Univ. OEB
Dpt. MI
Maths L3
Géom. Diff.

Série de TD N°3

Ex1 Les fns. suivantes sont-elles des immersions ? des submersions ?

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 ;\ (x,y) \longmapsto (x,y,0)$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 ;\ (x,y,z) \longmapsto (y,z)$
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} ;\ (x,y,z) \longmapsto xy + 2yz + 3xz$
4. $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 ;\ t \longmapsto (\sin(2t), \sin(3t))$
5. $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 ;\ (x,y) \longmapsto (e^x, \cos(y), \sin(y))$.

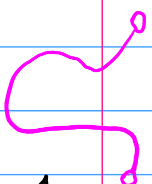
Ex2 Les ensembles suivants sont-ils des sous-variétés (si c'est le cas, on précisera la dimension).

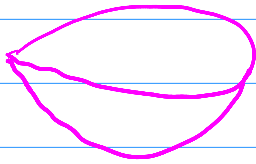
1. $M_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x - 2(x^2+y^2)\}$.
2. $M_2 = \{(t,t^2) \in \mathbb{R}^2 / t \in \mathbb{R}\}$
3. $M_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$.
4. $M_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 0\}$
5. $M_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y \geq 0\}$

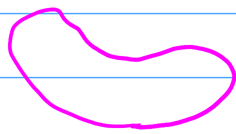
Ex3 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $M_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = \alpha\}$ est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

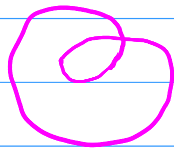
Ex4 Les dessins suivants représentent des parties de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

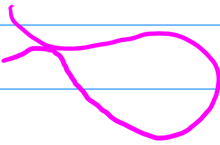
* Dir lesquelles sont des sous-variétés $\mathcal{C}^\infty$.

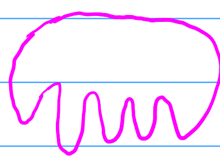

-1-

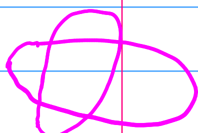

-2-

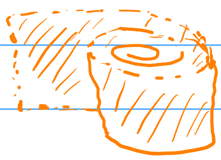

-3-

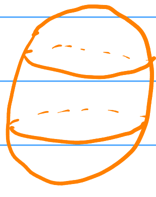

-4-

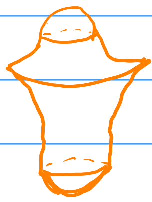

-5-

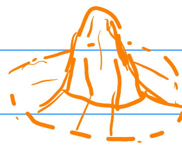

-6-


-7-


-8-


-9-


-10-


-11-


-12-


-13-

Ex5 Montrer que les lignes de niveau de la fn. suivante : $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2+(1-x^2-y^2)^2}$ sont des sous-variétés $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^3$. Préciser leurs dimensions.

Ex6 Une fn. strictement positive de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $G_f \subset \mathbb{R}^2$ sont graphe. $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}_+^* ;\ G_f = \{(x, f(x)) / x \in]a,b[\}$. Soit l'ensemble S_f défini comme $S_f = \{(x, f(x)\cos(\theta), f(x)\sin(\theta)) / x \in]a,b[,\ \theta \in \mathbb{R}\}$.

1. Trouver un ouvert $O \subset \mathbb{R}^3$ et une fn. $F : O \longrightarrow \mathbb{R}$ tels qu'on a : $S_f = F^{-1}(\{0\})$.
2. En déduire que S_f est une sous-variété diff.
3. Montrer que l'application $\psi :]a,b[\times]\alpha, \alpha+2\pi[\longrightarrow S_f$ définie par $\psi(x,\theta) = (x, f(x)\cos\theta, f(x)\sin\theta)$ est une immersion $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.