Exercise 1. *Utilisez Cramer, l'inversion de matrice, la décomposition LU (à la fois Crout et Doolittle), l'élimination de Gauss et les méthodes de Gauss-Jordan pour les solutions des systèmes d'équations suivants*

$$a)\qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b)\qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Rép:

$$a), b) : [1 \quad 1 \quad 1]^T$$

Exercise 2. *Résolvez les systèmes d'équations linéaires suivants à l'aide de Cramer, l'inversion de matrice, la triangularisation (ou) la décomposition LU (à la fois Crout et Doolittle), l'élimination de Gauss et les méthodes de Gauss-Jordan*

$$a)\qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$b)\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$c)\qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Rép:

$$a) \quad [1 \quad -1 \quad 1]^T \quad b) \quad [0 \quad 1 \quad 2]^T \quad c) \quad [1 \quad -1 \quad 1]^T$$

Exercise 3. *Résolvez le système d'équations linéaires suivant par la méthode de Cholesky*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Rép:

$$\begin{bmatrix} \frac{59}{17} & \frac{24}{17} & \frac{40}{17} \end{bmatrix}^T$$

Exercise 4. *Résolvez le système d'équations linéaires suivant par la méthode d'élimination de Gauss avec pivotement partiel et complet en utilisant l'arithmétique d'arrondi à virgule flottante à trois chiffres significatifs.*

$$a)\qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 100 \\ 3 & 50 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 4 \\ 100 \\ 52.5 \end{pmatrix}$$

Comparez les résultats obtenus pour chaque cas avec la solution exacte (0,5, 1, 1).

Rép: ***1. Pivotement partiel :***

Matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 200 & 102 \\ 0 & -1.67 & -33.0 & -15.0 \\ 0 & 0 & -77.8 & -39.0 \end{bmatrix}$$

Solution: (0.567, 0.997, 1.00).

2. Pivotement complet :

Matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{bmatrix} 100 & -1 & 2 & 100 \\ 0 & 50.0 & 2.98 & 51.5 \\ 0 & 0 & 1.90 & 0.95 \end{bmatrix}$$

Solution: (0.500, 1.00, 1.00).

Exercise 5. *Résolvez le système d'équations linéaires donné par la méthode d'élimination de Gauss avec et sans pivotement partiel. Utilisez l'arithmétique d'arrondi à virgule flottante à cinq chiffres significatifs.*

$$a) \qquad \begin{pmatrix} 5.32 & 2.630 & -11.31 \\ 2.3 & 18.2 & 5.16 \\ -20.7 & 13.51 & -7.4 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 27.52 \\ 43.173 \\ -29.683 \end{pmatrix}$$

Comparez la solution avec la solution exacte jusqu'à cinq chiffres significatifs

$$[3,0141 \quad 2,1371 \quad -0,51852]^T.$$

Exercise 6. *Effectuez une arithmétique de hachage à quatre chiffres significatifs pour résoudre le système linéaire suivant en utilisant l'élimination de Gauss sans pivotement et avec des stratégies de pivotement partiel, mis à l'échelle et complet et comparez-le avec la solution exacte.*

$$a) \qquad \begin{pmatrix} -3.1 & 1.2 & 0.7 \\ 2.3 & 5.3 & 1.6 \\ -0.3 & 2.4 & 6.2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 5.673 \\ 7.203 \\ 4.123 \end{pmatrix}$$

Rép. *Exact solution up to four significant digits*

$$[-1.127 \quad 1.884 \quad -0.1189]^T$$

Exercise 7. *Résolvez le système d'équations linéaires suivant à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss. Utilisez sept chiffres significatifs pour arrondir l'arithmétique.*

$$a) \qquad \begin{pmatrix} 27.534 & -8.432 & 2.783 \\ 13.098 & -45.210 & 7.231 \\ -2.134 & 3.564 & -17.230 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 51.8932 \\ 43.7638 \\ -76.4368 \end{pmatrix}$$

Utilisez cette solution comme approximation initiale pour la méthode de Gauss-Seidel et résolvez le système pour obtenir une solution correcte jusqu'à six décimales

Rép. Solution exacte jusqu'à sept chiffres significatifs

$$[1.498103 \quad 0.150872 \quad 4.281924]^T$$