الحل بأسلوب الهيمنة: يمكن اختزال عدد الصفوف أو الأعمدة في مصفوفة المباراة لتبسيطها وتسهيل حلها، وعادة ما تتضخم مصفوفة المباراة إذا كان هناك استراتيجيات أو بدائل متاحة كثيرة للاعبين حيث تتشعب قرارات اللاعبين وتتنوع، ويتم الاختزال باعتماد آلية الهيمنة وكالاتي:

بالنسبة للصفوف (استراتيجيات اللاعب X) ، عندما تكون عناصر احد الصفوف أقل أو مساوية إلى عناصر صفوف أخرى فانه يمكن حذف أو اختزال هذا الصف (لان هذا الصف يقلل من أرباح اللاعب X وبالتالي يسقطه ولا يمكن ان يلعبه اطلاقا والإبقاء على الصفوف الاخرى (أي الصفوف المهيمنة).

بالنسبة للأعمدة (استراتيجيات اللاعب Y) ، عندما تكون عناصر احد الاعمدة أكبر أو مساوية إلى عناصر اعمدة أخرى فانه يمكن حذف أو اختزال هذا العمود(لان هذا العمود يقلل من خسائر اللاعب Y وبالتالي يسقطه ولا يمكن ان يلعبه اطلاقا والإبقاء على الاعمدة الاخرى (أي الاعمدة المهيمنة).

مثال: في أدناه مصفوفة العائد الخاصة بإحدى المباراة بين الشركتين X و Y

المطلوب: تحديد الفائز وقيمة المباراة والاستراتيجيات المثلى لكلا الشركتين.

الشركة Y / الشركة X		عدم القيام بحملة إعلانية Y_1	حملة إعلانية متوسطة Y_2	حملة إعلانية كبيرة Y_3
الشركة X	عدم القيام بحملة إعلانية X_1	50	40	28
	حملة إعلانية متوسطة X_2	70	50	45
	عدم القيام بحملة إعلانية X_3	75	47.5	50

الحل:

أولا نتأكد من وجود نقطة سرج بالطريقة التي سبق وان عرفناها وبما انه لا توجد نقطة سرج فإنه نستنتج أن المباراة ذات استراتيجيات مختلطة، ولكن المباراة فيها ثلاثة استراتيجيات متاحة لكل لاعب فإننا نختصرها باتباع أسلوب الهيمنة، حيث نلاحظ أن الصف الأول هو أصغر من الصفين الثاني والثالث أي انه يستبعد وان الصفين الأخرين يهيمنان عليه وكالاتي:

الشركة Y / الشركة X		عدم القيام بحملة إعلانية Y_1	حملة إعلانية متوسطة Y_2	حملة إعلانية كبيرة Y_3
	حملة إعلانية متوسطة X_2	70	50	45
	عدم القيام بحملة إعلانية X_3	75	47.5	50

كذلك نلاحظ ان العمود الأول (الاستراتيجية Y1) ليس في صالح الشركة Y وأنها تفضل تبني الاستراتيجية Y2 و Y3 والسبب هو ان الأرقام فيه اعلى من الأرقام في أي من العمودين الاخرين، لذا فانه سيتم استبعاد هذا العمود او ان العمودين الاخرين يهيمنان عليه، وعليه فان المصفوفة ستكون كمايلي:

الشركة Y / الشركة X		حملة إعلانية متوسطة Y_2	حملة إعلانية كبيرة Y_3
	حملة إعلانية متوسطة X_2	50	45
	عدم القيام بحملة إعلانية X_3	47.5	50

ويمكن حل المسألة بإحدى الطريقتين السابقتين الحسابية أو الجبرية

الحل بطريقة المباراة الفرعية (Method): تستخدم هذه الطريقة من نوع (Mx2) (2 x M) وذلك لعدم امكانية اختزالها إلى مباراة من نوع (2*2)، وبالتالي يصعب حلها بإحدى الطرق السابقة بالإضافة إلى عدم وجود نقطة توازن ففي هذه الحالة يتم اللجوء إلى المباراة الفرعية ومن ثم اختيار الافضل من بينها وعملية المفاضلة تكون للاعب الذي يكتلك أكثر من استراتيجيتين فلو اخذنا المثال التالي:

التمرين الحادي عشر: لتكن المصفوفة المبينة في الجدول التالي لإحدى المباريات بين لاعبين:

		اللاعب B				
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
اللاعب A	X_1	15	7	−8	6	−20
	X_2	10	−25	−12	11	24

المطلوب: حل المصفوفة التالية بطريقة المباراة الفرعية.

الحل

يتضح من المصفوفة اعلاه انه لا توجد نقطة توازن ولا يمكن حلها بإحدى الطرق السابقة بالتالي سيلجئ اللاعب B والذي يمتلك أكثر من استراتيجيتين إلى طريقة السيطرة، وذلك بأسقاط الاستراتيجيات التي تحقق للاعب (A) الكسب على الدوام وهي الاستراتيجية الأولى والرابعة وتصبح المصفوفة كما يلي:

		اللاعب B		
		Y_2	Y_3	Y_5
اللاعب A	X_1	7	−8	−20
	X_2	−25	−12	24

المباراة اعلاه لا يوجد نقطة توازن ولا يمكن اختزالها إلى عبارة من نوع (2*2)، وبالتالي لا يمكن حلها بالطرق السابقة، لذا سوف نلجأ إلى تقسيم المباراة إلى مباراة فرعية من نوع (2*2)، حيث يمكن تقسيمها إلى ثلاث مباراة فرعية وكما يلي:

3	
7	-8
-25	-12

2	
-8	-20
-12	24

1	
7	-20
-25	24

وبالتالي يتم حل كل تشكيلة من المباراة على خدة واختيار المباراة الفرعية التي تحقق للاعب B اعلى عوائد أي اعلى قيمة بالإشارة السالبة.

وإذا كانت على سبيل المثال كل القيمة الموجبة فانه سيختار المباراة التي تحقق له اقل خسارة ممكنة.

الحل باستخدام البرمجة الخطية في حل مشاكل المباراة: Linear Programming Application to Solve Game Problems

عندما تفشل جميع الطرق السابقة في التوصل الى الحل يتم اللجوء الى استخدام البرمجة الخطية (LP) لإيجاد قيمة المباراة وذلك للتشابه الكبير بين نموذج البرمجة الخطية Linear Programming Model ونموذج المباراة (Game Model) ذات المجموع الصفري. وهذا التشابه يمكن إجماله بالآتي: -

1- في نموذج المباراة (Game Model) هناك دالة هدف (Objective Function)، كما في البرمجة الخطية (LP) فأحد طرفي الصراع يحاول تعظيم مكاسبه بينما الطرف الآخر يحاول تقليل خسائره.

2- في نموذج المباراة (Game Model) هناك قيود ومحددات كما هو حاصل في البرمجة الخطية (LP) فعندما يختار أحد اللاعبين أي من استراتيجياته المختارة ستكون هناك قيمة يحصل عليها اللاعب تمثل الكسب أو الخسارة تبعاً لطبيعة المباراة.

3- كل القيم في نموذج المباراة إما موجبة أو مساوية للصفر كما هو الحال في البرمجة الخطية (LP) فإذا اختار أحد اللاعبين استراتيجية معينة فإن الوقت الذي سوف يقضيه اللاعب للعب استراتيجيته يساوي إلى الواحد صحيح في حين سيكون الوقت الذي يقضيه اللاعب للعب استراتيجيته الغير مختارة مساوي إلى الصفر.

4- كما هو الحال في البرمجة الخطية (LP) هناك نموذج أصلي Primal وثموذج ثنائي Dual في نموذج المباراة، فأحد طرفي اللاعبين يحاول تعظيم مكاسبه بينما الطرف الآخر يحاول تقليل خسائره. فلو أخذنا المثال السابق لإيجاد قيمة المباراة باستخدام البرمجة الخطية (LP).

مثال:

التمرين الثاني عشر: لتكن المصفوفة المبينة في الجدول التالي لإحدى المباريات بين لاعبين:

		اللاعب B		
		Q_1	Q_2	Q_3
اللاعب A	X_1	6	4	14
	X_2	10	10	6
	X_3	0	14	4

المطلوب: حل هذه المصفوفة بطريقة البرمجة الخطية.

الحل

عندما يلعب A استراتيجيته المختارة فإن اللاعب B سوف يسعى الى تقليل خسائره المتوقعة وبالتالي تقليل قيمة المباراة.

استراتيجيات اللاعب A المختارة	الربح المتوقع للاعب A
1	$6X_1+4X_2+14X_3 \leq V$
2	$10X_1+10X_2+6X_3 \leq V$
3	$0X_1+14X_2+4X_3 \leq V$

ولما كان هدف كلا اللاعبين هو تقسيم الوقت بين الاستراتيجيات الثلاثة بحيث يؤدي ذلك إلى تعظيم الكسب او تقليل الخسائر، حيث ان (X_3،X_2،X_1) تساوي نسبة الوقت الذي يقضيه اللاعب (A) للعب كل استراتيجياته لمختارة لتعظيم الأرباح ، واللاعب B لتقليل الخسائر، و يكون مجموع وقتها المستغرق هو الواحد الصحيح أي $X_1+X_2+X_3 =1$ وهي تمثل دالة الهدف اللاعب A والمعادلات في الجدول أعلاه تمثل قيود دالة الهدف

ومنه النموذج يكتب كما يلي:

$$Max(Z) = X_1+X_2+X_3 =1$$

$$\begin{cases} 6X_1 + 4X_2 + 14X_3 \leq V \\ 10X_1 + 10X_2 + 6X_3 \leq V \\ 0X_1 + 14X_2 + 4X_3 \leq V \end{cases}$$

بقسمة دالة الهدف على V

$$\frac{Max(Z)}{V} = \frac{X_1+X_2+X_3}{V} = \frac{1}{V}$$

$$\begin{cases} \frac{6X_1}{V}+\frac{4X_2}{V}+\frac{14X_3}{V}\le\frac{V}{V} \\ \frac{10X_1}{V}+\frac{10X_2}{V}+\frac{6X_3}{V}\le\frac{V}{V} \\ \frac{0X_1}{V}+\frac{14X_2}{V}+\frac{4X_3}{V}\le\frac{V}{V} \end{cases}$$

$$\frac{Max(Z)}{V}=\frac{X_1}{V}+\frac{X_2}{V}+\frac{X_3}{V}=\frac{1}{V}$$

$$\begin{cases} \frac{6X_1}{V}+\frac{4X_2}{V}+\frac{14X_3}{V}\le 1 \\ \frac{10X_1}{V}+\frac{10X_2}{V}+\frac{6X_3}{V}\le 1 \\ \frac{0X_1}{V}+\frac{14X_2}{V}+\frac{4X_3}{V}\le 1 \end{cases}$$

فافتراض ان $X^*=\frac{X}{V}$ بالتعويض نجد:

$$\frac{Max(Z)}{V}=X_1^*+X_2^*+X_3^*=\frac{1}{V}$$

$$\begin{cases} 6X_1^*+4X_2^*+14X_3^*\le 1 \\ 10X_1^*+10X_2^*+6X_3^*\le 1 \\ 10X_2^*+4X_3^*\le 1 \end{cases}$$

وهذا النموذج يمكن حله بطريقة السمبلاكس ونحصل على جدول الحل الأمثل من خلال الجدول الأخير التالي:

	X_1^*	X_2^*	X_3^*	S_1	S_2	S_3	BFS
Z	$\frac{2}{29}$	0	0	$\frac{1}{29}$	$\frac{5}{58}$	0	$\frac{7}{58}$
X_3^*	$\frac{5}{29}$	0	1	$\frac{5}{58}$	$-\frac{1}{29}$	0	$\frac{3}{58}$
X_2^*	$\frac{26}{29}$	1	0	$-\frac{3}{58}$	$\frac{7}{58}$	0	$\frac{2}{29}$
S_3	$-\frac{280}{29}$	0	0	$-\frac{5}{29}$	$-\frac{31}{29}$	-1	$\frac{3}{29}$

ومنه قيمة $Max(Z)=\frac{7}{58}$

وبما ان في المعادلة فرضنا ان

$Max(Z)=\frac{1}{V}=\frac{7}{58}$ ومنه قيمة $V=\frac{58}{7}\cong 8.3$

حل نموذج اللاعب (B) : أما اللاعب B فأنه يأخذ النموذج الثنائي أو المرافق وبالتالي سنحول النموذج الأصلي للنموذج المرافق وفق الشروط المتعرف عليها ويمكن اختصارها في:

1- خطوات تحول النموذج الأصلي الى النموذج المرافق

الثنائية: إن لكل نموذج أصلي (primal) لدوال الهدف له نموذج مقابل أو مرفق أو ثنائي (Dual)

ويصاغ النموذج الثاني من خلال النموذج الاصلي والذي في بعض الحالات يسهل عملية الحل، وهناك خمس طرق بسيطة لتحويل النموذج الأصلي إلى النموذج الثنائي:

- اذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي من نوع التعظيم، تصبح في النموذج الثنائي من نوع التقليل والعكس صحيح.
- قيم عمود الثوابت في قيود النموذج الأولي تصبح معاملات لمتغيرات دالة الهدف في النموذج المقابل.
- تصبح قيم معاملات المتغيرات في معادلة دالة الهدف في النموذج الأولي قيما للكميات أو الطرف الأيمن للقيود في النموذج المقابل.
- يتم استبدال مواضع معاملات القيود في النموذج الأولي لتصبح معاملات للقيود في النموذج الثنائي.
- يتم تغيير إشارات المتباينات عكس ما هي عليه في النموذج الأولي، فاذا كانت إشارة القيد في النموذج الأولي من نوع أصغر أو يساوي يتم استبدالها بإشارة من نوع أكبر أو يساوي في النموذج المقابل
- إضافة إشارة عدم السلبية في المتغيرات الجديدة.
- عند تحويل النموذج الأولي إلى الثنائي يجب مراعاة ما يلي:
- يجب أن تكون جميع علامات القيود اكبر من أو يساوي $\geq$ عندما تكون دالة الهدف تعظيم Max
- يجب أن تكون جميع علامات القيود اقل من أو يساوي $\leq$عندما تكون دالة الهدف تدنية Min
- اذا كانت قيود فيها = فان القيد يمكن تجزئته إلى قسمين بمترجحتين يوجد فيها $\leq$ و $\geq$.
- إذا كانت القيود مختلفة يجب ضربها في 1- لتغير اتجاه المتراجحة حسب الهدف سواء كان تعظيم أو تدنية.

النموذج الأصلي

$$Max(Z) = X_1^* + X_2^* + X_3^*$$

$$\begin{cases} 6X_1^* + 4X_2^* + 14X_3^* \leq 1 \\ 10X_1^* + 10X_2^* + 6X_3^* \leq 1 \\ 14X_2^* + 4X_3^* \leq 1 \end{cases}$$

التحويل الى النموذج النموذج المرافق

$Min(W) = Y_1^* + Y_2^* + Y_3^*$

$$\begin{cases} 6y_1^* + 10y_2^* \geq 1 \\ 4y_1^* + 10y_2^* + 10y_3^* \geq 1 \\ 14y_1^* + 6y_2^* + 4y_3^* \geq 1 \end{cases}$$

ومنه جدول الحل الأخير للنموذج المرافق يمكن نقدمه في الجدول التالي:

	Y_1^*	Y_2^*	Y_3^*	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	BFS
Z	0	0	$-\frac{3}{29}$	0	$-\frac{2}{29}$	$-\frac{3}{58}$	-M	-M	-M	$\frac{7}{58}$
S_3	0	0	$\frac{31}{29}$	0	$-\frac{7}{58}$	$\frac{1}{29}$	0	$\frac{1}{29}$	$-\frac{1}{29}$	$\frac{5}{58}$
Y_3^*	0	1	$\frac{280}{29}$	1	$-\frac{26}{29}$	$-\frac{5}{29}$	-1	$\frac{5}{58}$	$\frac{5}{29}$	$\frac{2}{29}$
Y_2^*	1	0	$\frac{5}{29}$	0	$\frac{3}{58}$	$\frac{3}{58}$	0	$\frac{3}{58}$	$\frac{5}{58}$	$\frac{1}{29}$

ومنه قيمة $Min(W) = \frac{7}{58}$

وبما ان في المعادلة فرضنا ان $Min(W) = \frac{7}{58} = \frac{1}{V}$ ومنه قيمة $V = \frac{58}{7} \cong 8.3$

ومنه ربح اللاعب A الممثل للنموذج (الاصلي) يعتبر خسارة للنموذج المرافق B