CH3 :Identification de l'optimum d'une fonction

Dans ce chapitre, on va comment identifier l'optimum d'une fonction à une seule variable, puis d'une fonction à plusieurs variables.

I) Identification de l'optimum d'une fonction à une variable

1.1 Définition :

Soit $f : I \rightarrow R$ une fonction définie sur un intervalle $I = [a , b]$, $a < b$

f atteint son minimum global (minG) en un point $x^*, x^* \in I$ si et seulement si $\forall x \in I\ f(x^*) \leq f(x)$

f possède un minimum local (minloc) en un point $x^*, x^* \in I$ si et seulement si $f(x^*) \leq f(x)$, pour tout x appartenant à un voisinage de x^* $V(x^*)$.

1.2 Définition :

Un point stationnaire est un point x^* qui vérifie $f'(x^*) = 0$

Un point d'inflexion est un point qui annule la 2ème dérivée ($f''(x^*) = 0$)

Théorème1 :

Soit f une fonction 2 fois continûment différentiable, sur l'intervalle [a , b], les conditions nécessaires, pour que x^* soit min loc de f sur [a , b] :

1) $f'(x^*) = 0$ condition 1er ordre (x^* point stationnaire)

2) $f''(x^*) \geq 0$ condition 2ème ordre.

Remarque 1:

X^* min loc $\Rightarrow f'(x^*) = 0$ et $f''(x^*) \geq 0$

Si ces conditions ne sont pas vérifiées alors (x^*, $f(x^*)$) n'est pas min loc de f, par contre si ces conditions sont vérifiées, rien ne garantit que (x^*, $f(x^*)$) min loc de f .

Théorème2 :

Soit f une fonction admettant une n^{ème} dérivée, sur [a, b], $n \in \mathbb{N}^*$, $x^* \in [a , b]$ tels que $f'(x^*) = 0$

Notons par n l'ordre de la 1ère dérivée qui ne s'annule pas en x^* :

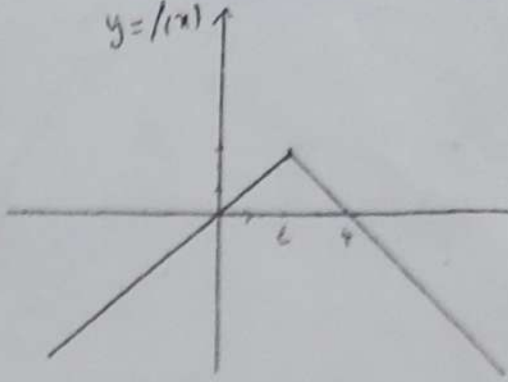
1) Si n est pair alors (x^*, $f(x^*)$) est un optimum local, si cette dérivée est positive alors (x^*, $f(x^*)$) min loc et si elle négative alors (x^*, $f(x^*)$) max loc de f

2) Si n est impair (x^*, $f(x^*)$) est un point d'inflexion.

Remarque2 :

Si f n'est pas différentiable en tous les points, la condition de stationnarité peut ne pas être vérifiée, par exemple :

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 2 \\ 4-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{4-x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{x-2} = -1$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

f n'est pas dérivable au point $x = 2$, cependant $(2, f(2))$ c'est le maximum.

Pour identifier l'optimum global, on applique l'algorithme suivant :
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$
<u>Pas1 :</u> Calculer $f'(x)$ et déterminer tous les points stationnaires ie $f'(x) = 0$
<u>Pas2 :</u> Choisir tous les points stationnaires $\in [a , b]$, soient $x_1, x_2, \dots x_N$ ces points stationnaires
<u>Pas3 :</u> Calculer $f(a), f(x_1), \quad f(x_N), f(b)$, ensuite la meilleure valeur de $f(x)$:
La plus grande valeur de $f(x)$ correspond à un max global $(x, f(x))$ et la plus petite correspond à un min global $(x, f(x))$.

On va voir un résultat très important qui permet de globaliser tout optimum local d'une fonction.
<u>Proposition :</u>
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction, si f est convexe alors tout minimum local est global.
<u>Preuve :</u>
Supposons $u \in [a, b] = I$ solution minimale locale de f, il existe alors un voisinage $V(u)$ tels que :
$\forall x \in V(u) \cap I, \ f(u) \leq f(x)$ (1)
Supposons que u n'est pas solution globale de f, il existe $x' \in I$, tels que $f(x') \leq f(u)$ (2)
Par convexité, il vient, pour $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \alpha < \varepsilon$ que $(1-\alpha) u + \alpha x' \in V(u) \cap I$ et on a :
$f((1-\alpha) u + \alpha x') \leq (1-\alpha) f(u) + \alpha f(x')$ et d'après (2), on a $f((1-\alpha) u + \alpha x') \leq (1-\alpha)f(u) + \alpha f(u) = f(u)$
$\Rightarrow f((1-\alpha) u + \alpha x') \leq f(u)$ d'où contradiction avec (1), donc $(u, f(u))$ minG de f.

II) Identification de l'optimum d'une fonction multidimensionnelle

2.1 Définition :

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonction bi-continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$, un point stationnaire est un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ tels que $\nabla f(x^*) = 0$ $\quad (\partial f(x)/\partial x_i = 0 \quad i = 1,\dots, n)$

2.2 Conditions nécessaires d'optimalité locale :

<u>Théorème3 :</u>
On suppose f est 2 fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$, les conditions nécessaires pour que x^* soit un min loc de f sont :
a) $\nabla f(x^*) = 0$
b) La matrice hessienne $\nabla^2 f(x^*)$ est une matrice semi-définie positive.

2.3 Conditions suffisantes d'optimalité locale :

<u>Théorème4 :</u>
f est 2 fois continûment différentiable, une condition suffisante pour que x^* soit un optimum local de f sur $\mathbb{R}^n$: a) $\nabla f(x^*) = 0$ stationnarité
b) La matrice hessienne $\nabla^2 f(x^*)$ est une matrice définie positive.

2.4 Cas de fonctions convexes : condition nécessaire et suffisante d'optimalité globale :

<u>Théorème5 :</u>
Si f est une fonction convexe continûment différentiable, une condition nécessaire et suffisante pour que x^* soit un optimum global de f, sur $\mathbb{R}^n$, est que $\nabla f(x^*) = 0$

Théorème de weirstrass :

Si f est une fonction réelle continue sur K, $K \subseteq IR^n$, compact (K fermé borné) alors le problème d'optimisation $\begin{cases} \text{Min} f(x) \\ x \in K \end{cases}$ a une solution optimale $x^* \in K$

Corollaire du théorème de weirstass :

Soit f une fonction continue sur IR^n, vérifiant de plus la condition $f(x) \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$, alors le problème $\begin{cases} \text{Min} f(x) \\ x \in IR^n \end{cases}$ a une solution optimale x^*

Remarques sur les notations Min et Max :

1) On suppose que f satisfait les conditions du théorème de weirstass ou de son corollaire :f fonction tels que $-\infty < \inf_{x \in X} \{f(x)\} < +\infty$ alors il existe $x^* \in X$ tels que $f(x^*) = \inf_{x \in X} \{f(x)\}$

On pose alors $\text{Min}_{x \in X} \{f(x)\} = f(x^*)$

2) Pour les fonctions f non bornées inférieurement sur X (ie $\nexists\, c \in IR : \forall\, x \in X,\ f(x) > c$), il est commode d'adopter la convention $\text{Min}_{x \in X} \{f(x)\} = -\infty$

On dit que f n'a pas de minimum de valeur finie, sur X (le problème $\text{Min}_{x \in X} \{f(x)\}$ est non borné)

3) Lorsque $X=\emptyset$, on pose par convention $\text{Min}_{x \in X} \{f(x)\} = +\infty$

4) On dit qu'un problème de programmation mathématique est convexe s'il consiste à minimiser une fonction convexe (maximiser une fonction concave), sur un domaine convexe.