_{M}(x) = 9x_1^2 + 4x_2^2 + 2Mx_1x_2$

lesquelles f_M est convexe.

Exercice n°5 :

Donner une condition suffisante, sur les fonctions g_i, pour que l'ensemble $C = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, g_i(x) \le 0,\ i = 1 - p\}$ soit convexe et fermé, puis donner une condition suffisante sur les fonctions g_i, $i = 1, -, p$ et h_j, $j = 1, -, q$, pour que l'ensemble $C = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, g_i(x) \le 0,\ i = 1 - p,\ h_j(x) = 0,\ j = 1 - q\}$ soit convexe fermé.

Exercice n°6 :

Soit F une fonction de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pour u et v fixés dans $\mathbb{R}^n$, on définit la fonction de $\mathbb{R}^*_+$ vers $\mathbb{R}$, suivante :

$$\forall \lambda > 0, \quad \Phi(\lambda) = \frac{F(u + \lambda v) - F(u)}{\lambda}$$

Montrer que si F est convexe, alors Φ est une fonction croissante.

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$f''(x) > 0$

$\Rightarrow$ (convexe $+ f'(x^*) =$) $\Rightarrow$ x^* min glob

$f'(x) = 3x \to$ ni défini

$x^* \to > 0 \to$ min l

$< 0 \to$ max loc