Chapitre II

Les ~~Sous~~ Variétés différentiables :

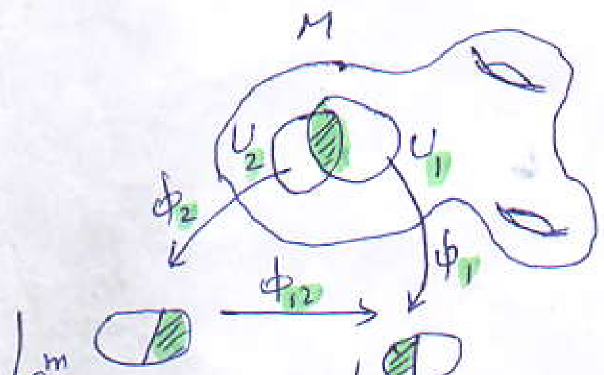
Soit M un espace topologique séparé et à base dénombrable.

Dfn : on appelle carte locale en a (ou au voisinage de a), le couple (U, ϕ) tel que :

- $a \in U \subset M$, U est un ouvert de M, qu'on appelle domaine de carte.
- $\phi : U \longrightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ est un homéomorphisme que l'on appelle fonction coordonné, le nombre m est appelé la dimension de la carte considérée

Rem.

- si $\phi(a) = 0$, on dit que la carte (U, ϕ) est centré en $a \in M$.
- l'application inverse $\phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow U$ s'appelle une paramétrisation de U.
- On pose souvent $\phi = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ et on appelle les composantes de ϕ $\{x^i \,/\, i = \overline{1, n}\}$ système de coordonnés, les nombres $(x^1(a), x^2(a), \dots, x^m(a))$ s'appellent les coordonnées de a dans la carte (U, ϕ).
- si (U_1, ϕ_1) et (U_2, ϕ_2) deux carte locales sur M et $U_1 \cap U_2 \neq \phi$, l'application $\phi_{12} = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ est appelée changement de carte ou fn. de transition.
- Deux cartes sont compatibles ssi $U_1 \cap U_2 = \phi$ ou si $\phi_{12} = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ est difféomorphisme entre $\phi_2(U_1 \cap U_2)$ et $\phi_1(U_1 \cap U_2)$.



Rem. Les hypothèses de séparation et paracompact doivent être ajoutées dans la définition afin d'éviter certains exemples "Pathologiques".

- l'hypothèse de séparation garantit que la limite d'une suite convergente soit unique.
- l'hypothèse "à base dénombrable d'ouverts" garantit l'existence d'une partition de l'unité.

Rem.

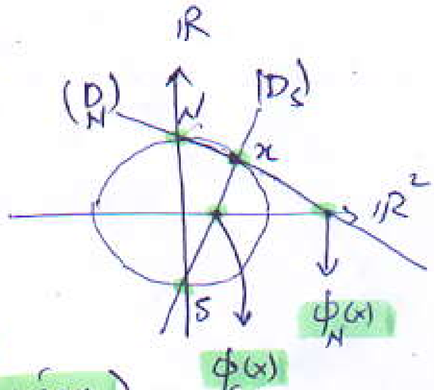
* Si les deux cartes (U_1, ϕ_1) et (U_2, ϕ_2) sur M sont compatibles, alors elles ont même dimension (car $\phi_{12}=\phi_1\circ\phi_2^{-1}$ est un difféom. entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$) (t.q $n=\dim(U_1,\phi_1)$, $m=\dim(U_2,\phi_2)$).

EX. ① le couple (U, Id) est une carte locale sur $\mathbb{R}^n$, t.q. U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

EX. ② le couple $(\mathbb{R}, x\mapsto x^3)$ est une carte de $\mathbb{R}$, elle n'est pas compatible avec la carte $(\mathbb{R}, x\mapsto x)$; dite canonique. En effet, l'application $x\mapsto x^{1/3}$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$, car elle ne pas dérivable en $x=0$.

EX. ③ le couple (U_N, ϕ) t.q. $U_N=\mathbb{S}^1\setminus\{(1,0)\}$ et $\phi : U_N \longrightarrow]0,2\pi[\, ; (\cos\theta,\sin\theta)\mapsto\theta$ est une carte sur $\mathbb{S}^1\subset\mathbb{R}^2$.

EX ④ les projections stéréographiques : (U_N,ϕ_N), (U_S,ϕ_S) sont des cartes sur $\mathbb{S}^2$
On note $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{S}^2\subset\mathbb{R}^3$, non égal au pôle nord $N=(0,0,1)$, et $\phi_N(x)$ est défini comme l'intersection de l'hyperplan $\{z=0\}\subset\mathbb{R}^3$ avec la droite $(D_N)=\{tx+(1-t)N \;/\; t\in\mathbb{R}\}$.



on a : $D_N=\{(tx_1, tx_2, t(x_3-1)+1) \;/\; t\in\mathbb{R}\}$ et.

$D_N\cap\mathbb{R}^2\times\{0\}=\{(y_1,y_2)\}\Rightarrow t(x_3-1)+1=0\Rightarrow t=\frac{1}{1-x_3}$.

Donc $\phi_N(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{1-x_3}(x_1,x_2)$ $(:\mathbb{S}^2\setminus\{N\}\longrightarrow\mathbb{R}^2)$ (homéom.)

Calculons la réciproque $\phi_N^{-1}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{S}^2\setminus\{N\}=U_N$. on pose la forme a priori $\phi_N^{-1}(y_1,y_2)=(\alpha y_1,\alpha y_2,\beta)$, alors $\phi_N(\alpha y_1,\alpha y_2,\beta)=\frac{\alpha}{1-\beta}(y_1,y_2)\Rightarrow\alpha=1-\beta$,

par ailleurs, $\phi_N^{-1}(y_1,y_2)\in\mathbb{S}^2$, donc $\alpha^2y_1^2+\alpha^2y_2^2+\beta^2=1\Rightarrow\alpha^2\|y\|^2+(1-\alpha)^2=1$

$$\Rightarrow \alpha^2(1+\|y\|^2)=2\alpha \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\Rightarrow y=N\\ \vee\\ \alpha=\frac{2}{1+\|y\|^2}\end{cases} \Rightarrow \phi_N^{-1}(y_1,y_2)=\left(\frac{2y_1}{1+\|y\|^2},\frac{2y_2}{1+\|y\|^2},\frac{-1+\|y\|^2}{1+\|y\|^2}\right)$$

De même manière on trouve que : $\phi_S : U_S=\mathbb{S}^2\setminus\{S\}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ / $S=(0,0,-1)$

$\phi_S(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{1+x_3}(x_1,x_2)$ et $\phi_S^{-1}(y_1,y_2)=\left(\frac{2y_1}{1+\|y\|^2},\frac{2y_2}{1+\|y\|^2},\frac{1-\|y\|^2}{1+\|y\|^2}\right)$

$\phi_S\circ\phi_N^{-1}=\phi_N\circ\phi_S^{-1}:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\,;\; y\longmapsto\frac{y}{\|y\|^2}$ ($\mathcal{C}^\infty$-difféom)

$\phi_S^{-1}\circ\phi_N=\phi_N^{-1}\circ\phi_S:\mathbb{S}^2\setminus\{N,S\}\longrightarrow\mathbb{S}^2\setminus\{N,S\}\,;\; (x_1,x_2,x_3)\longmapsto(x_1,x_2,-x_3)$.

Il y a 4 manière équivalents de définir les sous-variété :

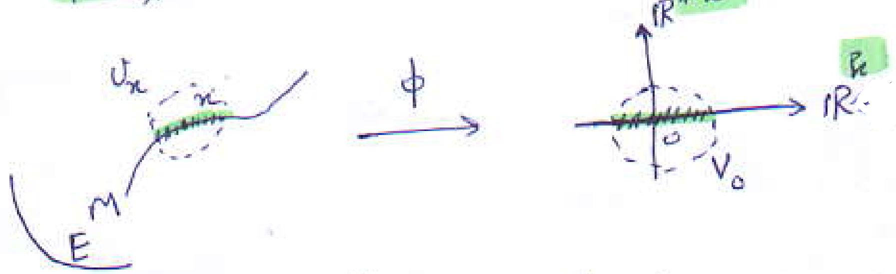
<u>Dfn. 1</u> (Forme normale ou Défn. locale par redressement) :

Soit E un $\mathbb{R}$-evn de Banach (on prend souvent $E = \mathbb{R}^n$).
Une partie M de E est une sous-variété de dimension k $(0 \leq k \leq n)$ et de classe C^r $(r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty, \omega\})$ <u>ssi</u> pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans E, un voisinage V_0 de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un C^r-difféom. $\phi : U_x \longrightarrow V_0$ tels que :

$$\phi(U_x \cap M) = V_0 \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}) \quad \cdots \quad (1)$$

<u>Rem.</u> on peut remplacer la condition (1) a priori plus forte :

$$\phi(U_x \cap M) = \phi(U_x) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\})$$



<u>Ex.</u> Toute sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ de $\dim = d$ est une sous-variété de $\dim = d$.

<u>Ex.</u> si $k = n$, alors, on a $\phi(U_x \cap M) = \phi(U_x) \cap \mathbb{R}^n = \phi(U_x) \Rightarrow U_x \cap M = U_x$ donc $U_x \subset M$. $\Rightarrow$ les sous-variétés de dim. maximale $(= n)$ sont donc des ouverts.

<u>Ex.</u> si $k = 0$, alors, on a $\phi(U_x \cap M) = \phi(U_x) \cap \{0\} = \{0\} \Rightarrow U_x \cap M$ se réduit au pt. $\phi^{-1}(0) \Rightarrow$ les sous-variété de $\dim = 0$ sont donc des parties discrètes de E et réciproquement.

<u>Rem.</u> L'image d'une sous-variété par un difféom. $f : E \longrightarrow E$ est une sous-variété de même dimension.

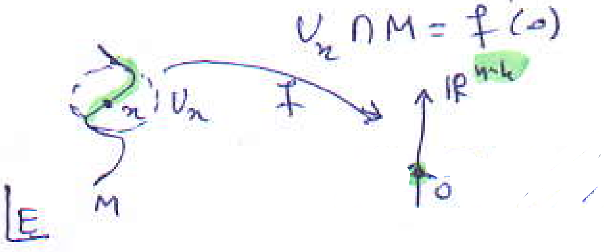
<u>Rem.</u> Puisque ϕ induit un homéom. de $U_x \cap M$ sur un ouvert $V_0 \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ de $\mathbb{R}^k$, une sous-variété de $\dim = k$ possède, localement, les même propriétés topologique que $\mathbb{R}^k$.

<u>Ex.</u> Otons un pt. x_0 à une sous-variété M de $\dim = 1$, alors un voisinage de $M \setminus \{x_0\}$ est formé de deux parties connexe disjointes. C'est pourquoi la partie de $\mathbb{R}^2$ $\{(x, y) \mid xy = 0\}$ n'est pas une sous-variété ; privée de l'origine, elle est formée de 4 composantes connexes.

Dfn.2 (Défn. locale par fn. implicite ou par équation)

pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans E ($E = \mathbb{R}^n$) et une app. $f : U_x \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de classe $\mathcal{C}^r$ qui est une submersion en x, tels que

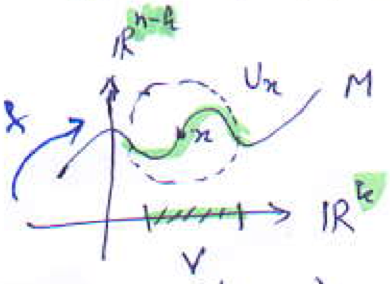
$$U_x \cap M = f^{-1}(0)$$



Dfn3 (Défn. locale par graphe) :

pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans $E = \mathbb{R}^n$, un ouvert V de $\mathbb{R}^k$ et une app. $f : V \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de classe $\mathcal{C}^r$ tel que :

$$U_x \cap M = \{(x, f(x)) \,/\, x \in V\}$$



Dfn4 (Défn. locale par paramétrage) :

pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans $E = \mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V_0 de 0 dans $\mathbb{R}^k$ et une app. $f : V_0 \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^r$ tel que $f(0) = x$, f soit une immersion en 0 et f soit un homéom. de V_0 sur $U_x \cap M$

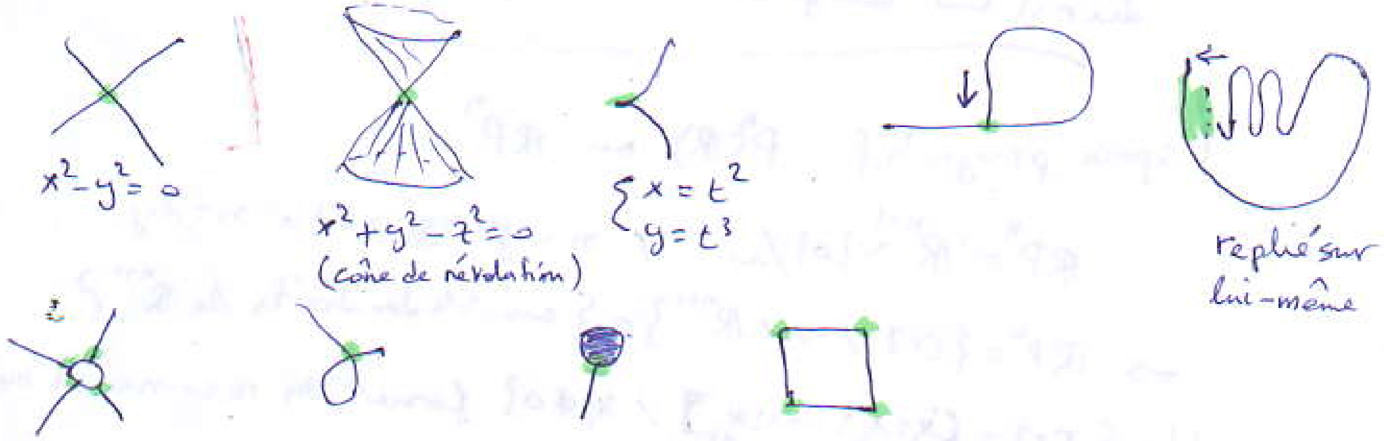
Thm. Soient $M_1 \subset E_1$ et $M_2 \subset E_2$ deux sous-variétés de classe $\mathcal{C}^r$ et de dimension k_1, k_2 respec. alors $M_1 \times M_2$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^r$ et de dim $= k_1 + k_2$ de $E_1 \times E_2$.

Ex. $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ et de dim $= 2$ de $\mathbb{R}^4$ (car S^1 est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de dim $= 1$ de $\mathbb{R}^2$).

Ex le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ est une sous-variété de dim $= 2$ de $\mathbb{R}^3$.

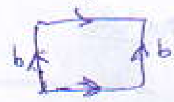
Rem. Une sous-variété de dim $=1$ (resp. de dim $=k$) est une partie de $\mathbb{R}^n$ telle que si on "zoome" sur n'importe lequel de ses pts., on finit par avoir d'un morceau de droite (resp. d'un ouvert de $\mathbb{R}^k$).

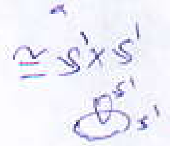
Ex. les dessins suivants ne sont pas des sous-variétés :



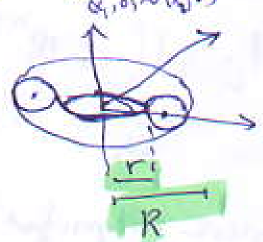
Ex. $M=\{(\frac{1}{n},0)\ /\ n\in\mathbb{N}^*\}$ est une sous-variété de dim $=0$ (car tous les pts sont isolés), alors que $\overline{M}=M\cup\{(0,0)\}$ ne l'est pas (car zéro n'est pas isolé)

Ex. (sphère) $S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\ /\ \|x\|=1\}$, elle est donnée par l'eqn. $f=0$ où $f(x)=\|x\|-1$, on a $df_x : h\longmapsto \frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|}=\langle x,h\rangle$, il s'agit d'une forme linéaire non-nulle donc surjective, ceci montre que f est bien une submersion en tout pt de S^n $\Rightarrow$ S^n est une sous-variété de dim $=n$.

Ex. Tore de révolution $\mathbb{T}^2\ (\simeq S^1\times S^1)\cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\simeq I\times I/_{(0,x)\sim(1,x),\ (x,0)\sim(x,1)}\cong$  $\cong S^1\times S^1$



une eqn. cartésienne de $\mathbb{T}^2$ est donnée par



$$f(x,y,z)=\left(R^2-(x^2+y^2)\right)\left(x^2+y^2-r^2\right)-z^2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_x f = 2x\left(2(x^2+y^2)-r^2-R^2\right) \\ \partial_y f = 2y\left(2(x^2+y^2)-r^2-R^2\right) \\ \partial_z f = -2z \end{cases} \Rightarrow f \text{ est une submersion en tout pt de } \mathbb{T}^2$$

$\Rightarrow \mathbb{T}^2$ est une sous-variété de dim $=2$ $\quad (f : \mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^1)$

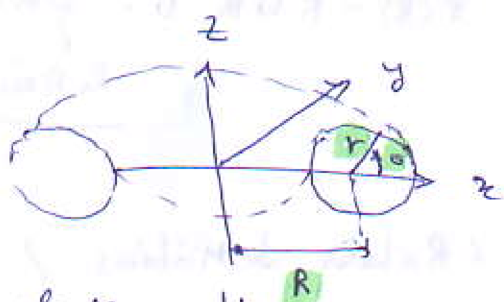
Tore à m trous

Soit $f(x) = x(x-1)^2 \cdot \ldots \cdot (x-m)^2$ et $r > 0$

$\Sigma = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (y^2 - f(x))^2 + z^2 = r^2 \}$

décrit une surface à m trous.

Méthode 2 : si l'on choisit l'axe (Oz) comme axe de rotation, le cercle de rayon $r>0$ étant centré au pt. $(R,0,0)$ a pour eqn. paramétrique :



$$\begin{cases} x(\theta) = R + r\cos\theta \\ y(\theta) = 0 \\ z(\theta) = r\sin\theta \end{cases}$$

En transformant par rotation d'axe (Oz) et d'angle φ, on obtient :

$$\begin{cases} x'(\theta,\varphi) = (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ y'(\theta,\varphi) = (R + r\cos\theta)\sin\varphi \\ z'(\theta,\varphi) = r\sin\theta \end{cases} \quad / \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathbb{T}^2} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_{(Oz)}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{S^1}$$

On vérifie que f est une immersion, homéom. de $]0,2\pi[\times]0,2\pi[$ dans $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ $\Rightarrow$ $\mathbb{T}^2$ est une sous-variété de dim $= 2$

$\left(\text{Jac} = r^2(R + r\cos\theta)^2\right)$

Rem.

Le tore $\mathbb{T}^2$ a pour eqn. cartésienne :

$$\left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 = r^2 \quad \text{ou}$$

$$(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)^2 = 4R^2(x^2+y^2) \Rightarrow$$

une surface est dite algébrique lorsqu'elle possède une eqn. cartésienne polynomiale à coefficients réels. le degré d'une S.A. d'eqn $P(x,y,z)=0$ est le degré du polynôme P.

(utiliser la défn. par eqn.)

Ex. (le tore de genre $g \geq 1$) :

Utiliser la défn. par eqn. $f(x,y,z) = ?$

$$f(x,y,z) = \left(R^2 - (x^2+y^2)\right)\prod_{i=1}^{g}\left((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 - r_i^2\right) - z^2$$

Ex. Soit $O(n)$ le groupe orthogonal : $O(n) = \{ M \in GL_n(\mathbb{R}) \;/\; M^{-1} = {}^tM \}$

et $SO(n)$ le groupe spécial orthogonal $SO(n) = \{ M \in GL_n(\mathbb{R}) \;/\; M^{-1} = {}^tM \text{ et } \det(M) = 1 \}$

$O(n)$ est une sous-variété de dim $= \frac{n(n-1)}{2}$ de $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. En effet, on définit :

$f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques) par $f(M) = {}^tMM - I_n$

Alors $O(n) = f^{-1}(0)$ et f est une submersion en tout pt de $O(n)$.

$d_Mf \cdot H = {}^tMH + {}^tHM$, En particulier si A est symétrique et orthogonale, on a :

$d_Mf\left(\frac{MA}{2}\right) = A \Rightarrow d_Mf$ surjective sur $O(n)$ $\Rightarrow f$ est une submersion. $\left(\dim O(n) = \dim(M_n) - \dim S_n\right.$

$$\dim = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

<u>L'espace projectif réel</u> : L'espace projectif réel de dimension n, noté $P^n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$.

On peut donc considérer $P^n(\mathbb{R})$ comme l'espace quotient de $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ par la relation d'équivalence : $x \sim y$ ssi x et y sont colinéaires (i.e. $\exists \lambda \neq 0 : y = \lambda x$).

<u>Rem</u>. Autre interprétation est possible : l'espace projectif réel est homéomorphe au quotient de S^n par l'identification des points x et $-x$.

(i.e. $P^n(\mathbb{R}) \cong S^n/_{x\sim -x}$)

On note $[x] = [x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}]$ la classe d'équivalence de $x = (x_1, \cdots x_{n+1})$; on dit que $[x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}]$ est la coordonnée homogène du pt. x de $P^n(\mathbb{R})$.

L'application
$$\pi : \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$$
$$x \longmapsto [x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}]$$
est la projection naturelle

soit $U_i = \pi(\{x \mid x_i \neq 0\})$ et $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :
$$\phi_i([x]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$
($\frac{x_i}{x_i}$ est omis.)

l'application ϕ_i est bijective et continue d'application réciproque donnée par : $\phi_i^{-1}(y_1, \cdots, y_n) = [y_1 : \cdots : y_{i-1} : 1 : y_i : \cdots y_n]$, ce qui montre que ϕ_i est un homéomorphisme de U_i sur $\mathbb{R}^n$.

<u>Rem</u> $P^n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dim $= n$, car l'app. ϕ_i est une paramétri locale.

<u>Rem</u>. $P^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \sqcup P^{n-1}(\mathbb{R})$
$$= \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}^0$$
tq $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ et $\sqcup$: la réunion disjointe

<u>Ruban de Möbius</u> (Bande de Möbius ou Boucle de Möbius) : Le ruban de Möbius peut être engendré par un segment pivotant dont le centre décrit un cercle fixe.

Un paramétrage correspondant est :

$$\begin{cases} x = \left(1 + \frac{t}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta \\ y = \left(1 + \frac{t}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta \\ z = \frac{t}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases} \qquad \underline{t.q} : \quad \begin{array}{l} -1 \leq t \leq 1 \\ 0 < \theta \leqslant 2\pi \end{array}$$

ou l'ensemble des solutions de l'équation suivante :

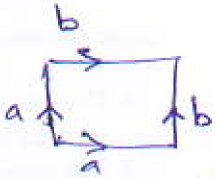
$$x^2y + yz^2 + y^3 - y - 2xz - 2x^2z - 2y^2z = 0$$

Le ruban de Möbius est une sous-variété de dim = 2.

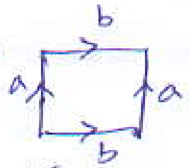
<u>Représentation planaire</u> (<u>l'identification dans le carré</u>) :

 $\cong$ 

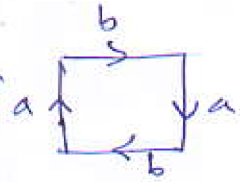
cylindre codée par aa^{-1}

 $\cong$ 

Sphère S^2 codée par $abb^{-1}a^{-1}$

Le Tore  $\cong$ 

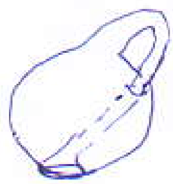
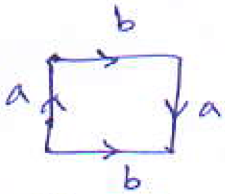
$\mathbb{T}^2$ codée par $aba^{-1}b^{-1}$

 $\cong$ 

$P^2(\mathbb{R})$ plan projectif codée par $abab$

 $\cong$ 

Le Ruban de Möbius codée par aa

 $\cong$ 

$\mathbb{K}^2$: La Bouteille de Klein codée par $abab^{-1}$

<u>La Bouteille de Klein</u> : est une sous-variété fermée sans bord et non orientable.
Il est impossible de représenter la bouteille de Klein dans $\mathbb{R}^3$, dans $\mathbb{R}^4$, il est par contre possible de la réaliser sans auto-intersection (on dit qu'elle possède un plongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^4$ mais pas dans $\mathbb{R}^3$).