CH1 : Ensembles et Fonctions convexes

Dans ce chapitre, on va étudier la notion de convexité ; la convexité joue un rôle très important, dans l'étude des problèmes de minimisation (unicité de la solution).

1) Ensemble convexe

1.1 Définition :

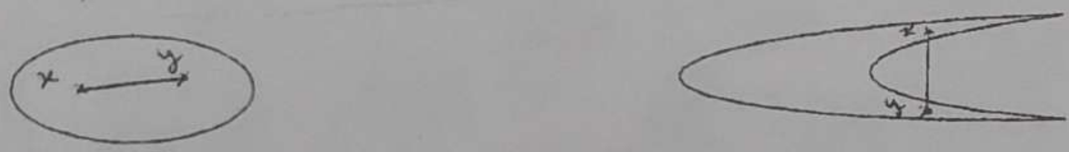
Un ensemble S non vide, $S \subseteq IR^n$, est dit convexe si et seulement si :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, x, y \in S \\ \forall\, \lambda \in [0, 1] \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in S$$

On remarque que si $\lambda \geq 0$
alors $\lambda + (1-\lambda) = 0$
Σ coef $= 1$ $\forall \lambda \geq 0$

Remarque 1 :

De la définition 1.1, on peut dire que S est un ensemble convexe si et seulement si, pour deux points quelconques x et y pris dans S , ~~dans~~ le segment [x , y] tout entier est contenu dans S, (voir FIG1).



Ensemble convexe

Ensemble non convexe

FIG1

1.2 Définition :

Etant donnés p points de IR^n , $x^1, x^2, \ldots, x^p$, on dit que $x \in IR^n$ est combinaison convexe de ces points, s'il existe des coefficients $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ ($\mu_i \geq 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, p$) tels que :

$$x = \mu_1 x^1 + \mu_2 x^2 + \ldots + \mu_p x^p = \sum_{i=1}^{p} \mu_i x^i \quad \text{et} \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 1$$

Proposition 1 :

Un ensemble $S \subseteq IR^n$ est convexe si et seulement si tout point combinaison convexe de points de S est dans S.

Preuve :

La démonstration découle de la définition 1.1.

1.3 Définition :

On appelle enveloppe convexe de S, notée conv(S), l'ensemble des points de IR^n qui sont combinaison convexe de points de S.

Remarque 2 :

Il découle de la définition 1.3 que S est convexe si et seulement $S \equiv \text{conv}(S)$.

Propriété :

L'intersection d'un nombre fini quelconque d'ensembles convexes est convexe

Preuve :

Soient $A_1, \ldots\ldots, A_n$ ensembles convexes tels que $A_i \subseteq IR^n$, $i = 1,\ldots,n$ avec $n \in IN$.
Soit $B = \bigcap_{i=1} A_i$ intersection finie d'ensembles convexes A_i, $i = 1,\ldots,n$
Montrons que B est un ensemble convexe :
B est un ensemble convexe ssi $\forall\, x, y \in B$ et $\forall\, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in B$
Par hypothèse, on a :
$x \in B \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow x \in A_i \;\; \forall i \;\; i = 1,\ldots,n$
$y \in B \Leftrightarrow y \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow y \in A_i \;\; \forall i \;\; i = 1,\ldots,n$
or A_i convexe $\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in A_i \; \forall i \;\; i = 1,\ldots,n \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i = B$ d'où B est un ensemble convexe.

II) Fonction convexe

2.1 Définition :

On dit qu'une fonction $f : S \subseteq IR^n \to IR$ définie, sur S ensemble convexe, est convexe, si elle vérifie :
$\forall\, x, y \in S$ et $\forall\, \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

Remarque 3 :
f est dite strictement convexe, si l'inégalité stricte est toujours vérifiée, ie
$\forall\, x, y \in S$ et $\forall\, \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$
Nous dirons que : f est concave si –f est convexe
f est affine (linéaire) si f est à la fois convexe et concave

$-f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq -(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))$

2.2 Définition :

L'épigraphe d'une fonction f noté épi(f) est l'ensemble :
$\text{épi}(f) = \{ (\mu, x) \,/\, f(x) \leq \mu,\, x \in IR^n,\, \mu \in IR \} \subseteq IR^* IR^n \approx IR^{n+1}$

Théorème:
Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est une fonction convexe.
Preuve : (voir TD)

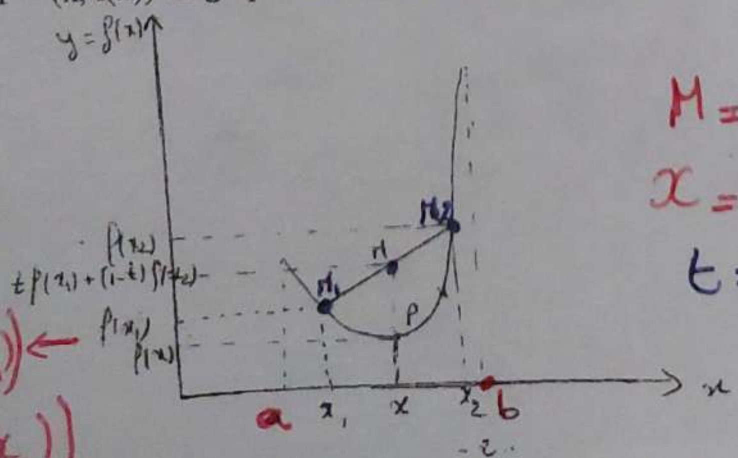
Etudions la convexité, pour le cas d'une fonction à une seule variable.
Soit $f : I \subseteq IR \to IR$ où I est un intervalle contenu dans IR.

2.3 Définition :

Une fonction f définie, dans un intervalle I, est dite convexe dans I si :
$\forall\, x_1, x_2 \in I$ et $\forall\, \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$

2.4 Interprétation géométrique :

Géométriquement, une fonction f définie dans un intervalle $I = [a, b]$, $a < b$, est dite convexe, si pour tout couple de points $M_1 = (x_1, f(x_1))$, $M_2 = (x_2, f(x_2))$ de son graphe, tout point $P = (x, f(x))$ du graphe d'abscisse $x \in [x_1, x_2]$ est au dessous du segment M_1M_2



$M = (x, t f(x_1) + (1-t) f(x_2))$
$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$
$t = \lambda$

$M_1(x_1, f(x_1)) \leftarrow$
$M_2(x_2, f(x_2))$

Un point du segment M_1M_2 peut être caractérisé par le rapport $t = (MM_2) / (M_1M_2)$, $0 \le t \le 1$
Les coordonnées de M étant $(x = tx_1+(1-t)x_2,\ tf(x_1)+(1-t)f(x_2))$, d'après le graphe, on a bien $f(x) = f(tx_1+(1-t)x_2) \le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$.
La définition 2.3 est équivalente à la propriété suivante :

<u>Propriété :</u>
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant des points quelconques de I et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des nombres pris dans $[0,1]$ tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$, on a $f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$

<u>Proposition 1 :</u>
Pour qu'une fonction f dérivable, sur un intervalle I, soit convexe, il faut et il suffit que la dérivée f' soit une fonction croissante.

<u>Corollaire 1 :</u>
Si une fonction f est dérivable jusqu'à l'ordre 2, sur un intervalle I, et a une dérivée seconde positive ou nulle, la fonction est convexe.
<u>Preuve :</u>
$f''(x) \ge 0\ \forall x,\ x \in I$, f' est croissante et d'après la proposition f est une fonction convexe.

<u>Remarque 4 :</u>
Dans les mêmes hypothèses que le corollaire 1, $f''(x) \le 0\ \forall x,\ x \in I$, la fonction est concave.

<u>Proposition 2 :</u>
Soit $f : I \subseteq IR \to IR$ une fonction continue, f est convexe sur I, si et seulement si :
$\forall x_1, x_2 \in I\ \ f((x_1+x_2)/2) \le 1/2\,(f(x_1) + f(x_2))$