Université Larbi Ben M'Hidi - Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et la Vie

Travaux dirigés

Exercice : Résolvez le système d'équations linéaires suivant à l'aide de la règle de Cramer

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 15 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 15 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= -9 \end{aligned}$$

Exercice : Utilisez la méthode Cramer pour calculer la solution du système d'équations linéaires suivant

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Exercice : Résolvez le système d'équations linéaires suivant à l'aide de la méthode de Doolittle

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Exercice : Déterminer la factorisation Crout de la matrice tridiagonale symétrique

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et utiliser cette factorisation pour résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice : Résoudre les système suivant par *la méthode de Doolittle, puis la méthode de Crout*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 13/2 \\ -2 & -10/3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Exercice : Résoudre les système suivant par *la méthode de Choleski*:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 10 & 4 \\ -2 & 4 & 24 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 33 \\ 78 \end{pmatrix}.$$

Exercice : Trouvez l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

par la méthode de Choleski.

Exercice : Résoudre le système d'équations

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix},$$

en utilisant l'élimination de Gauss.

Exercice : Résoudre le système d'équations

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix},$$

en utilisant l'élimination de Gauss.

Exercice : Dans les problèmes 1 à 2, résolvez le système linéaire en utilisant l'élimination de Gauss de base avec pivotement partiel, si nécessaire.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 15.2 \\ 1 & 0 & 6 \\ -2 & 2.5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 16 & -12 \\ 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 10 & -5 \\ 4 & 8 & -24 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice : Résoudre les systèmes d'équations

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 20x_3 = 7 \\ 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{c} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -10 \\ 4x_1 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -5 \end{array}\right.$$

en utilisant l'élimination de Gauss avec pivotement partiel.

Exercice : Soit le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{array}\right.$$

a) Résoudre ce système par la méthode de Gauss.

b) Factoriser la matrice A du système en produit LU où L est une matrice triangulaire inférieure (avec des 1 sur la diagonale principale) et U triangulaire supérieure, puis résoudre ce système.

Exercice : Considérons le système linéaire 2×2

$$Ax = b, \qquad A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon > 0$ est une très petite constante.

a. Résoudre par élimination de Gauss sans pivotement partiel.

b. Résoudre par élimination de Gauss avec pivotement partiel. Comparez les résultats et discutez de leur validité.

Exercice : Trouvez l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

par la méthode Gauss-Jordan.

Exercice : Trouver l'inverse de la matrice de coefficients du système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix},$$

par la méthode Gauss-Jordan avec pivotement partiel et donc résoudre le système.