Université de L’Arbi Ben M’Hidi Oum El Bouaghi

Les cours de physique

Electrostatique-électrocinétique

Table des matières

NOMENCLATURE

Principales notations

C	: capacité propre du conducteur
d	: distance
dc	: circulation élémentaire du champ électrique
$\vec{dl}$	: élément de longueur
e	: force électromotrice du générateur
é	: force électromotrice du récepteur
$\vec{E}$	: champ électrique
F	: force électrostatique
h	: hauteur
i	: intensité de courant électrique
I	: courant électrique
$\vec{j}$	: densité de courant
K	: constante de Coulomb
L	: longueur
$\vec{n}$	: vecteur unitaire normal à la surface dS
$\vec{p}$	: dipôle électrique
P	:puissance électrique
q	:charge ponctuelle
R	: résistance du conducteur
r	: coordonnée radiale
S	: surface
t	: temps
U	: tension électrique
$\vec{u}$	: vecteur unitaire porté par la droite (OM)
U_E	: énergie potentielle électrique
V	: potentiel électrique
W	: travail
W_{exp}	: énergie potentielle électrostatique
Z	: coordonnée axiale

Lettres grecques

θ	: coordonnée azimutale
∇	: opérateur différentiel agissant sur les scalaires, vecteurs et tenseurs
Δ	: opérateur de Laplace
ε_0	: permittivité électrique du vide
$d\Omega$	: élément de surface
σ	: distribution superficielle
Φ	: flux du champ électrique
Ω	: l'angle solide
$\vec{\Gamma}$	: moment d'un dipôle électrique
ρ	distribution volumique

τ	:constante de temps
λ	: distribution linéique
γ	: conductivité du milieu

Indices

ext	: extérieur
G	: gauss
L	: latérale
int	: intérieur

CHAPITRE 1

INTERACTION ELECTROSTATIQUE -éLECTRIQUE

1.1. PHéNOMÈNES éLECTROSTATIQUES : NOTION DE CHARGE éLECTRIQUE

L'atome est la plus petite particule d'un corps qui puisse exister. Un corps est constitué d'un assemblage d'atomes. Une petite partie de la matière contient des milliards d'atomes. L'atome est constitué d'un noyau autour duquel gravitent les électrons. Le noyau est constitué de deux particules appelées nucléons. Ces particules sont les protons et les neutrons. Le nombre de protons dans un atome est égal au nombre d'électrons.

Les corps dont la couche périphérique ne comportant qu'un, deux, trois électrons libres auront tendance à perdre ces électrons et devenir des ions positifs. Les corps ayant ce type de propriété sont des bons conducteurs du courant électrique par exemple : le cuivre, l'aluminium et le fer.

Les corps dont la couche périphérique comportant 5, 6 ou 7 électrons auront tendance à gagner des électrons et devenir des ions négatifs. Les corps ayant ces propriétés sont des mauvais conducteurs du courant électrique. Ils s'appellent isolants.

L'électrisation est le phénomène d'apparition d'une charge électrique ou d'apparition des quantités d'électricité sur un corps. Il existe trois types d'électrisation :

- L'électrisation par frottement
- L'électrisation par contact
- L'électrisation par influence.

Exemple 1 :

Prenons une boule métallique et suspendons-la par un fil. Ensuite, on approche une tige de verre après l'avoir frottée préalablement. On remarque que la tige attire la boule.

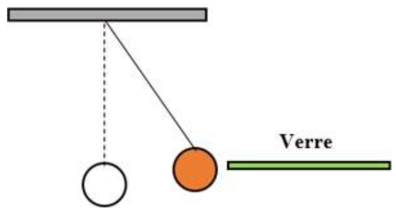


Figure 1.1

Exemple 2 :

On approche une tige en verre frottée avec un tissu en laine de petits morceaux de papier (figure 1.2). Ces derniers sont alors attirés par la tige.

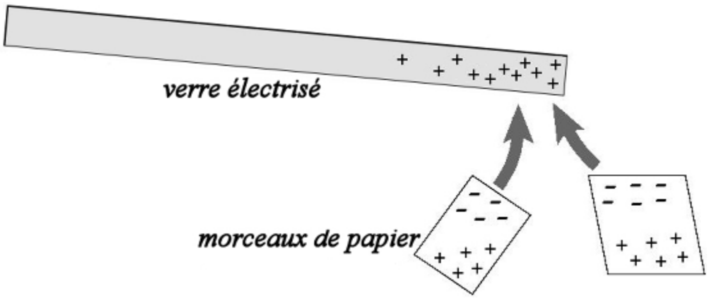


Figure 1.2

Les frottements de la tige lui ont fait perdre des électrons. Le verre se trouve alors chargé positivement. En approchant la tige des morceaux de papier de charge neutre, des charges négatives se déplacent dans le papier en face des charges positives de la tige de verre. Cette attraction entre les deux objets de charges opposées est due à la présence des forces électrostatiques.

1.2. LOI DE COULOMB

Les propriétés de la force électrostatique exercée par une charge ponctuelle q_1 sur une autre charge ponctuelle q_2 ont été déterminés par Charles Auguste de Coulomb (1736-1806) comme suit :

1. La force électrostatique est dirigée selon la droite qui joint les deux charges q_1 et q_2.
2. Elle est proportionnelle au produit des charges : soit elle est attractive si les charges sont de signe opposé soit elle est répulsive si les charges sont de même signe.
3. Elle est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance entre les deux charges.

La loi de la force de Coulomb traduisant les propriétés ci-dessus est donnée par l'expression suivante :

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12} \qquad (1.1)$$

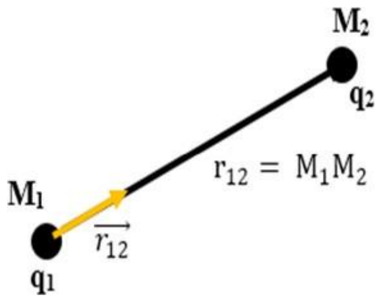


Figure 1.3

Avec :

$$\vec{r}_{1\to 2} = \overrightarrow{M_1M_2}, \quad r_{12} = \left\|\vec{r}_{12}\right\|, \quad \vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|} = \frac{\vec{r}_{12}}{\left\|\vec{r}_{12}\right\|}, \; K \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\ 10^9 \text{ SI} \quad \left(N.m^2.C^{-2}\right)$$

(1.2)

La constante ε_0 joue un rôle particulier. Elle est appelée la permittivité électrique du vide (unités : Farad/m et en unités de base : $kg^{-1}.m^{-3}.s^4.A^2$). L'expression (1.1) n'est valable que pour des charges immobiles se trouvant dans le vide. Elle est considérée comme étant la base même de toute l'électrostatique. La force électrostatique possède exactement les mêmes propriétés vectorielles que la force de la gravitation et obéit au principe d'action et de réaction de la mécanique classique.

1.3. PRINCIPE DE SUPERPOSITION

D'après la propriété de l'additivité des forces électrostatiques auxquelles est soumise une charge q en présence de deux charges q_1 et q_2. La résultante des forces est calculée comme suit :

$$\overrightarrow{F_{tot}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{k\frac{q_1q}{r_1^2}\vec{u}_1 + k\frac{q_1q}{r_2^2}\vec{u}_2} \qquad (1.3)$$

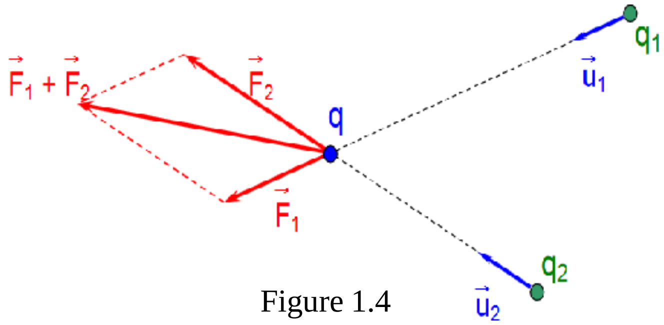


Figure 1.4

1.4. EXERCICE

Trois charges q_1, q_2 et q_3 sont disposées selon la figure1.5. Calculer la force résultante appliquée sur la charge q_3.

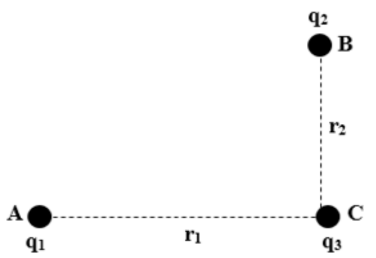


Figure 1.5

On donne :

$q_1 = +1{,}5.10^{-1}\,C,\ \ q_2 = -0{,}5.10^{-3}\,C,\ \ q_3 = +0{,}2.10^{-3}\,C,\ \ AC = 1{,}2m,\ \ BC = 0{,}5\,m$

1.5. CORRIGé

q_1 et q_3 ont le même signe, dans ce cas $\overrightarrow{F_1}$ est répulsive.

q_2 et q_3 ont un signe opposé, dans ce cas $\overrightarrow{F_2}$ est attractive.

$$\vec{F}_1 = \frac{kq_1 q_3}{r_1^2} u_{r1} \Rightarrow F_1 = 1{,}8.10^3\ N$$

$$\vec{F}_2 = \frac{kq_2 q_3}{r_2^2} \vec{u}_{r2} \Rightarrow F_2 = 3{,}6.10^3\ N$$

Par conséquent, $\left|\overrightarrow{F}\right|$ vaut :

$$\left|\overrightarrow{F}\right| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 4{,}06.\,10^3\,N$$

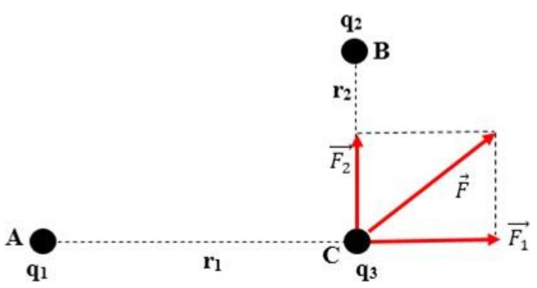


Figure 1.6

CHAPITRE 2

CHAMP ET POTENTIEL éLECTRIQUES

2.1. CHAMP éLECTRIQUE D'UNE CHARGE PONCTUELLE

A) DéFINITION

La force qui s'exerce sur une charge q au point M de la part d'une charge Q située au point O est donnée par :

$$\vec{F}_{Q\to q} = q\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)\vec{u} \qquad (2.1)$$

Où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire porté par la droite (OM).

On remarque que l'expression $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ ne dépend que de la charge Q et des coordonnées du point M.

Cette expression définit une grandeur appelée champ électrique et qui est produit par la charge Q placée au point O en tout point M de l'espace, son expression vectorielle est :

$$\vec{E}_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u} \qquad (2.2)$$

B) LIGNES DE CHAMP

Le tracé des lignes de champ permet d'établir la topographie du champ électrique dans une région de l'espace. La ligne de champ donne l'orientation du champ électrique résultant en un point de l'espace. En tout point, le champ électrique résultant est tangent à la ligne de champ passant par ce point. Le tracé des lignes de champ obéit aux propriétés suivantes :

Propriétés :

-Les lignes de champ sont dans le plan des charges.

-Les lignes de champ sont produites par les charges positives et convergentes vers les charges négatives.

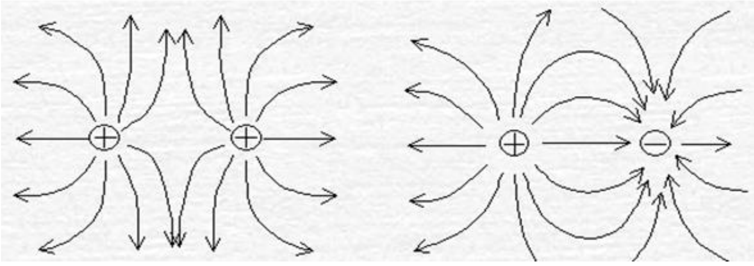


Figure 2.1: Exemples de lignes de champ : Deux charges de même signe (gauche) et deux charges de signes opposées (droite)

-Une ligne de champ électrostatique n'est pas fermée. Elle part à l'infini ou part d'une charge q termine sur la charge de signe opposé.

– Le nombre de lignes de champ partant ou arrivant sur une charge est proportionnel à la grandeur de la charge

C) TUBE DE CHAMP

Un tube de champ est la surface imaginaire engendrée par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé .

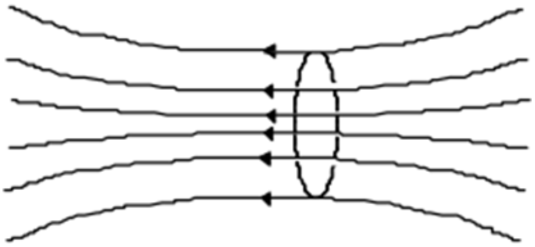


Figure 2.2: Exemples de tube de champ : ensemble de lignes de champ reposant sur un contour ferme

2.2. POTENTIEL éLECTRIQUE CRéE PAR UNE CHARGE PONCTUELLE

2.2.1. DéFINITION DU POTENTIEL éLECTRIQUE

La circulation élémentaire du champ $\vec{E}_M$ crée par une charge Q sur un élément de longueur $\vec{dl}$ au point M d'une courbe quelconque (AB) (figure 2.3) est donné par la relation suivante :

$$dc = \vec{E}(M).\ \vec{dl} \tag{2.3}$$

Avec $\vec{E}(M)$ est le champ électrique crée par la charge Q au point O. On note $\vec{ur}$ le vecteur unitaire le long de la droite OM et r = OM et $\vec{dl}$ est le déplacement élémentaire.

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u_r} \qquad (2.4)$$

On décompose $\vec{dl}$ selon $\vec{ur}$ et selon une autre direction qui lui est perpendiculaire telle que :

$$\vec{dl} = dr\,\vec{u_r} + \vec{dl_\perp} \qquad (2.5)$$

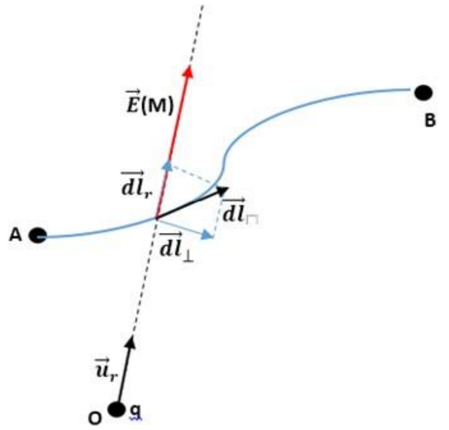


Figure 2.3: Décomposition du vecteur déplacement élémentaire $\vec{dl}$ selon $\vec{u_r}$ et selon une direction perpendiculaire

En tenant compte du fait que les vecteurs $\vec{dl_\perp}$ et $\vec{ur}$ sont perpendiculaires, ce qui donne $\vec{E}(M)$ $\vec{dl}.\vec{u_r} = 0$, et $\vec{ur}$ est un vecteur unitaire, par conséquent $\vec{u_r}.\vec{u_r} = 1$, la circulation élémentaire devient alors :

$$dc = \vec{E}(M).\vec{dl} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u_r}.\left(dr\,\vec{u_r} \times \vec{dl_\perp}\right) = \frac{Q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (2.6)$$

L'intégrale de la relation (2.6) sur toute la courbe (AB) donne la circulation totale. En prenant en considération que :

$$\frac{dr}{r^2} = d\left(-\frac{1}{r}\right) \qquad (2.7)$$

Ce qui donne :

$$dc = d\left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) \qquad (2.8)$$

Dans ce cas, la circulation du champ électrostatique entre A et B sur la courbe (AB) est donnée par :

$$c = \int_A^B \vec{E}(M).\vec{dl} = \int_A^B d\left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = \left[-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_A^B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} \qquad (2.9)$$

Cette circulation ne dépend pas du chemin suivi puisqu'elle ne dépend que des points de départ A et d'arrivée B.

On définit alors le potentiel électrostatique comme étant la quantité V (M) dont la variation est l'opposé de la circulation du champ :

$$c = \int_A^B \vec{E}(M).\vec{dl} = V(A) - V(B) = -\Delta V \qquad (2.10)$$

avec:

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{cte} \qquad (2.11)$$

En pratique, on utilise toujours des différences de potentiel au lieu du potentiel car la constante est choisie arbitrairement. Souvent elle est prise nulle à l'infini V (∞) =0.

Par conséquent, le potentiel électrique créé par une charge ponctuelle Q au point M est donné par :

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad V(\infty) = 0 \qquad (2.12)$$

2.2.2. RELATION ENTRE LE CHAMP ET LE POTENTIEL éLECTRIQUES

En combinant les deux relations (2.5) et (2.12), on trouve la relation entre le champ et le potentiel électrostatique. Cette relation se présente sous plusieurs formes :

1. Relation différentielle :

$$dV(M) = -\vec{E}(M).\vec{dl} \qquad (2.13)$$

2. Relation locale :

$$dV(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(M).\vec{dl} \qquad (2.14)$$

D'où on déduit :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(M). \qquad (2.15)$$

D'après la relation (2.15), on conclut que le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ dérive du potentiel V. Si on se place à une seule dimension suivante (OX), l'équation (2.15) devient :

$$\vec{E}(M) = -\frac{dV(M)}{dx}\overrightarrow{u_x} \qquad (2.16)$$

3. Relation intégrale : la relation (2.16) est une relation importante dans les calculs champ-potentiel.

2.2.3. SURFACES éQUIPOTENTIELLES

Une surface équipotentielle est l'ensemble des points M se trouvant au même potentiel V :

$$V(M) = \text{cte} \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow \vec{E}.\vec{dl} = 0 \Rightarrow \vec{E}. \perp \vec{dl} \qquad (2.17)$$

Les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées sur la charge. Comme le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ dérive du potentiel sous la forme d'un gradient, $\vec{E}(M)$ est toujours perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.

2.3. GéNéRALISATION ET PRINCIPE DE SUPERPOSITION

2.3.1. ENSEMBLE DE CHARGES PONCTUELLES : CHAMP éLECTRIQUE

Soit un nombre de N charges ponctuelles q_i, i = 1 ….N placées en des points A_i, i = 1..N. Soit une charge q placée en un point M. Chaque charge q_i crée au point M un champ électrique $\vec{E}(M)$, la force exercée sur q s´écrit :

$$\vec{F}(M) = \sum_{i=1}^{N}\left[Q\ \overrightarrow{E_i}(M)\right] = q\sum_{i=1}^{N}\left[\overrightarrow{E_i}(M)\right] \qquad (2.18)$$

D'autre part on a :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N}\left[\overrightarrow{E_i}(M)\right] \qquad (2.19)$$

Par conséquent, la force peut être exprimée comme suit :

$$\vec{F}(M) = Q\,\vec{E}(M) \qquad (2.20)$$

On conclut que la charge Q subit un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ somme vectorielle des champs $\vec{E_i}(M)$ génères par chacune des charges individuelles.

Théorème de superposition du champ électrique :

Le champ électrostatique total en un point M est la somme vectorielle des champs élémentaires crées par chacune des charges élémentaires présentes.

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{E_i}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u_i} \qquad (2.21)$$

avec :

$\vec{r_i} = \overrightarrow{AM_i}$ et $\vec{u_i}$ vecteur unitaire dirigé selon $\overrightarrow{AM_i}$

2.3.2. ENSEMBLE DE CHARGES PONCTUELLES : POTENTIEL éLECTROSTATIQUE

A partir de la relation :

$$dV = -\vec{E}(M).\vec{dl} \tag{2.22}$$

En prenant en considération le théorème de superposition, dans ce cas on a :

$$dV = -\vec{E}(M).\vec{dl} = -\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{E_i}(M)\right].\vec{dl} = \sum_{i=1}^{N}\left[-\vec{E_i}(M).\vec{dl}\right] = \sum_{i=1}^{N} dV_i \tag{2.23}$$

Sachant que la somme d'un ensemble de différentielles étant la différentielle de la somme :

$$dV = \sum_{i=1}^{N} dV_i = d\sum_{i=1}^{N} V_i \tag{2.24}$$

On obtient alors :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i} \tag{2.25}$$

La relation (2.25) est une somme algébrique où les signes des charges doivent être pris en considération.

2.4. ENERGIE éLECTROSTATIQUE

2.4.1. DéFINITION

L'énergie électrostatique W d'un système de charges électriques, supposées initialement éloignées les unes des autres correspond au travail qu'il faut fournir pour amener ces charges à leurs positions finales.

2.4.2. CAS D'UNE CHARGE PONCTUELLE PLACéE DANS UN CHAMP ELECTRIQUE

On considère un champ électrique $\vec{E}(M)$ et son potentiel associé V définis en tout point M de l'espace. L'énergie potentielle d'une charge q située en un point P se calcule comme suit :

L'énergie potentielle électrostatique est définie à une constante près comme c'est le cas de l'énergie potentielle de gravitation. On choisit l'énergie potentielle nulle à l'infini, où les charges électriques sont inexistantes. C'est donc de l'infini que l'on va amener la charge q.

On a $V_\infty = 0$ et $E_{P\infty} = W_\infty = 0$

A tout instant, la charge électrique est soumise à une force électrostatique donnée par :

$$\vec{F}(M) = q\,\vec{E}(M) \tag{2.26}$$

Le déplacement de la charge q nécessite une force $\vec{F}_{exp}$ de telle sorte qu'elle compense la force électrostatique. Dans ce cas, le déplacement se fait à une vitesse constante. En appliquant le principe d'inertie sur le système composé de la charge q :

$$\vec{F}(M) + \vec{F}_{exp} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{exp} = -q\vec{E}(M) \tag{2.27}$$

Le travail nécessaire pour effectuer le déplacement de la charge q est la somme des travaux élémentaires de la force $\vec{F}_{exp}$ le long du chemin qui mène la charge de l'infini à P. Le travail élémentaire de la force $\vec{F}_{exp}$ est :

$$dW_{exp} = \vec{F}_{exp}.\vec{dl} \tag{2.28}$$

$\vec{dl}$ étant le déplacement élémentaire de la charge q, le travail total s'écrit alors :

$$W_{exp} = \int_{\infty}^{P} \vec{F}_{exp}.\vec{dl} = \int_{\infty}^{P} -q\vec{E}(M).\vec{dl} = -q\int_{\infty}^{P} \vec{E}(M).\vec{dl} \tag{2.29}$$

A partir de 2.23 :

$$dV = -\vec{E}(M).\vec{dl}$$

D'où :

$$W_{exp} = +q\int_{\infty}^{P} dV = q[V(l) - V(\infty)] \tag{2.30}$$

L'énergie potentielle électrostatique d'une charge q située en un point P dans un champ électrostatique dont le potentiel V est défini comme suit :

$$W_{exp} = q\ V(P) \tag{2.31}$$

2.4.3. CAS DE PLUSIEURS DISTRIBUTIONS PONCTUELLES

Dans ce cas, chacune des charges est soumise à l'action du champ électrostatique créé par les autres charges. Initialement toutes les charges étaient éloignées les unes des autres et se trouvent toutes à l'infini, on procède comme suit :

On amène la charge q_1 de l'infini à A_1 : $W_1 = 0$ car $E=0$.

On amène la charge q_2 de l'infini à A_2 : En A_2 le potentiel V_2 créé par la charge q_1 est :

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}} \tag{2.32}$$

L'énergie potentielle de la charge q_1 est donc :

$$q_2\ V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_1} \tag{2.33}$$

La charge q_1 est située au point A_1, q_2 au point A_2, on amène q_3 de l'infini à A_3 où le potentiel est donné par :

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{23}} \tag{2.34}$$

L'énergie de la charge q_3 est alors :

$$q_3 V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{r_{23}} \tag{2.35}$$

Pour toutes les charges, l'énergie totale est donc :

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}\sum_{j} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i\, q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i} q_i\, V_i \qquad (2.36)$$

Le terme 1/2 provient du fait que dans l'interaction entre les charges q_i et les charges q_j est comptée deux fois.

2.4.4. ENERGIE D'UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES

On se ramène à un ensemble de charges ponctuelles en divisant la charge totale en petits éléments de charges élémentaires dq, le calcul du travail s'effectue selon la nature de la distribution de charges comme suit :

Distribution volumique :

$$W = \frac{1}{2}\iiint \rho V d\tau \qquad (2.37)$$

avec ρ est la distribution volumique

Distribution surfacique :

$$W = \frac{1}{2}\iint_{s} \sigma V dS \qquad (2.38)$$

avec σ est la distribution superficielle

Distribution linéique :

$$W = \frac{1}{2}\int_{C} \lambda . V . dl \qquad (2.39)$$

avec λ est la distribution linéique

2.5. LE DIPôLE éLECTROSTATIQUE

2.5.1. POTENTIEL éLECTROSTATIQUE CRéé PAR DEUX CHARGES éLECTRIQUES

Un dipôle est un système électrique constitué par deux charges électriques ponctuelles de charges égales et de signes opposés, +q et –q situées l'une de l'autre à une distance d (Figure 2.4).

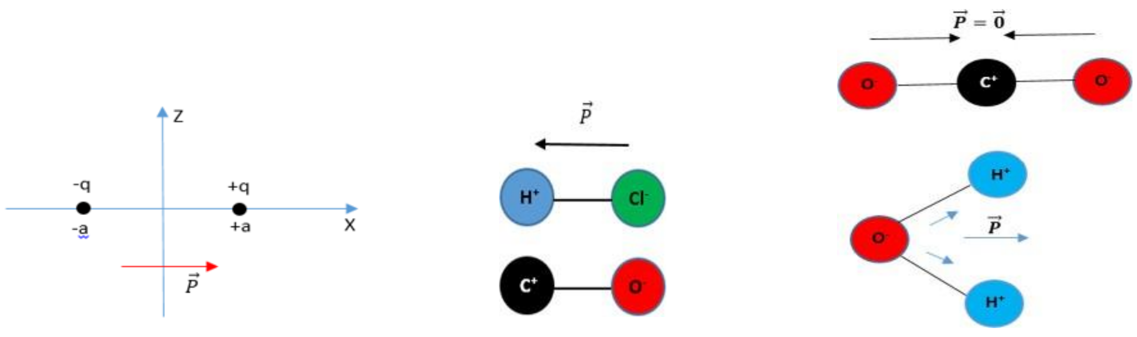


Figure 2.4: Exemples de dipôles électriques.

Les molécules de HCL, CO, H_2O, CO_2

Pour connaître l'effet électrostatique crée par ces deux charges autour d'elles nécessite le calcul du champ électrostatique. Cela se fait soit par l'application du principe de superposition en calculant la somme vectorielle des deux champs, soit par le calcul du potentiel.

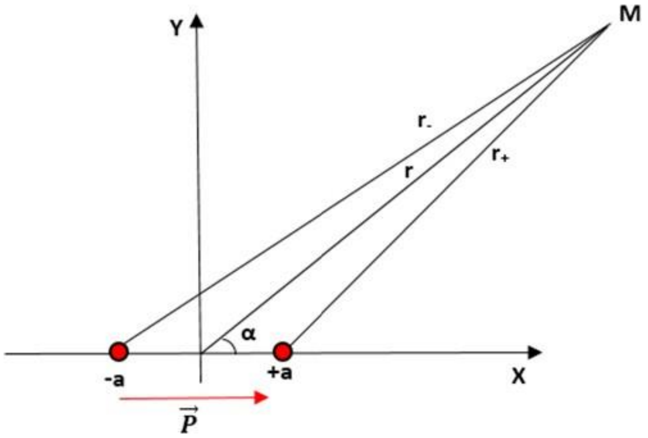


Figure 2.5

D'après ce qui précède, le potentiel créé en un point M repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) est simplement :

$$V(M) = V_{+q}(M) + V_{-q}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \tag{2.40}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ \, r_-}\right) \tag{2.41}$$

Où l'on a choisi arbitrairement le potentiel nul à l'infini V=0. Lorsqu'on ne s'intéresse qu'à l'action électrostatique à grande distance, c'est à dire à des distances telles que $r \gg a$, on effectue un développement limité de V. Au premier ordre en a/r, on obtient alors :

$$r_+ = \left(\vec{r}_+ . \vec{r}_+\right)^{1/2} \approx r\left(1 + 2\frac{a}{r^2}\vec{r}.\vec{i}\right)^{1/2} \approx r\left(1 + 2\frac{a}{r^2}\vec{r}.\vec{i}\right)^{1/2} \approx r + a\cos\alpha \tag{2.42}$$

$$r_- = \left(\vec{r}_- . \vec{r}_-\right)^{1/2} \approx r\left(1 - 2\frac{a}{r^2}\vec{r}.\vec{i}\right)^{1/2} \approx r\left(1 - 2\frac{a}{r^2}\vec{r}.\vec{i}\right)^{1/2} \approx r - a\cos\alpha \tag{2.43}$$

D'où : $r_- - r_+ = 2a\cos\theta$ et $r_- \times r_+ = r^2$.

Par conséquent, le potentiel créé à grande distance par un dipôle électrique est donné par la relation suivante :

$$\vec{p} = qd\,\vec{i} = 2aq\,\vec{i}$$

$$V(M) = \frac{2aq\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}.\overrightarrow{u_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2.44}$$

2.5.2. CHAMP CRéé PAR LE DIPôLE

Pour calculer le champ électrostatique, il suffit d'utiliser l'expression $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$ en coordonnées cylindriques. On obtient alors :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_r = \dfrac{-\partial V}{\partial r} = \dfrac{2p\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ E_\theta = \dfrac{-\partial V}{r\partial\alpha} = \dfrac{p\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ E_z = \dfrac{-\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{2.45}$$

Remarque : le dipôle possède une symétrie de révolution autour de l'axe qui le porte. Par conséquent, le potentiel ainsi que le champ électrique possèdent donc également cette symétrie.

2.5.3. ENERGIE DU DIPôLE PLACé DANS UN CHAMP ELECTRIQUE

Energie du dipôle placé dans un champ électrique est l'énergie nécessaire pour amener les charges + q et – q de l'infini à leurs positions respectives en B et A.

On a :

$$W = q\left(V_{final} - V_{initial}\right) \tag{2.46}$$

Pour $-q$ on a : $T_{\infty \to A} = -q\left(V_A - 0\right) = -q\,V_A$

Pour $+q$ on a : $T_{\infty \to B} = +q\left(V_B - 0\right) = -q\,V_B$

Donc : $W = q\left(V_B - V_A\right) = q\left(V_B - V_A\right)$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V \quad \text{et} \quad dV = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V.\vec{dl} \quad \Rightarrow \quad dV = -\vec{E}.\vec{dl}$$

$$V_A - V_B = \int_A^B -dV = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = \int_A^B E\,dl\cos\alpha = E\cos\alpha\int_A^B dl = E\cos\alpha\;a = \vec{E}.\overrightarrow{AB} \tag{2.47}$$

D'où :

$$W_{dipole} = q\left(V_A - V_B\right) = -q.E.AB = -\vec{P}.\vec{E} \qquad (2.48)$$

2.5.4. MOUVEMENT DU DIPôLE DANS UN CHAMP ELECTRIQUE UNIFORME

Un dipôle placé dans un champ électrique est soumis à un couple de forces de même intensité, et de sens opposés. Ce couple est caractérisé par son moment $\vec{\Gamma}$ définit comme suit :

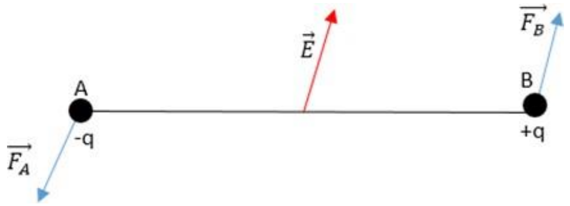


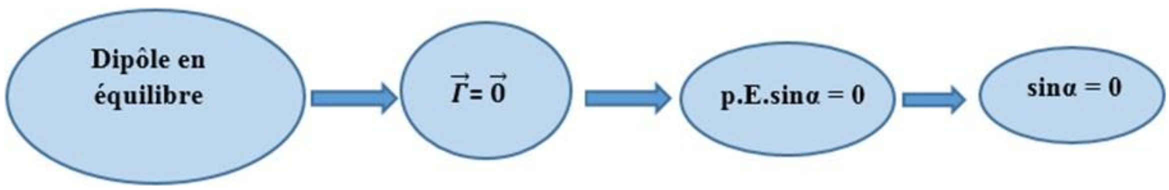
Figure 2.6

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} &= \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_B} \\ &= \overrightarrow{OA} \wedge \left(-q\vec{E}\right) + \overrightarrow{OB} \wedge \left(q\vec{E}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) \wedge \left(q\vec{E}\right) \\ &= q\left(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{E}\right) = q\overrightarrow{AB} \wedge \vec{E}\end{aligned} \qquad (2.49)$$

Par conséquent :

$$\vec{\Gamma} = \vec{P} \wedge \vec{E} = \left|\vec{P}\right| \left|\vec{E}\right| \sin\left(\vec{P}, \vec{E}\right) \qquad (2.50)$$

EQUILIBRE DU DIPôLE :



$\alpha = 0$: équilibre stable du dipôle.
$\alpha = \pi$: équilibre instable du dipôle.
Lorsque le dipôle est en équilibre le couple de forces électriques tend à orienter ce dipôle de façon que son moment dipolaire $\vec{P}$ ait et le même sens que champ électrique $\vec{E}$

2.6. THéORÈME DE GAUSS

On considère maintenant une charge ponctuelle q située en un point O de l'espace. Le flux du champ électrique $\vec{E}$ créé par cette charge à travers une surface élémentaire quelconque orientée est par définition :

$$d\Phi = \vec{E}.\vec{n}\,ds \tag{2.51}$$

Par convention, on oriente le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la surface dS vers l'extérieur. Ainsi, pour q > 0, le champ $\vec{E}$ est dirigé dans le même sens que $\vec{n}$ et l'on obtient un flux positif. A partir de l'expression du champ créé par une charge ponctuelle, on obtient alors :

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\vec{u}.\vec{n}}{r^2}ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.d\Omega \tag{2.52}$$

On remarque que la grandeur dΩ est sans unité, elle provient d'un quotient d'un élément de surface en m^2 divisé par le carrée d'une longueur en m^2. Elle est appelée angle solide. D'après l'équation (2.53), on obtient un flux dépendant directement de l'angle solide sous lequel est vue la surface et non de sa distance r. Pour $d\Omega \geq 0$, q pouvant être positif ou négatif.

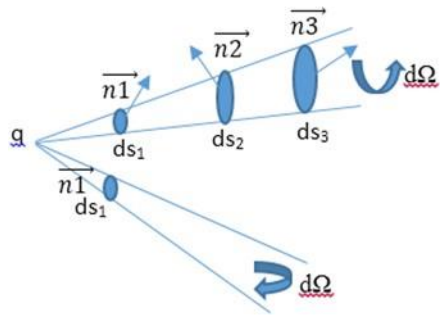


Figure 2.7

On a une charge q située à l'intérieur de la surface S orientée par le vecteur $\vec{n}$ enfermant ainsi un volume v, Pour le rayon 1, dans le cas du rayon 1 on a :

$$d\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega \tag{2.53}$$

Par contre le rayon 2 traverse plusieurs fois la surface, avec des directions différentes. On aura alors une contribution au flux :

$$d\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{u}.\vec{n}_1}{r_1^2}ds_1 + \frac{\vec{u}.\vec{n}_2}{r_2^2}ds_2\ \frac{\vec{u}.\vec{n}_3}{r_3^2}ds_3\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(d\Omega - d\Omega + d\Omega\right)$$
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega \tag{2.54}$$

En intégrant (2.49) sur toutes les directions, on obtient un flux total :

$$\Phi = \oint\!\!\oint_s \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{2.55}$$

Car l'intégrale de l'angle solide sur tout l'espace est telle que :

$$\Omega = \oint\!\!\oint_s d\Omega = 4\pi$$

En vertu du principe de superposition, ce résultat se généralise aisément à un ensemble quelconque de charges.

Enoncé du théorème de Gauss :

Le flux du champ électrique à travers une surface quelconque, fermée et orientée est égal, dans le vide, au produit de la charge Q_{int} par la constante $1/\varepsilon_0$.

$$\Phi = \oint\!\!\oint_s \vec{E}.\vec{ds} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{2.56}$$

Remarque :

1. Du point de vue physique, le théorème de Gauss fournit le lien entre le flux du champ électrostatique et les sources du champ, à savoir les charges électriques.

2. Le théorème de Gauss fournit une méthode très utile pour calculer le champ $\vec{E}$ lorsque celui-ci possède des propriétés de symétrie particulières. Celles-ci doivent en effet permettre de calculer facilement le flux Φ. Comme le théorème de Gauss est valable pour une surface quelconque, il nous suffit de trouver une surface S adaptée, c'est à dire respectant les propriétés de symétrie du champ, appelée « surface de Gauss ».

2.6.1. CHAMP éLECTRIQUE CRéé PAR UN PLAN INFINI UNIFORMéMENT CHARGé

On considère un plan infini Π portant une charge électrique par unité de surface σ. Pour utiliser le théorème de Gauss, il faut tout d'abord connaître les propriétés de symétrie du champ électrique $\vec{E}$. Tous les plans perpendiculaires au plan infini Π sont des plans de symétrie de celui-ci : $\vec{E}$ appartient aux plans de symétrie, il est donc perpendiculaire à Π. Si ce plan est constitué par les vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j})$, on obtient alors $\vec{E} = Ez(x, y, z)\vec{k}$. Par ailleurs, l'invariance par translation selon les axes x et y fournit l'expression champ électrique $\vec{E} = Ez(z)\vec{k}$. Le plan Π est lui-même plan de symétrie, donc E(z) est impaire.

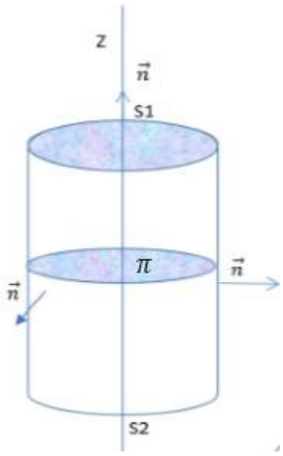


Figure 2.8

Etant donné que ces propriétés de symétrie sont vérifiées, la surface de Gauss la plus adaptée est par conséquent un cylindre de sections perpendiculaires au plan et situé à des hauteurs symétriques.

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_{s} \vec{E}.\vec{ds} = \oiint_{s1} \vec{E}.\vec{ds} + \oiint_{s2} \vec{E}.\vec{ds} + \oiint_{s_L} \vec{E}.\vec{ds} \\ &= E(z)S + E(-z)S + 0 = 2ES \\ &= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iint_{s} \sigma ds = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}\end{aligned} \tag{2.57}$$

Il s'ensuit que le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé vaut :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{2.58}$$

Remarque :

1. Le champ ne varie pas avec la distance, ce qui est naturel car le plan est supposé infini.
2. On peut encore appliquer ce résultat pour une surface quelconque chargée uniformément. Il suffit alors d'interpréter E comme le champ au voisinage immédiat de la surface : suffisamment près, celle-ci peut être assimilée à un plan infini.

2.6.2. CHAMP CRéé PAR UNE SPHERE UNIFORMéMENT CHARGéE

On considère une sphère pleine de centre O et rayon R, chargée avec une distribution volumique de charges ρ. Cette distribution possédant une symétrie sphérique, le champ électrostatique qui en résulte aura la même symétrie, donc $\vec{E} = E_r \vec{ur}$.

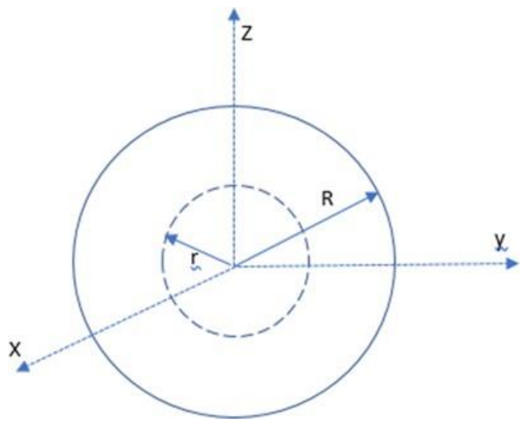


Figure 2.9

La surface de Gauss adaptée est simplement une sphère de rayon r et le théorème de Gauss donne la relation du flux comme suit :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.\vec{ds} = \iint_S E(r)dS = E(r)\,4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dv \qquad (2.59)$$

Lorsque r < R, on obtient la relation suivante pour le champ électrique :

$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \qquad (2.60)$$

Lorsque r > R, la sphère de Gauss enferme un volume V supérieur à celui de la sphère. Mais la distribution de charges n'est pas nulle pour toute sphère dont le rayon est inférieur à R, ce qui fournit la relation suivante pour le champ électrique :

$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{\pi r^2 \varepsilon_0} \qquad (2.61)$$

Où Q est la charge totale portée par la sphère. On vient ainsi de démontrer, sur un cas simple, qu'une distribution de charges à symétrie sphérique produit à l'extérieur le même champ qu'une charge ponctuelle égale, située au centre O de la sphère.

2.7. EXERCICES

Exemple1 :

Trois charges électriques ponctuelles q_A , q_B et q_C sont placées aux points A(a,0), B (0 ,a) et C(-a,0) respectivement. On donne : $q_A = q = 2.10^{-9}$C, $q_B = -2q$, $q_C = 2q$ et a= 5 cm.

1. Calculer le potentiel électrique V créé par ces trois charges au point O.
2. Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ créé au point O. Représenter qualitativement $\vec{E}$.
3. En déduire la force électrostatique $\vec{F}$ exercée sur une charge $q' = (q' = -q)$placée en O.

4. Avec quelle énergie cinétique minimale doit on lancer de l'infini la charge q' pour qu'elle atteigne le point O ?

5. Calculer l'énergie interne U du système constitué par ces quatre charges.

Exemple2 :

Calculer le champ électrique et le potentiel produits par un filament électrique de longueur infinie portant une charge λ par unité de longueur.

Exemple3 :

Soit un disque de rayon R chargé uniformément en surface avec une densité surfacique $\sigma > 0$

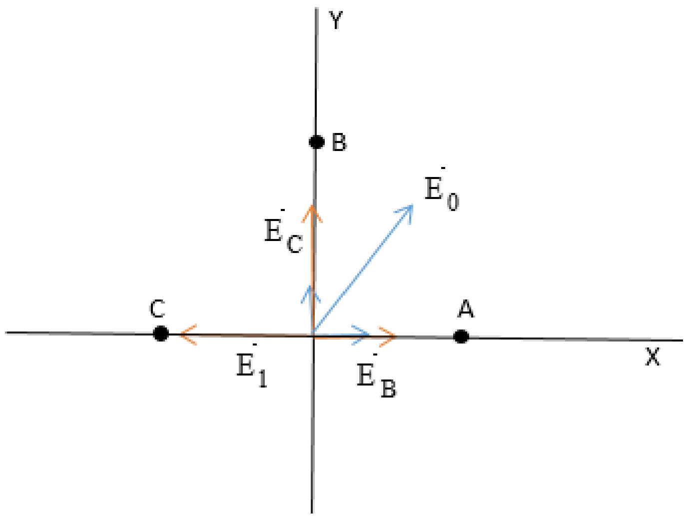
1) Calculer le champ électrique E(M) en un point quelconque M sur l'axe du disque.
2) On fait tendre R vers l'infini. En déduire l'expression du champ E(M)

Exemple4 :

Calculer le champ électrique et le potentiel produits par un cylindre infini de rayon R, uniformément chargé avec une charge par unité de surface $\sigma > 0$.

2.8. CORRIGé

Exemple1 :



1. Le potentiel V_0 est la somme algébrique des potentiels :

$$V_0 = V_A + V_B + V_C = \frac{kq}{a} - \frac{\cancel{2kq}}{a} + \frac{\cancel{2kq}}{a} = \frac{kq}{a}$$

A.N :

$$V_0 = \frac{9.10^9 . 2.10^{-9}}{5.10^{-2}} = 360 \text{ V}$$

2. Le champ $\vec{E}_0$ est la somme vectorielle des champs tel que :

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = -\frac{kq}{a^2}\vec{i} + \frac{2kq}{a^2}\vec{j} + \frac{2kq}{a^2}\vec{i}$$

$$= \frac{kq}{a^2}\vec{i} + \frac{2kq}{a^2}\vec{j} = \frac{kq}{a^2}\left(\vec{i} + \vec{2j}\right)$$

$$E_0 = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

A.N :

$$\vec{E}_0 = 7200\left(\vec{i} + \vec{2j}\right) = 1.6\ 10^4\ \text{V/m}$$

3. La force est exprimée par :

$$\vec{F} = q'\ \vec{E_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -q\frac{kq}{a^2}\left(\vec{i} + 2\vec{j}\right) = -\frac{kq^2}{a^2}\left(\vec{i} + 2\vec{j}\right)$$

A.N :

$$F = 1.6\times 10^4 \times 2.10^{-9} = 3.2 \times 10^{-5}\ \text{N}$$

4. Conservation de l'énergie totale :

$$\Delta E_C = -\Delta E_P$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -\left[E_{Pf} - E_{Pi}\right]$$

$$0 - E_{Ci} = -\left[E_{Pf} - 0\right]$$

$$\Rightarrow \quad E_{Ci} = E_{Pf}$$

$$\Rightarrow \quad E_{Ci} = -q' V_0 = -(-q)\frac{kq}{a}$$

$$\Rightarrow \quad E_{Ci} = \frac{kq^2}{a}$$

A.N :

$$E_{Ci} = 7.2\times 10^{-7}\ \text{J}$$

5. l'énergie interne U du système :

$$U = k\left[\frac{q_A q_B}{\sqrt{2}\,a} + \frac{q_A q_C}{2a} + \frac{q_A q'}{a} + \frac{q_B q'}{a}\ \frac{q_C q_B}{\sqrt{2}\,a} + \frac{q_C q'}{a}\right]$$

$$= -\frac{6kq^2}{\sqrt{2}\,a}$$

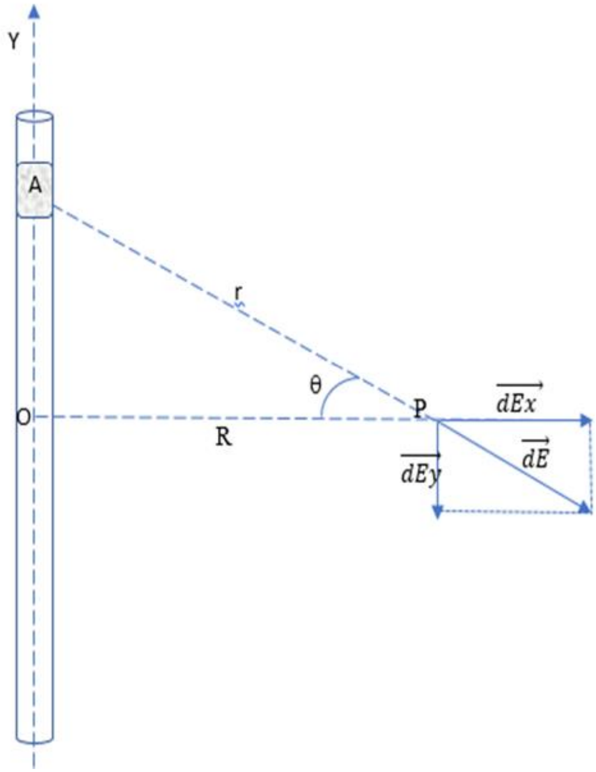
A.N :

$$U = -3.05\times 10^{-6}\ \text{J}$$

Exemple2 :

On considère le filament comme un cylindre dont le rayon de surface $r \ll L$, où $L \to \infty$. On place le filament sur un l'axe OY et on calcule le champ produit par un élément de longueur dy. Au point P situé sur l'axe (OX), l'élément dy est distant de r du point P. le champ élémentaire $\overrightarrow{dE}$ est porté par $\overrightarrow{AP}$ qui est représenté par $\vec{r}$. $\overrightarrow{dE}$ se décompose en deux composantes $\overrightarrow{dEx}$ et $\overrightarrow{dEy}$.

Comme le problème est symétrique, on constate que la partie inférieure du filament produit un champ électrique opposé à celui produit par la partie supérieure.



$$E_x = \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} dE_x = \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} dE \cos\alpha \, d\alpha$$

avec :

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad dq = \lambda dy$$

D'autre part, on a :

aussi : $$y = R\tan\alpha \rightarrow dy = R\,(\tan\alpha)' = R\frac{d\alpha}{(\cos\alpha)^2}, \quad r = \frac{R}{\cos\alpha}$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} \frac{R\,d\alpha}{\cos^2\alpha}\,\frac{\cos^2\alpha\,\cos\alpha\,d\alpha}{R^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\,d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\sin\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\,\overrightarrow{u_x}$$

Le calcul du potentiel électrique :

On pose R=x, par conséquent :

$$E = -\frac{\partial V}{\partial x} = +\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

d'où :

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{dx}{x} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln x + C$$

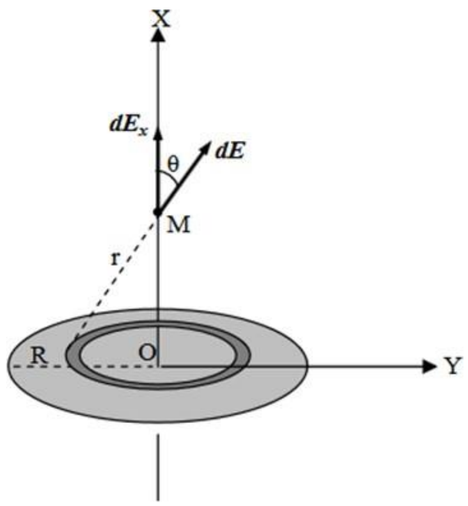
Calcul de la constante C :

$$V(1) = 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow V(x) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln x$$

Exemple 3 :

Le calcul du champ électrique :

On choisit comme élément de surface dS une couronne circulaire comprise entre les cercles de rayons y et y+dy. L'élément de surface dS porte une charge dq = σ dS.



Par raison de symétrie (il s'agit d'une surface équipotentielle), le champ crée par cette couronne en un point M d'abscisse x est porté par ox et a pour expression :

$$dE_x = dE\cos\theta = \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = k\,\frac{\sigma dS}{r^2}\cos\theta$$

avec :

$$dS = 2\pi y\,dy, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \; r^2 = x^2 + y^2$$

d'où :

$$dE_x = k\frac{\sigma 2\pi y\,dy\,x}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\frac{y\,dy}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Le champ total est donc également porté par ox, est :

$$E = \int dE_x = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{ydy}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[-\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^R$$

$$E = \int dE_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x}{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)}}\right]_0^R$$

Si on fait tendre R vers l'infini, on déduit :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

2) Calcul du potentiel électrique :

D'après la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$$

En chaque point P on a un champ E = E(x), par conséquent :

$$E = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow V = \int E\,dx$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{\left(R^2 + x^2\right)} + C$$

D'après la condition à x= 0, v $\rightarrow$0, la constante est nulle. Par conséquent :

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{\left(R^2 + x^2\right)}$$

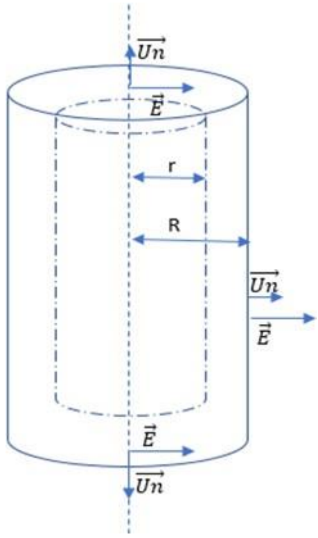
Exemple 4:

On considère un cylindre de rayon R et de longueur infini (voir figure …).

La symétrie du problème indique que le champ électrique est radial. Sur les deux bases, supérieur et inférieure le flux est nul.

$$\left(\vec{E}, \vec{U}_n\right) = \frac{\pi}{2}$$

Le seul flux non nul est celui de la surface latérale. Pour le choix de la surface de Gauss de rayon de r et d'hauteur h, on a deux possibilités, soit une surface de rayon r supérieur à R ou r inférieur à R.



$$Q_{in}(r,h) = \begin{cases} 0 & r \leq 0 \\ 2\pi Rh\sigma & r \geq 0 \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\vec{E} = E(r)\,\overrightarrow{u_r}$$

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \dfrac{\sigma R}{r\varepsilon_0} & r \geq R \end{cases}$$

$$V(r) = -\int E(r)dr = \begin{cases} C_1 & r \leq R \\ -\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r) + C_2 & r \geq R \end{cases}$$

En imposant le potentiel $V=V_0$ à $r=r_0$ avec $r_0 \geq R$.

$$V_0 = V(r_0) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r_0) + C_2 \Rightarrow C_2 = V_0 + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r_0)$$

Par conséquent :

$$r \geq R \Rightarrow V(r) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r) + V_0 + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r_0) = V_0 + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Comme V(r) est une fonction continue au point r=R, par conséquent :

$$\lim_{r \to R^-} V(r) = \lim_{r \to R^+} V(r) \Rightarrow C_1 = V_0 + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Finalement :

$$V(r) = \begin{cases} V_0 + \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r_0}{R}\right) & r \leq R \\ V_0 + \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r_0}{r}\right) & r \geq R \end{cases}$$

CHAPITRE 3

CONDUCTEURS, CONDENSATEURS

3.1. CONDUCTEURS

3.1.1. DéFINITION D'UN CONDUCTEUR

Un conducteur est un matériau dans lequel les charges se déplacent lorsqu'une force électrostatique leur est appliquée.

Dans les métaux, seuls les ´électrons sont mobiles. Le réseau de charges positives ne possède qu'une faible mobilité et peut être considéré comme fixe. Dans les liquides et les gaz, les ions se déplacent aussi.

3.1.2. DéFINITION D'UN CONDUCTEUR EN éQUILIBRE éLECTROSTATIQUE

Un conducteur est en équilibre électrostatique si les charges mobiles ne se déplacent pas, il s'ensuit que la répartition des charges reste constante dans le temps.

Propriétés d'un conducteur en équilibre

1) Le champ électrostatique à l'intérieur du conducteur est nul $\vec{E} = 0$ parce que les charges ne bougent pas et $\overrightarrow{F_{ext}} = 0$.

2) Le potentiel à l'intérieur du conducteur est constant, c'est un volume équipotentiel parce que le champ est nul et le potentiel se déduit de la relation ;

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V = 0 \Rightarrow V = Cte$$

3) La surface du conducteur est une équipotentielle. Puisque les lignes de champ électrostatique sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles. Dans ce cas, le champ crée à l'extérieur près de la surface est perpendiculaire à celle-ci.

4) Le flux du champ sur la surface équipotentielle est nul ; car les charges en excès ne peuvent pas se repartir dans le volume.

En effet, par application du théorème de Gauss à une surface fermée S quelconque incluse dans le volume, on constate que la somme des charges intérieures à cette surface est nulle. Dans ce cas les charges excédentaires ne peuvent se repartir que sur la surface du conducteur. Cette répartition se fait avec une densité surfacique de charges δ. Expérimentalement, on constate que les charges se répartissent effectivement sur une épaisseur de quelques A°.

Les charges qui peuvent se mouvoir se déplacent vers la surface pour annuler l'effet du champ $\vec{E}$ partout à l'intérieur du conducteur.

Puisque le champ est nul, le flux est alors donné par ;

$$\Phi = \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E}.\vec{ds} = 0 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{3.1}$$

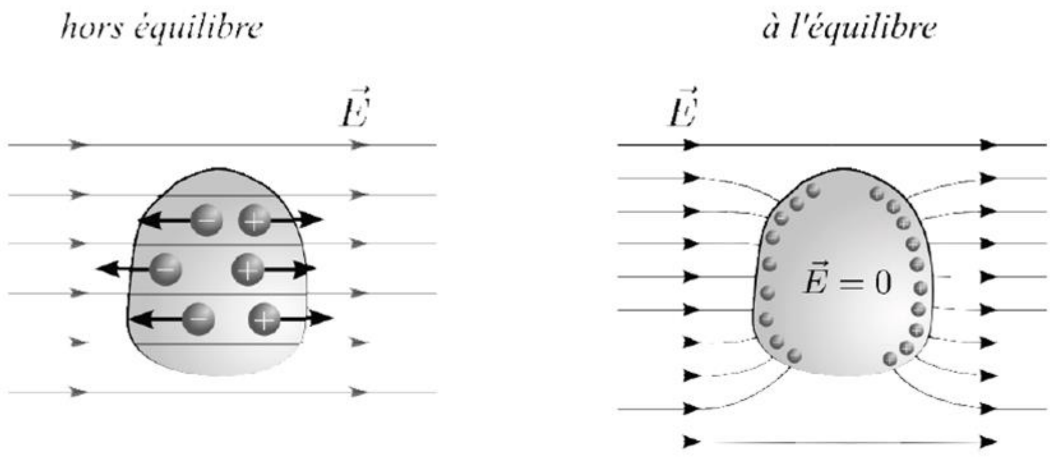


Figure 3.1 : conducteur non chargé dans un champ uniforme.

3.1.3. CAPACITé D'UN CONDUCTEUR EN éQUILIBRE éLECTRIQUE

Pour un conducteur en équilibre électrique, le potentiel auquel ce conducteur se trouve est lié à la charge repartie sur sa surface par une relation. En effet, le potentiel en tout point M à l'intérieur du conducteur peut s´écrire :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oiint_{S_{Gauss}} \frac{\sigma dS}{r} \tag{3.2}$$

Où S est la surface du conducteur,σ_e est la densité superficielle de charge et r la distance entre point M considéré et l'élément de surface dS. Or, la charge totale Q est la somme des charges élémentaires :

$$Q = \oiint_{S_{Gauss}} \sigma dS \tag{3.3}$$

Si on multiplie σ_e par un coefficient quelconque β, les grandeurs V et Q doivent être aussi multipliés par β du fait que l'intégrale est une opération linéaire, ce qui en résulte que le rapport Q/V est une constante. Cette constante est appelée capacité propre du conducteur isolé.

$$Q = CV \tag{3.4}$$

L'unité de capacité est le Farad de symbole F. On a 1μF = 10^{-6} F et 1pF = 10^{-12} F, 1nF = 10^{-9} F.
Exemple : Capacité d'une sphère placée dans le vide
On a :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \tag{3.5}$$

D'où :

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Application numérique : Pour la Terre, C = 700 µF

3.1.4. ENSEMBLE DE CONDUCTEURS EN éQUILIBRE éLECTROSTATIQUE

A) PROPRIéTéS DES LIGNES DE CHAMP

Soit le cas de deux conducteurs à proximité l'un de l'autre, l'un chargé ($Q_1 > 0$) et l'autre non chargé ($Q_2 = 0$). Les charges dans le conducteur neutre vont se déplacer pour annuler le champ se trouvant à l'intérieur de ce conducteur.

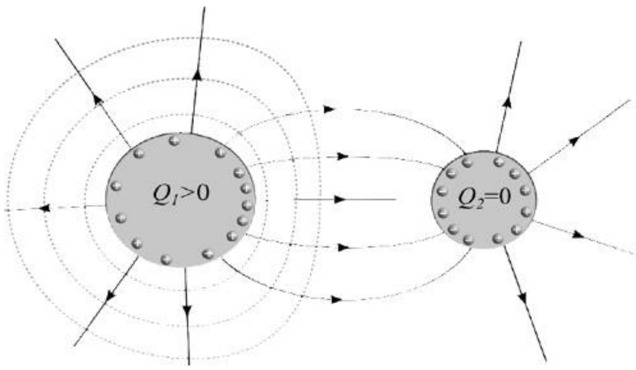


Figure 3.2 : Ligne de champ électrique

Les lignes de champ présentent certaines propriétés :

1) Une ligne de champ est perpendiculaire à la surface des conducteurs et part d'une région où la densité superficielle est positive $\sigma > 0$ et se termine dans une région où la densité superficielle est négative $\sigma < 0$ ou bien dans une région se trouvant à l'infini.

2) Le potentiel décroit forcement le long d'une ligne de champ. Par conséquent, le potentiel varie de V_1 à V_2 ou bien de V_1 à l'infini.

3) Si on applique le théorème de Gauss sur un tube de champ qui commence sur un conducteur et finit sur un autre avec la surface de Gauss = tube de champ + bouchons à l'intérieur des conducteurs, $\vec{E} = 0$ à l'intérieur des conducteurs et sur le tube de champ $\vec{E}$ est perpendiculaire à la surface $\overrightarrow{dS}$. Par conséquent, le flux total est nul.

$$\Phi = \oiint_{S_{Gauss}} \vec{E}.\overrightarrow{ds} = 0 \tag{3.6}$$

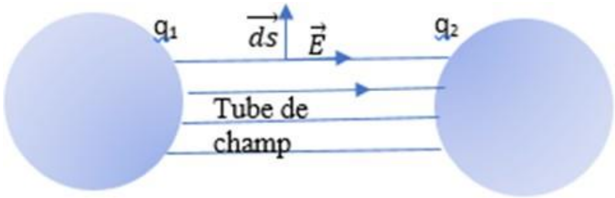


Figure 3.3 : Tube de champ électrique

Les seules charges à l'intérieur de la surface de Gauss sont celles présentes à la surface des conducteurs. On a q_1 sur le conducteur 1 et q_2 sur le conducteur 2. D'après le théorème de Gauss on a :

$$\Phi = 0 = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow q_1 = -q_2 \tag{3.7}$$

On dit que les surfaces des conducteurs à l'intérieur du tube de champ sont des éléments correspondants.

A) CONDUCTEURS EN INFLUENCE PARTIELLE

La figure 3.3, montre deux conducteurs s'influencent l'un sur l'autre mais certaines lignes de champ partent de l'un des conducteurs à l'infini. On dit que l'influence est partielle.
D'après le théorème de superposition, Il est alors possible d'´écrire la relation entre charges et potentiels comme suit :

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 \\ Q_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2 \end{cases} \tag{3.8}$$

Ce système d'équations exprime que la charge Q_1 dépend linéairement du potentiel V_1 comme dans le cas d'un conducteur seul mais aussi du potentiel V_2 puisqu'il y a un deuxième conducteur qui influence les charges. Les termes C_{ij} sont les coefficients de capacité qui ne sont pas identiques à la capacité d'un conducteur seul dans l'espace.

C) CONDUCTEURS EN INFLUENCE TOTALE

Considérons la configuration de la figure 3.4. Un conducteur creux 2 entoure complétement un conducteur 1. La charge totale sur le conducteur 2 est donc $Q_2 = Q' + Q''$ avec Q' étant la charge à l'intérieure de la cavité et Q'' celle sur la surface extérieure du conducteur. Nous allons supposer que le potentiel V_2 du conducteur externe est nul. Par conséquent :
– Puisque $V_2 = 0$, les charges totales dépendent du potentiel V_1, ce qui résulte :

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11} V_1 \\ Q_2 = C_{21} V_1 \end{cases} \tag{3.9}$$

-Toutes les lignes de champ ont une extrémité sur le conducteur 1 et l'autre sur le conducteur 2. Si on applique le principe des éléments correspondants, on a $Q_2' + Q_1 = 0$.
-Puisque $V_2 = 0 = V_1$, il n'y a pas de variation de potentiel à l'extérieur du conducteur 2 donc le champ extérieur est nul. Donc la charge $Q_2'' = 0$.

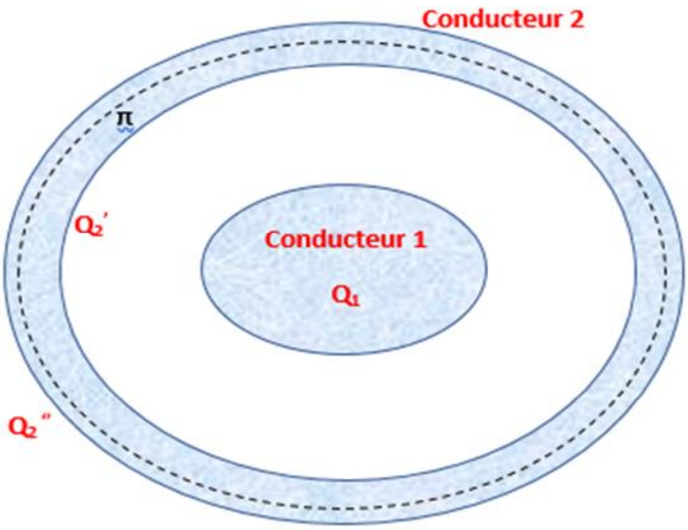


Figure 3.4 : Conducteur en influence totale

Dans ce cas, on a :

$$Q_2 = -Q_1 \quad \Rightarrow \quad C_{11} = -C_{21} \tag{3.10}$$

La dernière égalité $C_{11} = C_{21}$ définit deux conducteurs en influence totale. Dans un cas très général où V_2 est différent de 0, on montre que les deux coefficients C_{12} et C_{22} dans le système d'équations 3.8 sont égaux :

$$C_{12} = C_{22} \tag{3.11}$$

3.2. CONDENSATEURS

3.2.1. DéFINITION

Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs se trouvant en influence totale. La charge Q du condensateur est la charge Q_1 de l'armature interne, ce qui conduit à $Q = Q_1$.
La capacité du condensateur est identique au coefficient de capacité C_{11} :

$$C = C_{11} = -C_{21} = -C_{12} \tag{3.12}$$

La charge du condensateur s'écrit alors, en fonction des potentiels V_1 et V_2

$$Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 \quad \Rightarrow \quad Q = C V_1 - C V_2 \tag{3.13}$$

D'où l'expression de la charge du condensateur :

$$Q = C\left(V_1 - V_2\right) \quad (3.14)$$

3.2.2. CALCUL DE CAPACITE

Le calcul d'une capacité se fait généralement en adoptant la méthode suivante :

– La configuration géométrique des conducteurs possède en général une symétrie qui facilite l'application du théorème de Gauss et ce qui permet le calcul du champ en tout point de l'espace entre les conducteurs.

– Connaissant le champ, on applique la relation champ-potentiel pour calculer la différence de potentiel entre les deux conducteurs où l'intégrale se fait sur un chemin reliant le conducteur 1 au conducteur 2.

$$V_1 - V_2 = \int \vec{E}.\vec{dl} \quad (3.15)$$

Dans le cas où la charge n'est pas connue, ou si on n'utilise pas la charge totale Q dans le théorème de Gauss de la première étape ci-dessus, on peut la calculer en s'aidant du théorème de Coulomb. Celui-ci donne la densité superficielle de charge σ. Où l'intégrale se fait sur toute la surface du conducteur 1. La charge totale est alors :

$$Q = \iint_S \sigma dS \quad (3.16)$$

En utilisant l'équation 3.12, on trouve l'expression de la capacité comme suit :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad (3.17)$$

3.2.3. EXEMPLES, APPLICATIONS

A) CAPACITé C D'UN CONDENSATEUR PLAN

Considérons un condensateur plan de surface A dont les armatures sont séparées par une distance d et chargées avec une densité de charge superficielle σ.

Calculer la capacité C du condensateur en utilisant sa définition.

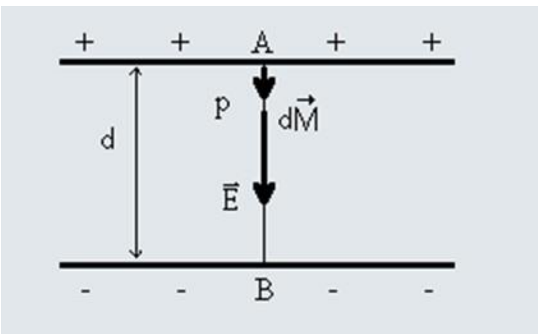


Figure 3.5 : Conducteur plan

Réponse ;

La capacité est donnée par :

$$C = \frac{q}{\Delta V} \qquad (3.18)$$

d'où :

$$C = \frac{|\sigma| A}{Ed} \qquad (3.19)$$

On trouve alors :

$$C = \frac{|\sigma| A}{\left(2 \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\right) d} \qquad (3.20)$$

La capacité est finalement exprimée par :

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad (3.21)$$

B) CAPACITé C D'UN CONDENSATEUR CYLINDRIQUE

Soit un condensateur cylindrique constitué de deux armatures métalliques coaxiales d'épaisseur négligeable et de rayons respectifs R_1 et R_2 considérés très petits devant la hauteur h.

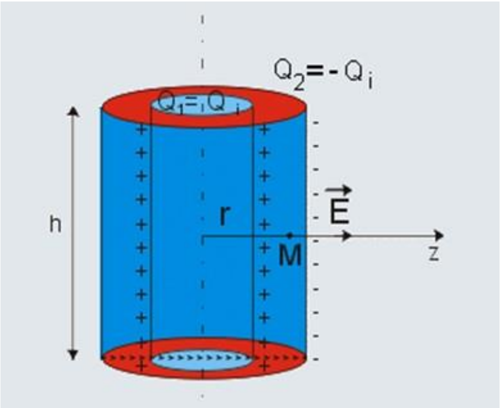


Figure 3.6 : Conducteur cylindrique

Réponse ;

Le flux du champ électrique à travers une surface cylindrique de rayon r fermée aux deux extrémités par deux disques de surface S_1 et S_2 et de surface latérale S_L est :

$$\Phi = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \iint_{S1} \vec{E}.\vec{dS} + \iint_{S2} \vec{E}.\vec{dS} + \iint_{SL} \vec{E}.\vec{dS} \qquad (3.22)$$

En tout point des surfaces perpendiculaires à l'axe et par symétrie l'élément de surface dS est perpendiculaire au champ $\vec{E}$. Les deux premières intégrales sont donc nulles alors qu'en tout point de la surface latérale S_L, $\vec{E}$ est constant et colinéaire à $\vec{dS}$ d'où :

$$\Phi = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = E \iint dS \qquad (3.23)$$

Le champ électrique est donné par :

$$\frac{Q_i}{\varepsilon_0} = E\left(2\pi rh\right) \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q_i}{2\pi rh\varepsilon_0} \qquad (3.24)$$

En remplaçant la charge intérieure Q_i par la charge Q_1 de l'armature A, on trouve :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad dV = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\lambda h}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1} \qquad (3.25)$$

La capacité est finalement exprimée par :

$$\Rightarrow \quad C = \frac{Q_1}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \qquad (3.26)$$

A) CAPACITé C D'UN CONDENSATEUR SPHéRIQUE

Deux conducteurs sphériques concentriques A et B forment un condensateur. Soit R_A le rayon extérieur de A et R_B le rayon intérieur de B.

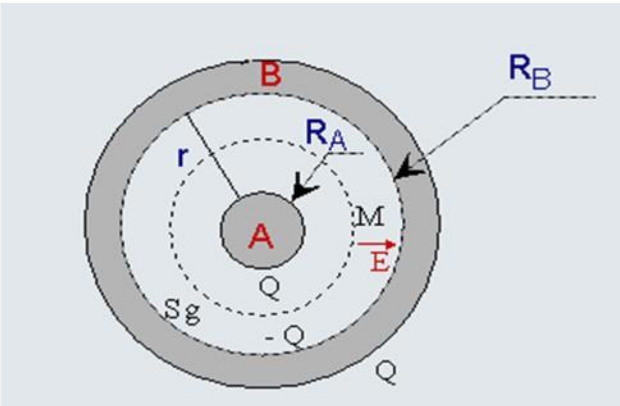


Figure 3.7 : Conducteur Sphérique

Réponse :

Par symétrie, le champ $\vec{E}$ est radial. Traçons une sphère de Gauss S_G de rayon r passant par M.

Le flux de $\vec{E}$ à travers S_G est :

$$\Phi = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} = \iint \vec{E}.\vec{dS} = E\,4\pi r^2 \qquad (3.27)$$

Si la charge de la sphère A est Q_A, le théorème de Gauss donne :

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0} \qquad (3.28)$$

Le champ électrique est déduit de la façon suivante :

$$V(A) - V(B) = -\int_{R_A}^{R_B} \vec{E}.\vec{dr} \Rightarrow E = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_B - R_A}{R_B\,R_A}\right) \quad (3.29)$$

La différence de potentiel électrique est donnée par :

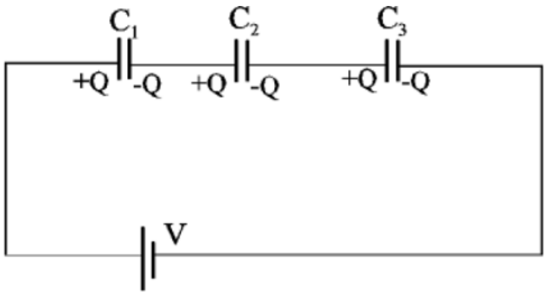
$$V(A) - V(B) = \frac{Q_A}{C} = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_B - R_A}{R_B\,R_A}\right) \quad (3.30)$$

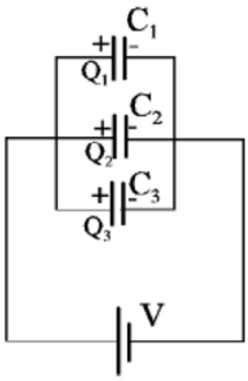
La capacité est finalement exprimée par :

$$C = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_B\,R_A}{R_B - R_A}\right)$$

3.2.4. ASSOCIATION DE CONDENSATEURS EN SéRIE ET EN PARALLÈLE

Les condensateurs peuvent être associés en série ou en parallèle (voir figures 3.8. a et b), ou par combinaison des deux





Figures 3.8 : Association de condensateurs

(a) Condensateurs en série, (b) condensateurs en parallèle

A) ASSOCIATION DE CONDENSATEURS EN SéRIE

Lorsque les condensateurs sont branchés en série, ils portent nécessairement tous la même charge Q. En effet, si une charge +Q s'écoule de l'électrode positive de la pile sur l'armature gauche du premier condensateur, il apparaît, par induction, une charge –Q sur l'autre armature. Comme cette dernière est connectée à l'armature gauche du deuxième condensateur par un fil conducteur, il apparaîtra une charge +Q sur cette dernière. En effet les deux armatures connectées par un fil conducteur forment un conducteur unique et isolé. Par conséquent, la charge totale doit donc y rester nulle. Les condensateurs placés en série se chargent donc de la même charge +Q pour l'armature gauche et -Q pour l'armature droite. La différence de potentiel aux bornes de chacun des condensateurs vaut :

$$V_1 = \frac{Q}{C_1}, \quad V_2 = \frac{Q}{C_2}, \quad V_3 = \frac{Q}{C_3} \tag{3.31}$$

La différence de potentiel aux bornes de l'ensemble formé par les trois condensateurs est la somme de toutes les différences de potentiel :

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \tag{3.32}$$

Si la capacité de l'ensemble formé par les trois condensateurs en série est C, on trouve alors :

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} \tag{3.33}$$

D'où la relation pour des condensateurs en série :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \tag{3.34}$$

B) ASSOCIATION DE CONDENSATEURS EN PARALLÈLE

Lorsque les condensateurs sont branchés en parallèle, la différence de potentiel à leurs armatures est la même :

$$V = V_1 = V_2 = V_3 \tag{3.35}$$

D'autre part, en appliquant le principe de la conservation de la charge, la charge totale Q des électrodes de la pile vaut :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \tag{3.36}$$

où Q_1, Q_2 et Q_3 sont les charges portées par les armatures de chacun des trois condensateurs. Si la capacité de l'ensemble formé par les trois condensateurs en parallèle est C :
On a :

$$CV = CV_1 + CV_2 + CV_3 \tag{3.37}$$

En divisant les deux membres par V, on trouve :

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \tag{3.38}$$

3.2.5. L'éNERGIE éLECTRIQUE EMMAGASINéE PAR UN CONDENSATEUR

Un condensateur emmagasine une quantité d'énergie électrique égale au travail accompli pour le charger. Supposons qu'à un instant donné, la charge déjà accumulée sur les armatures est q. Dès lors, la différence de potentiel entre les armatures vaut q/ C. Le travail nécessaire pour faire passer une charge infinitésimale dq de l'armature négative à l'armature positive est :

$$dW = (q/C)\,dq \tag{3.39}$$

Le travail total W, pour charger un condensateur non chargé avec une charge Q s'obtient en intégrant :

$$W = \int_0^Q q/C\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{3.40}$$

Ce travail est emmagasiné sous forme d'énergie potentielle électrique U_E . Comme on a la relation Q = CV, où V est la différence de potentiel, l'énergie potentielle électrique peut s'écrire sous trois formes différentes :

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 \tag{3.41}$$

3.3. EXERCICES

Exemple 1 :

Un condensateur de capacité de 2 µF et un condensateur de capacité de 3 µF sont montés en série.

a) Quelles est la capacité équivalente ?

b) Une d.d.p de 500 Volts est appliquée à l'ensemble. Trouver la charge de chacun des condensateurs et la d.d.p aux bornes de chacun d'entre eux.

Exemple 2 :

Un condensateur de capacité de 5 nF et un condensateur de capacité de 10 nF sont montés en série.

a) Quelles est la capacité équivalente ?

b) Une d.d.p de 1000 Volts est appliquée à l'ensemble. Trouver la charge de chacun des condensateurs et la d.d.p aux bornes de chacun d'entre eux.

Exemple 3 :

Un condensateur de capacité de 100µF doit avoir une réserve d'énergie de 50 Joules de façon à pouvoir actionner une lampe de flash.

a) Quelle est la tension nécessaire pour charger le condensateur ?

b) Quelle est la charge qui traverse la lampe de flash ?

Exemple 4 :

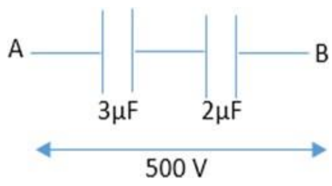
Un condensateur à plaques parallèles est formé de plaques carrées de 5 cm de côté et séparées par une distance de 0.1 mm. Trouver sa capacité :

a) Dans l'air ($\varepsilon = \varepsilon_0$).

b) Dans un milieu de $\varepsilon = 6\varepsilon_0$

3.4. CORRIGé

Exemple 1 :



a) La capacité équivalente est donnée par :

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{1}{2\times10^{-6}}+\frac{1}{3\times10^{-6}}$$

$$\Rightarrow \quad C=\frac{6\times10^{6}}{5}=1.2\times10^{-6}\ \mathrm{F}=1.2\ \mu\mathrm{F}$$

b) On a :

$$C_1=\frac{Q_1}{V_1}\ ,\ C_2=\frac{Q_2}{V_2}$$

avec :

$$Q_1=Q_2=Q=CV$$

d'où :

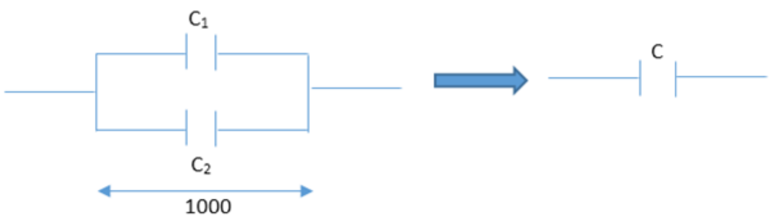
$$Q=1.2\times10^{-6}\times500=6\times10^{-4}$$

Or :

$$V_1=\frac{Q}{C_1},\quad V_2=\frac{Q}{C_2}$$

$$V_1=\frac{6\times10^{-4}}{3\times10^{-6}}=3\times10^{2}\ \text{Volts}\ ,\quad V_2=\frac{6\times10^{-4}}{2\times10^{-6}}=2\times10^{2}\ \text{Volts}$$

Exemple 2 :



a) La capacité équivalente est :

$$C=C_1+C_2=5\times10^{-9}+10C=15\times10^{-9}\ \mathrm{F}$$

b) On a :

$$V_1=\frac{Q}{C_1},\quad V_2=\frac{Q}{C_2}$$

$$C_1 \parallel C_2 \Rightarrow V_1 = V_2 = V$$

Par conséquent :

$$Q_1 = C_1 V = 5\times10^{-9}\times1000 = 5\times10^{-6}\,C$$

$$Q_2 = C_2 V = 10\times10^{-9}\times1000 = 1\times10^{-5}\,C$$

Exemple 3 :

a) On a :

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow V = \left[\frac{2w}{C}\right]^{1/2} = \left[\frac{2\times50}{100\times10^{-6}}\right]^{1/2} = \left[10^{+6}\right]^{1/2} = 10^{+3}\,V$$

b) b) On a :

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow Q^2 = 2\times W\times C \Rightarrow Q = \sqrt{2\times W\times C} = \sqrt{2\times50\times100\times10^{-6}}$$

$$Q = \left(10^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{-1}C = 0.1C$$

Exemple 4 :

On a la relation de la capacité C :

$$C = \frac{\varepsilon s}{d}$$

a) Dans l'air $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}$F/m

$$C = 8.85\times10^{-12}\times\frac{\left(5\times10^{-2}\right)^2}{0.1\times10^{-3}} = 2.21\times10^{-10}\,F = 221\ pF$$

b) Pour $\varepsilon = 6\varepsilon_0$, on a :

$$\varepsilon = 6\varepsilon_0 \Rightarrow C' = 6C = 6\times221\times10^{-12}\,F = 1326\ pF$$

CHAPITRE 4

COURANT ET RéSISTANCE éLECTRIQUES

4.1. LE COURANT éLECTRIQUE

Si on met un conducteur en contact avec un autre, le deuxième sera à son tour électrisé par l'acquisition d'une certaine charge Q. Cela signifie que lors du contact des conducteurs, les charges se sont déplacées de l'un vers l'autre. Par conséquent, le courant peut être défini comme suit :

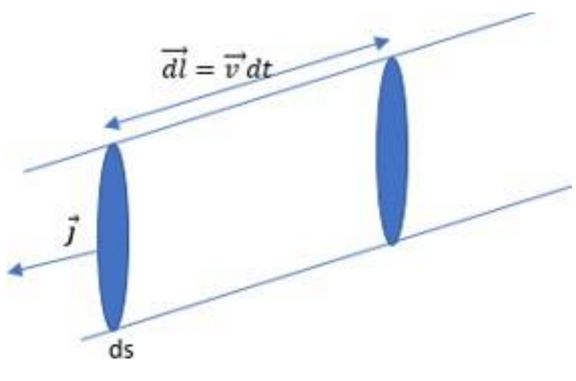
$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{4.1}$$

L'unité du courant électrique à l'échelle international est l'Ampère de symbole A. Dans le système international, l'Ampère est l'une des quatre unités fondamentales de telle sorte que :
1 C =1 A.s (Ampère fois seconde).

4. 2. LA DENSITé DE COURANT éLECTRIQUE

Considérons un fil conducteur de section S dans lequel se trouvent n porteurs de charge q animées d'une vitesse v. Pendant un intervalle de temps dt, ces charges parcourent une distance égale à vdt. Soit dS_n un élément infinitésimal de surface mesuré sur la section du fil et orienté dans une direction arbitraire. La quantité de charge électrique qui traverse cette surface pendant un intervalle de temps égale à dt est celle contenue dans le volume élémentaire dV associé. Son expression est donnée par :

$$dQ = nqdV = n\,q\,\vec{v}\,dt.\,d\vec{S_n} \tag{4.2}$$



Figures 4.1 : Vecteur de densité de courant

On voit alors apparaître un vecteur qui décrit les caractéristiques du milieu conducteur. Ce vecteur est appelé la densité de courant électrique, son unité est l'ampère par mètre carré (A m^{-2}).

$$\vec{j} = n\, q\, \vec{v} \tag{4.3}$$

Le courant I circulant dans le fil est relié à la densité par :

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{dt}\iint_S dQ = \frac{1}{dt}\iint_S \vec{j}.\vec{dS}\,dt \tag{4.4}$$

$$I = \iint_S \vec{j}.\vec{dS} \tag{4.5}$$

D'après ce qui précède, le courant dans un circuit est le flux à travers la section du fil de la densité de courant. Le sens du courant est donné par le sens du vecteur densité de courant.

4. 3. LOI D'OHM

Dans un conducteur électrique, la densité de courant est proportionnelle au champ électrostatique local. Cette relation peut être exprimée comme suit :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \tag{4.6}$$

Le coefficient de proportionnalité γ est appelé la conductivité du milieu. On définit également $e = 1/\gamma$, la résistivité du milieu. La conductivité est une grandeur locale positive dépendant uniquement des propriétés du matériau.

Exemple :

Le Cuivre possède une conductivité $\gamma_{CU} = 58\ 106\ (\Omega\ m)^{-1}$, tandis que celle du verre (isolant) vaut $\gamma_{verre} = 10^{-11}\ (\Omega\ m)^{-1}$ .L'équation (4.6) montre que les lignes de champ électrique sont également des lignes de courant indiquant le chemin suivi par les charges électriques. Par ailleurs, comme γ est positif, cela implique que le courant s'écoule dans la direction des potentiels décroissants.

Considérons maintenant une portion AB d'un conducteur parcouru par un courant I. L'existence du courant signifie qu'il y a une chute de potentiel entre A et B, par conséquent :

$$U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl} \tag{4.7}$$

Dans ce cas, la résistance de cet élément est donnée par :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E}.\vec{dl}}{\iint_S \gamma \vec{E}\vec{dS}} \tag{4.8}$$

L'unité de la résistance est l'Ohm de symbole Ω. Dans le cas simple d'un conducteur filiforme de section S et d'une longueur L où le champ électrostatique est uniforme, la relation entre la résistance du conducteur et sa résistivité est donnée par :

$$RR = \frac{EL}{\gamma ES} = e\frac{L}{S} \tag{4.9}$$

La résistivité e est exprimée en Ohm mètre de symbole Ωm.

4. 4. ASSOCIATIONS DE RéSISTANCES

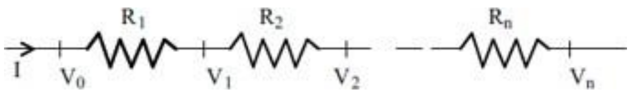
4. 4. 1. RéSISTANCES EN SéRIE

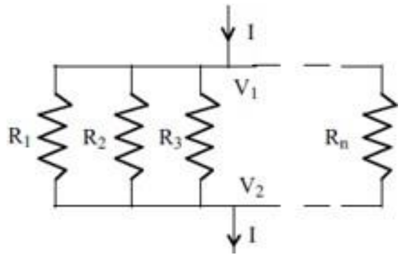
Soient n résistances R_i mises bout à bout dans un circuit et parcourues par un courant I. La tension aux bornes de la chaîne est la somme des tensions au bornes de chaque élément telle que :

$$U = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + ...(V_{n-1} - V_n) = R_1 I + R_2 I + ... R_n I \tag{4.10}$$

Elle est analogue à celle obtenue par une résistance unique dont la valeur est :

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i \tag{4.11}$$





(a) **(b)**

Figures 4.2 : Association de résistance,
(a)Résistance en en série, (b) résistance en parallèle

4.4.2. RéSISTANCES EN PARALLÈLE

Soient n résistances R_i mises en parallèle sous une tension $U = V_1 - V_2$ et parcourues par un courant I. Le courant se sépare dans les n branches en n courants tel que :

$$I_i = \frac{U}{R_i} \tag{4.12}$$

Dans chacune des n branches et en vertu de la conservation de la charge électrique, on obtient :

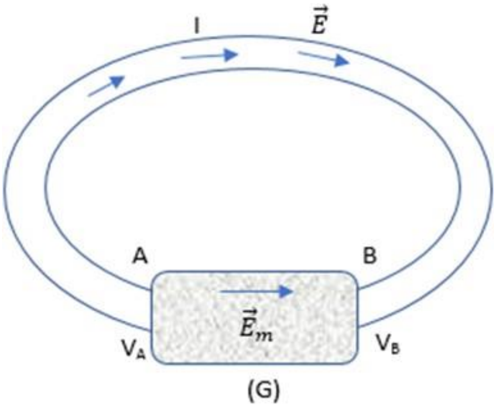
$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{U}{R_i} = \frac{U}{R} \tag{4.13}$$

C'est à dire que l'ensemble des n branches est analogue à une résistance équivalente exprimée par la relation suivante :

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \qquad (4.14)$$

4.5. RÔLE DU GÉNÉRATEUR : FORCE ÉLECTROMOTRICE

Soit un générateur (G), appliquant une d.d.p $V_A - V_B > 0$ aux bornes d'un conducteur AB. En régime stationnaire ou quasi stationnaire, on montre que les lignes de champ sont des courbes fermées.



Figures 4.3 : Fonctionnement du Générateur

Si le conducteur est fermé sur lui-même (voir figure 4. 3), on obtient :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{E}.\vec{dl} = 0 \qquad (4.15)$$

$$\oint \frac{\vec{J}}{\sigma}.\vec{dl} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = 0 \qquad (4.16)$$

La circulation du champ électrique $\vec{E}$ dans le générateur qui assure la d.d.p. $V_A - V_B$ est appelée force électromotrice e du générateur (f.e.m.).

On a :

$$e = \int_{AB} \vec{E}_m . \vec{dl} = V_A - V_B \qquad (4.17)$$

Le champ E_m peut avoir des origines chimiques comme dans une pile où dans un accumulateur ou des origines magnétiques (f.é.m. induite).

4.5.1. GéNéRATEUR EN CIRCUIT OUVERT :

La borne au potentiel le plus élevé constitue la borne positive et l'autre borne, la borne négative. On a simplement :

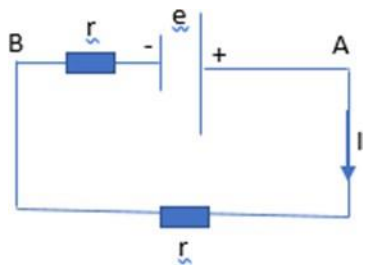
$$e = V_A - V_B \cdot 0 \qquad (4.18)$$

Figures 4.3 : Générateur en circuit ouvert

4.5.2. GéNéRATEUR EN CIRCUIT FERMé :

En se référant à la loi d'Ohm, on a :

$$e = V_A - V_B = (R + r)I \qquad (4.19)$$

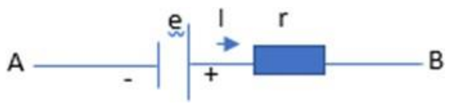


Figures 4.4 : Générateur en circuit fermé

Si le générateur a une résistance r non négligeable, celle-ci prélève sur e la chute de tension (ou chute ohmique) rI avant de délivrer $V_A - V_B$ aux bornes A et B. On a donc :

$$e - rI = V_A - V_B = RI \quad \Rightarrow \quad I = \frac{e}{R + r} \qquad (4.20)$$

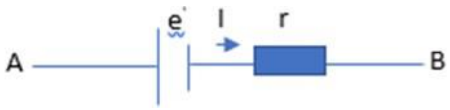
Portion de circuit comportant un générateur



$$V_A - V_B = e - rI \qquad (4.21)$$

4.5.3. CAS D'UN RéCEPTEUR

Dans un générateur, le courant sort du pôle positif et rentre par le pôle négatif. Dans le cas d'un récepteur, le courant suit le chemin inverse et sort par le pôle négatif. Dans ce cas, la f.é.m. qui est toujours positive, est appelée force contre-électromotrice. Dans un circuit complexe, comprenant des générateurs et des récepteurs, il peut arriver que le courant d'un générateur sorte par le pôle négatif. Dans ce cas, ce générateur se comporte comme un récepteur car il se charge.



$$V_A - V_B \ = \ é + rI \qquad (4.22)$$

4.6. LES LOIS DE KIRCHHOFF

4.6.1. PREMIÈRE LOI

En un nœud d'un circuit, la somme algébrique des courants est nulle car il y'a pas de cumul de charges électrique.

$$\sum_k I_k \ = \ 0 \qquad (4.23)$$

Cette loi nécessite d'adopter une convention de signe pour les courants. Par exemple, positifs s'ils arrivent au nœud et négatifs s'ils en partent.

4.6.2. DEUXIÈME LOI

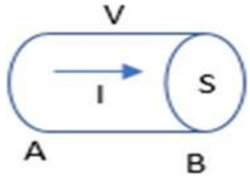
Pour une maille d'un circuit, la somme algébrique des f.é.m. est égale à la somme algébrique des d.d.p dans la maille.

$$\sum_k e_k \ - \ \sum_k R_k I_k \ = \ 0 \qquad (4.24)$$

Convention adoptée : on choisit un sens positif de courant a priori. Les courants qui vont dans ce sens sont pris positifs, les autres sont pris négatifs. Les f.é.m. sont considérées comme positives lorsque le courant sort par la borne (+) et négatives dans le cas contraire.

4.7. ASPECT ÉNERGÉTIQUE : LOI DE JOULE

Pour un conducteur AB de résistance R occupant le volume (V) et traversé par un courant I, on a :



$$V_A - V_B = \int_{AB} \vec{E}.\vec{dl} \qquad (4.31)$$

D'autre part :

$$I = \int_S \vec{j}.\overrightarrow{dS} \quad (4.32)$$

$$\Rightarrow \left(V_A - V_B\right) I = \int_{AB}^{B} \vec{j}.\vec{E}.\vec{dl}\ \overrightarrow{dS} \quad (4.33)$$

Ainsi quelle que soit la forme du conducteur, on retrouve l'expression bien connue de la loi de Joule :

$$P = \left(V_A - V_B\right) I = RI^2 \quad (4.34)$$

4.8. EXERCICES :

EXEMPLE 1 :

Un fil de plastique de 80 cm de longueur doit avoir une résistance de 0.1 Ω. Quel doit être son diamètre. On donne $\eta = 1.1 \times 10^{-7}\Omega.m$.

EXEMPLE 2 :

Un accumulateur de 12V est chargé par un courant de 20A pendant 1heure.

a) Quelle est la puissance nécessaire pour charger l'accumulateur à cette vitesse ?

b) Quelle est l'énergie fournie à l'accumulateur ?

EXEMPLE 3 :

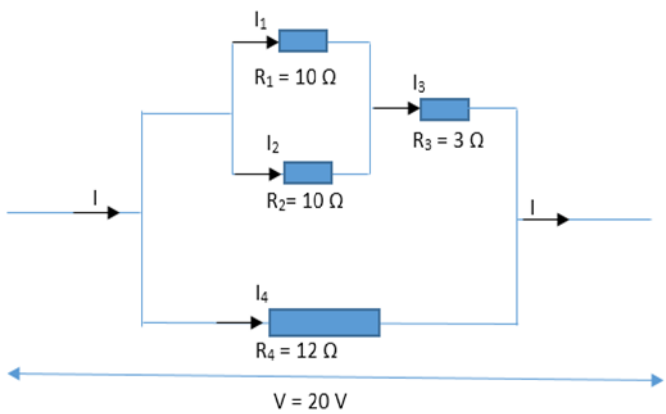
Quelles est la résistance équivalente à trois résistances de 5 Ω montées en série. Si une d.d.p de 60 V est appliquée aux bornes de l'ensemble, quel est le courant traversant chacune des résistances ?

EXEMPLE 4 :

Quelles est la résistance équivalente à trois résistances de 5 Ω montées en parallèle. Si une d.d.p de 60 V est appliquée aux bornes de l'ensemble, quel est le courant traversant chacune des résistances ?

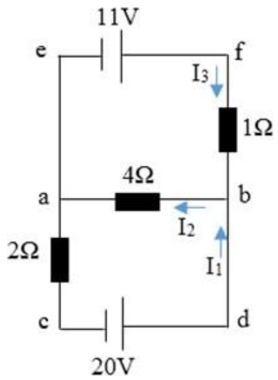
EXEMPLE 5 :

Une différence de potentiel de 20V est appliquée au circuit ci-dessous. Trouver le courant traversant chacune des résistances et le courant parcourant le circuit tout en entier.



EXEMPLE 6 :

On considéré le circuit électrique de la figure ci-dessous :



a) Déterminer les courants I_1, I_2 et I_3 circulant dans le circuit et préciser leurs sens réels de circulation.

b) En déduire la différence de potentiel entre les points b et f .

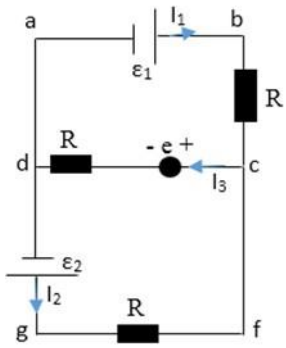
c) Quelle est la puissance P_f fournie par le générateur de force électromotrice 20 V?

d) Quelle est la puissance P_j dissipée par effet Joule dans le circuit ?

e) A quoi correspond la différence $P_f - P_j$?

EXEMPLE 7 :

On considère le circuit composé de deux générateurs réversibles de force électromotrice (f.e.m) ε_1 et ε_2 d'un récepteur de force contre électromotrice (f.c.e.m) e et de trois résistances R. on donne R = 100 Ω, ε_1 = 60 V et ε_2 = 20 V.



1) Ecrire la loi des nœuds au point C

2) Ecrire les équations des deux mailles (abcda) et (dgfcd) en respectant le sens donné des courants.

3) Déterminer les expressions des intensités de courant I_1 , I_2 et I_3 en fonction de R, ε_1 , ε_2 et e.

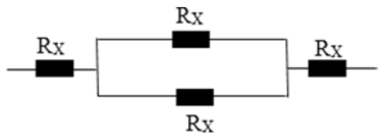
4) Donner la condition sur l'intensité I_3 pour que le récepteur fonctionne et en déduire la valeur limite de la f.c.e.m (e).

5) Calculer les valeurs des intensités I_1, I_2 et I_3 pour e = 10V.

6) D'après les valeurs de I_1 et I_2, quel est le rôle des deux générateurs réversibles dans ce circuit ? justifier votre réponse.

7) Calculer la puissance dissipée par effet Joule dans tout le circuit.

8) En réalité la résistance R utilisée dans le circuit est une association de quatre résistances R_X montées comme montré dans la figure ci- dessous que vaut la résistance R_X ?



4.9. CORRIGé

EXEMPLE 1 :

On a

$$R = \eta \frac{L}{s}, \quad s = \pi r^2 \tag{4.35}$$

$$R = \eta \frac{L}{\pi r^2} = 1 \Rightarrow r = \sqrt{\eta \frac{L}{\pi R}} \tag{4.36}$$

A.N :

$$r = \sqrt{\frac{1.1\times10^{-7} \times 80\times10^{-2}}{3.14\times0.1}} = 5.3\times10^{-4}\,m \Rightarrow D = 2r = 1.06mm \tag{4.37}$$

EXEMPLE 2 :

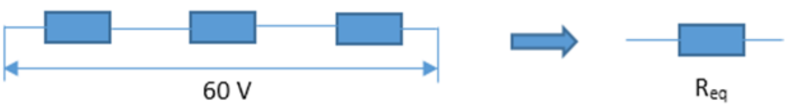
a) On a

$$P = V\,I = 12\times20 = 240\ w \tag{4.38}$$

b)

$$w = P\times t = 240\times3600 = 8.64\times10^5\ J \tag{4.39}$$

EXEMPLE 3 :



On a :

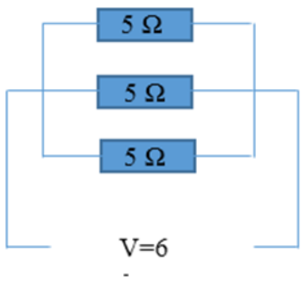
$$R_{eq} = 5 + 5 + 5 = 15\ \Omega \tag{4.40}$$

Le courant traversant l'ensemble est :

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{60}{15} = 4\Omega \tag{4.41}$$

Puisque les résistances sont branchées en série, ce courant traverse chacune d'entre elles.

EXEMPLE 4 :



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow R_{eq} = \frac{5}{3} = 1.67\Omega \tag{4.42}$$

$$I_1 = \frac{V}{R_1},\ I_2 = \frac{V}{R_2},\ I_3 = \frac{V}{R_3} \tag{4.43}$$

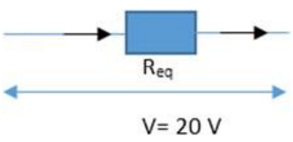
$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{60}{5} = 12\ A \tag{4.44}$$

EXEMPLE 5 :

On a :

$$I_4 = \frac{V}{R_4} = \frac{20}{12} = 1.67\ A \tag{4.45}$$

Le circuit est équivalent à :



Avec :

$$R_{eq} = \left(\left(R_1 // R_2\right) + R_3\right) // R_4 = 4.8\Omega \tag{4.46}$$

D'où :

$$R_{eq} = I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{20}{4.8} = 4.17A \tag{4.47}$$

On a :

$$I = I_3 + I_4 \Rightarrow I_3 = I - I_4 = 4.17 - 1.67 = 2.50\,A \tag{4.48}$$

Comme

$$R_1 = R_2 = 10\Omega \Rightarrow I_1 = I_2 \tag{4.49}$$

On a :

$$I_3 = I_1 + I_2 = 2I_1 \tag{4.50}$$

D'où :

$$I_1 = \frac{I_3}{2} = \frac{2.5}{2} = 1.25A \tag{4.51}$$

EXEMPLE 6:

a) Les courants I_1, I_2 et I_3 circulant dans le circuit :

Equation (nœud b)

$$I_2 = I_1 + I_3 \tag{4.52}$$

Equation (maille abdc)

$$2I_1 + 4I_2 = 20 \tag{4.53}$$

Equation (maille feab)

$$4I_2 + I_3 = 11 \tag{4.54}$$

De l'équation (4.53) et (4.54) on a :

$$I_1 = 10 - 2I_2\ ,\quad I_3 = 11 - 4I_2 \tag{4.55}$$

Remplaçant (4.55) dans (4.52), on obtient :

$$I_2 = 10 - 2I_2 + 11 - 4I_2 \Rightarrow 7I_2 = 21 \Rightarrow \begin{cases} I_2 = 3A \\ I_1 = 4A \\ I_3 = -1A \end{cases} \tag{4.56}$$

Par conséquent, I_3 doit être dans le sens contraire.

a) La différence de potentiel entre les points b et f :

$$V_b - V_f = 1 \times I_3 = 1V \tag{4.57}$$

b) La puissance P_f fournie par le générateur :

$$P_f = 20 \times I_1 = 20 \times 4 = 80\,w \tag{4.58}$$

c) La puissance P_j dissipée par effet Joule :

$$P_j = 1 \times I_3^2 + 4 \times I_2^2 + 2 \times I_1^2 = 69\,w \tag{4.59}$$

d) La différence $P_f - P_j$:

$$\begin{aligned} P_f - P_j &= 80 - 69 = 11w \\ &= 11 \times I_3 = 11w \end{aligned} \tag{4.60}$$

$P_f - P_j$ correspond à la puissance consommée par le récepteur de 11V.

EXEMPLE 7 :

1) Loi des nœuds au point C :

$$I_1 + I_2 = I_3 \tag{4.61}$$

2) Les équations des deux mailles (abcda) et (dgfcd) en respectant le sens donné des courants.

Maille (abcda) :

$$-\varepsilon_1 + RI_1 + RI_3 + e = 0 \tag{4.62}$$

Maille (dgfcd) :

$$-\varepsilon_2 + RI_2 + RI_3 + e = 0 \tag{4.63}$$

3) Les expressions des intensités de courant I_1 , I_2 et I_3 en fonction de R, ε_1 , ε_2 et e.

$$\begin{cases} 2RI_1 + RI_2 = \varepsilon_1 - e \\ RI_1 + 2RI_2 = \varepsilon_2 - e \end{cases} \tag{4.64}$$

Par conséquent :

$$I_1 = \frac{2R(\varepsilon_1 - e) - R(\varepsilon_2 - e)}{3R^2}, \quad I_2 = \frac{2R(\varepsilon_2 - e) - R(\varepsilon_1 - e)}{3R^2}, \quad I_3 = \frac{R(\varepsilon_1 - e) + R(\varepsilon_2 - e)}{3R^2}$$

La condition sur l'intensité I_3 pour que le récepteur fonctionne et en déduire la valeur limite de la f.c.e.m (e).

Pour que le récepteur fonctionne il faut que le courant I_3 soit positif :

$$I_3 > 0 \Rightarrow \frac{(\varepsilon_1 - e) + (\varepsilon_2 - e)}{3R} > 0 \Rightarrow \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2} > e \Rightarrow e < 40\,V \tag{4.65}$$

4) Les valeurs des intensités I_1 , I_2 et I_3 pour e = 10V :

$$I_1 = 0.3A, \qquad I_2 = -0.1A, \qquad I_3 = 0.2\,A$$

5)

a) I_1 est positif donc le sens du courant choisi est le sens réel. Par conséquent, le générateur de f.e.m ε_1 joue le rôle d'un générateur dans ce circuit.

b) I_2 est négatif donc le sens réel du courant est le sens contraire. Par conséquent, le générateur de f.e.m ε_2 joue le rôle d'un récepteur dans ce circuit.

1) La puissance dissipée par effet Joule :

$$P = R\left(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2\right) = 14\ W \tag{4.66}$$

2) Le calcul de R_X :

$$R_X = R_X + \frac{1}{\frac{1}{R_X} + \frac{1}{R_X}} + R_X \quad \Rightarrow \quad R_X = \frac{2}{5}R = 40\,\Omega \tag{4.67}$$

CHAPITRE 5

ÉLECTROCINéTIQUE
ÉTUDE DES RéGIMES VARIABLES

5.1. DéFINITION D'UN DIPÔLE ÉLECTROCINÉTIQUE

Un dipôle électrocinétique est un élément de circuit qui comporte deux bornes A et B par lesquelles entre ou sort le courant. On appelle la caractéristique du dipôle la courbe qui indique la variation de la tension u à ses bornes en fonction de l'intensité i qui le traverse, ou bien celui de i en fonction de u

5.2. CONVENTIONS DE SIGNE

On utilise, selon les cas, les deux conventions de la figure 5.1 pour le sens positif du courant et le sens de la tension.

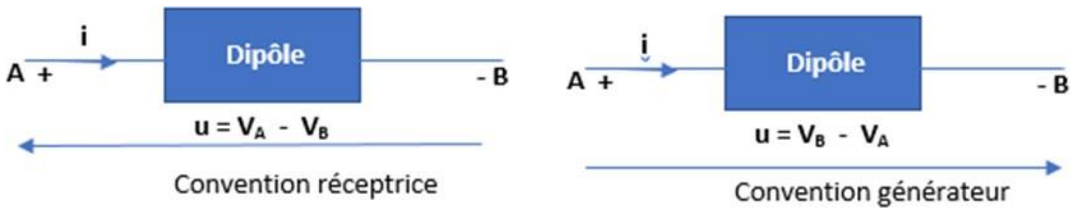


Figure 5.1

5.3. PUISSANCE éLECTRIQUE REçUE PAR UN DIPôLE

Le travail des forces électriques exercées sur les porteurs est calculé de la manière suivante :

$$dW = udq = u\,i\,dt \qquad (5.1)$$

Où dq = i dt est la charge totale qui a circulé dans le dipôle entre les instants t et t+dt.
La puissance reçue par le dipôle à l'instant t est donnée par :

$$P = ui \qquad (5.2)$$

5.4. CHARGE ET DéCHARGE D'UN CONDENSATEUR

Considérons un dipôle RC constitué par une résistance R et un condensateur de capacité C relié à un générateur de f.e.m. e. Initialement le condensateur n'est pas chargé : $q_0 = 0$.
On s'intéresse à déterminer la charge q du condensateur à tout instant.

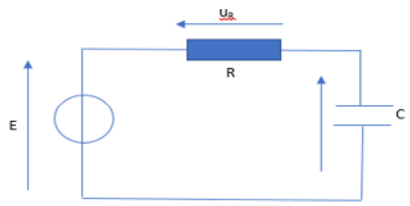


Figure 5.2

5.4.1. EXPRESSION DE LA CHARGE DU CONDENSATEUR

A l'instant t, d'après la loi des mailles on a :

$$U_R + U_C = E \tag{5.3}$$

-aux bornes de la résistance la ddp est :

$$U_R = R.i(t) = R\frac{dq}{dt} \tag{5.4}$$

- aux bornes du condensateur la ddp est:

$$U_C = \frac{q(t)}{C} \tag{5.5}$$

On obtient alors :

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E \tag{5.6}$$

L'équation (5.6) est une équation différentielle du $1^{èr}$ ordre. sa résolution se fait soit :

- Par la méthode de séparation de variable.
- Par la résolution de la solution générale

Les constantes d'intégration sont trouvées par l'utilisation des conditions aux limites.

- Une condition à t = 0.
- Une condition lorsque t tend vers l'infini.

A) RéSOLUTION PAR LA MéTHODE DE SéPARATION DE VARIABLES

L'équation (5.6) devient :

$$\frac{q}{C} - E = -R\frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow -dt = \frac{Rdq}{\frac{q}{C} - E} = \frac{RC\,dq}{q - EC} \tag{5.7}$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{q - EC} = -\frac{dt}{RC} = \frac{dt}{\tau} \tag{5.8}$$

Où τ est une grandeur possédant la dimension du temps, elle est appelée temps caractéristique du circuit.

$$\Rightarrow \int \frac{dq}{q - EC} = -\int \frac{dt}{\tau} \Rightarrow \ln(q - EC) = -\frac{t}{\tau} \tag{5.9}$$

$$\Rightarrow q - EC = A\,e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{5.10}$$

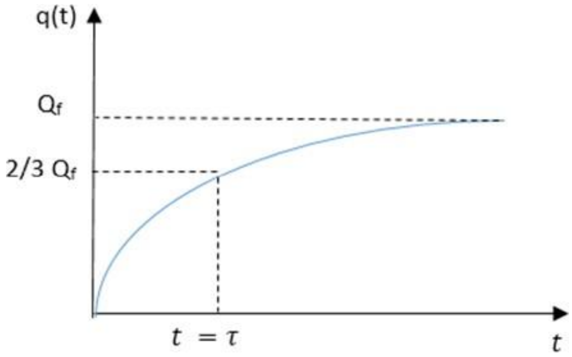
La constante A est déterminée à partir des conditions initiales.

$$t = 0 \Rightarrow \quad 0 - EC \; = \; A\, e^{-\frac{0}{\tau}} \; \Rightarrow \; A = -EC \qquad (5.11)$$

$$q(t) \; = EC\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \qquad (5.12)$$

On remarque qu'à :

$$t \to \infty \Rightarrow \; A\, e^{-\frac{t}{\tau}} \; \to \; 0 \; \Rightarrow \; Q_f \; = EC \qquad (5.13)$$



$$t = \tau \Rightarrow \quad Q(\tau) \; = EC\left(1 - e^{-1}\right) \; \approx \; Q_f \; = \tfrac{2}{3} EC \qquad (5.14)$$

5.4.2. INTENSITé DU COURANT ET TENSION AUX BORNES DU CONDENSATEUR

L'intensité du courant pendant la charge du condensateur est donnée comme suit:

$$i(t) \; = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R}\, e^{\frac{-t}{RC}} \qquad (5.15)$$

La tension aux bornes du condensateur est :

$$U_C \; = \frac{q(t)}{C} = E\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right) \qquad (5.16)$$

5.4.3. ENERGIE DU CONDENSATEUR

Initialement l'énergie du condensateur est nulle puisque sa charge est nulle. Quand il est chargé, la d.d.p entre ses bornes est E (f.e.m du générateur) et sa charge est q= E.C et son énergie est donnée par :

$$W_C \; = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C\, E^2 \qquad (5.17)$$

L'énergie fournie par le générateur est :

$$W_G = qE = C\,E^2 \tag{5.18}$$

Pendant sa charge, le condensateur n'emmagasine que la moitié de l'énergie fournie par le générateur, l'autre moitié est transformée en chaleur par effet Joule dans la résistance. Dans le circuit de charge.

5.5. ETUDE DE LA DéCHARGE D'UN CONDENSATEUR

Initialement le condensateur est complétement chargé. Sa charge initiale est donnée par Q_0 = E.C. Il se décharge dans la résistance.

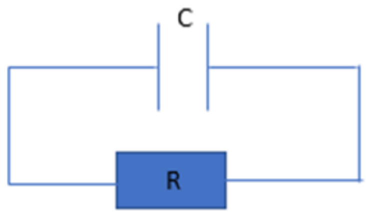


Figure 5.3

5.5. 1.EXPRESSION DE LA DéCHARGE DU CONDENSATEUR

Dans le circuit fermé de décharge, la somme des tensions est nulle. Dans ce cas on obtient :

$$R\,i(t) + \frac{q(t)}{C} = R.\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0 \tag{5.19}$$

L'équation (5.12) est une équation différentielle du 1èr ordre sans second membre. En tenant compte de la condition initiale $Q_0 = EC$. En appliquant la méthode de séparation de variable, on obtient l'équation différentielle suivante:

$$R\,i(t) + \frac{q(t)}{C} = 0 \;\Rightarrow\; R.\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dq}{q(t)} + \frac{R}{C}dt = 0 \tag{5.20}$$

$$\frac{dq}{q(t)} + \frac{R}{C}dt = 0 \;\Rightarrow\; \ln q(t) = -\frac{R}{C}t \;\Rightarrow\; q(t) = Ae^{-\frac{R}{C}t} \tag{5.21}$$

Prenant en compte la condition initiale suivante :

$$q(0) = EC \tag{5.22}$$

Par conséquent :

$$q(t) = ECe^{-\frac{R}{C}t} \tag{5.23}$$

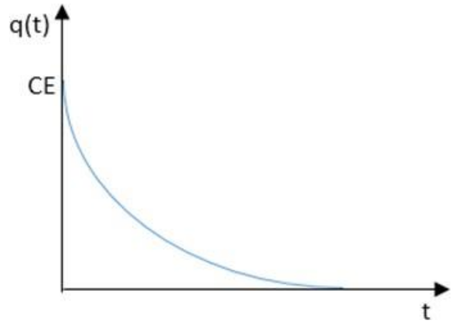


Figure 5.4

5.5.2. INTENSITé DU COURANT ET TENSION AUX BORNES DU CONDENSATEUR

L'intensité du courant pendant la décharge du condensateur est :

$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (5.24)$$

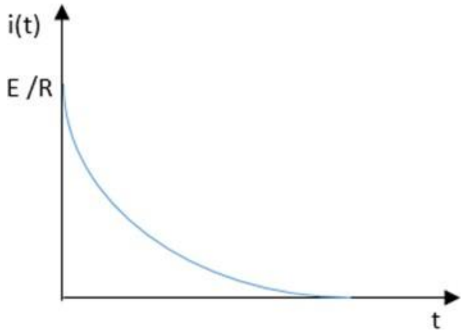


Figure 5.5

- La tension aux bornes du condensateur est :

$$U_C = \frac{q(t)}{C} = E\, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (5.25)$$

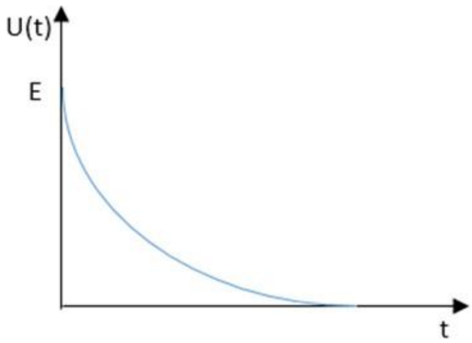


Figure 5.6

EXCERCICES

EXEMPLE 1 :

I- Les caractéristiques d'un condensateur sont les suivantes : C= 0,12 µF, épaisseur du diélectrique e = 0,2 mm ; permittivité relative de l'isolant : ε_r= 5 ; tension de service : Us = 100 V. ε_0 = 8,84 10-12 F/m. Calculer :

1- La surface des armatures.

2- La charge du condensateur soumis à la tension de service.

3- L'énergie emmagasinée dans ces conditions.

II-Le condensateur étant chargé, on l'isole, puis on l'associe en parallèle à un condensateur de capacité C1= 0,15 µF initialement déchargé. Calculer :

1- La charge totale de l'ensemble formé par les deux condensateurs.

2- La tension commune aux deux condensateurs en régime permanent.

3- L'énergie emmagasinée par le montage.

EXEMPLE 2 :

Le flash d'un appareil photo fonctionne grâce à la décharge d'un condensateur (C= 4 mF) chargé sous une tension de 4,5 V. La décharge complète du condensateur s'effectue en 0,1 ms

1-Quelle est l'énergie stockée par le condensateur ?

2-Quelle est la puissance mise en jeu au cours de la décharge ?

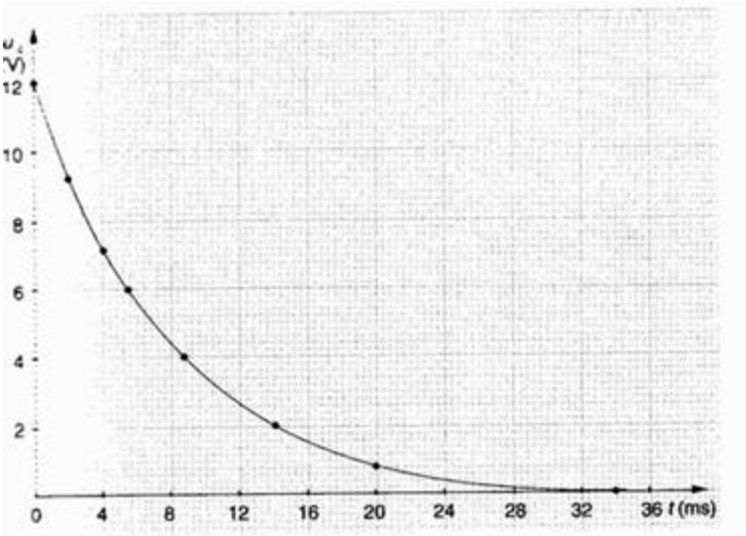
3-Si la durée de la décharge double, que devient cette puissance (autres données inchangées) ?

EXEMPLE 2 :

On donne la courbe de variation de la tension aux bornes d’un condensateur de capacité C = 5 µF au cours de sa décharge dans un condensateur ohmique.

1.Déterminer Uc et q à t = 6 ms.

2. Déterminer la constante de temps du dipôle (R, C). En déduire la valeur de la résistance du condensateur ohmique associé au condensateur.



CORRIGé

EXEMPLE 1 :

I-

1-L'expression de la capacité d'un condensateur plan est : $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r (S / e)$

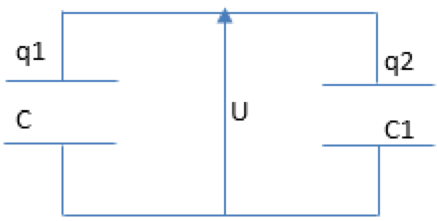
D'où : $S = C\ e / (\varepsilon_0 \varepsilon_r\ S)$

S = 0,12 10-6 × 0,2 10-3 / (8,84 10-12 × 5) = 0,543 m².

2-charge q = CUs = 0,12 10-6 ×100 = 0,12 10-4 C = 12 µC.

3-énergie stockée : E = ½ CUs² = 0,5 ×0,12 10-6 ×100² = 0,6 10-3 J = 0,6 mJ.

II-La charge se conservant, q se répartit en q1 et q2 entre les 2 condensateurs



$q = q_1 + q_2 = 12\ 10^{-6}$ C (1)

Exprimons la tension u de deux manières différentes :

$$u = \frac{q_1}{C} = \frac{q_2}{C_1}$$

Soit : $q1\ C_1 = q_2\ C$; $0,15\ 10^{-6}\ q1 = 0,12\ 10^{-6}\ q2$ ou encore : $q1=0,8\ q^2$.

Reportant dans (1) : 0,8 q2 + q2= 12 10-6

Soit : $q2 = 6,66\ 10^{-6}$ C et $q1 = 5,33\ 10^{-6}$ C

En régime permanent, la tension u = q1/C=5,33 10-6 /0,12 10-6 =5,33 /0,12 = 44,4 V.

Énergie stockée : $E = ½\ C\ u^2 + ½\ C1\ u^2 = ½(C+C1)\ u^2$

$E = 0,5\ (0,12\ 10\text{-}6 + 0,15\ 10\text{-}6)\ 44,4^2 = 2,66\ 10^{-4}$ J = 0,266 mJ.

Une partie de l'énergie initiale a été perdue lors de l'association Les courants transitoires échauffent le circuit ce qui entraine une perte d'énergie par effet joule.

EXEMPLE 2 :

1-L'énergie stockée par le condensateur est : $E=0,5\ CU^2$

$E=0,5\times4\ 10\text{-}3\times4,5^2= 40,5$ mJ

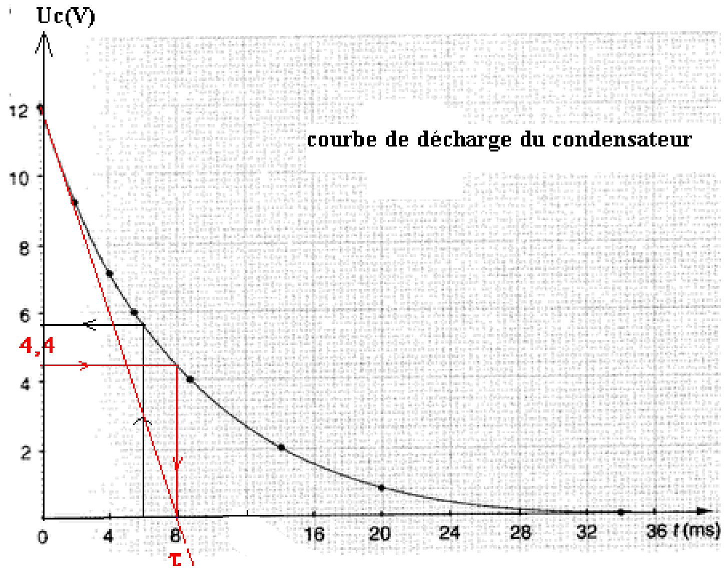
2-La puissance (watt)est l'énergie (joule) divisée par la durée (seconde)

P=40,5 10-3 / 10-4 = 405 W

3-L'énergie stockée ne change pas mais la durée double. La puissance est donc divisée par 2.

EXEMPLE 3 :

1- à t=6ms, Uc=5,8V (voir courbe ci-dessous) et $q=C.Uc = 5.10\text{-}6.5,\ 8 = 29.10^{-6}$ C.=29µC



2- Pour déterminer la constante de temps τ , il y a deux méthodes :

a- Méthode graphique : tracer la tangente à la courbe au point (0ms,12V). L'intersection de la tangente avec l'axe des t donne τ.

b- Méthode par le calcul : à t=τ, la tension ne vaut plus que 0,37Uc soit environ 0,37.12=4,4V. (voir graphe) Soit τ=8ms

$\tau=R.C$ et donc $R=\tau/C= 8.10^{-3}/5.10^{-6}=1,6.10^3=1,6k\Omega$

ANNEXCE 1

SUJETS D'EXAMENS AVEC SOLUTIONS

Électricité : Épreuve Finale
(Durée 1h30)

Rappel : Constante de Coulomb k = $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 NM^2C^{-2}$

Exercice 1 :

Un dipôle de moment dipolaire $\vec{P}$ est maintenu fixe au point O (voir figure 1-a). On définit un point M repéré par son vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{u_r}$ et on suppose que r est très grand devant les dimensions du dipôle. Le potentiel créé par ce dipôle au point M est donné par l'expression suivante :

$$V(r,\theta) = \frac{kp\cos\theta}{r^2}$$

1) Établir l'expression des composantes radiale E_r et transversale E_θ du champ électrique $\vec{E}$ créé par le dipôle au point M. On place successivement aux positions M_1 et M_2 un deuxième dipôle de moment dipolaire $\vec{P'}$ faisant un angle α avec la direction du dipôle (voir figure 1-b).

2) Pour α = 30°, calculer l'énergie potentielle du dipôle $\vec{P'}$, dans chacune des positions M_1 et M_2.

3) Représenter le dipôle $\vec{P'}$ dans sa position d'équilibre stable en M_1 puis en M_2. Justifier.

On donne : $|\vec{P'}| = 5.3\,10^{-31}$ C.m ; $|OM_1| = |OM_2| = 1$cm

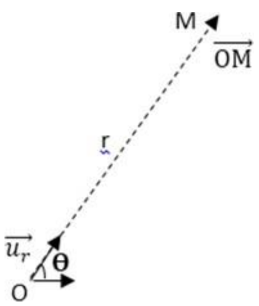


Figure 1-a

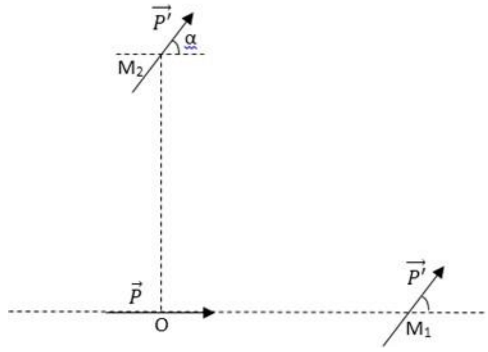


Figure 1-b

Exercice 2 :

Une sphère (S) de rayon R=2 cm et de centre O porte une charge totale $Q \geq 0$ distribuée uniformément en volume. On notera que tout point M de l'espace est repéré par le vecteur

$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\overrightarrow{u_r}$ et que le potentiel électrique créé par (S) est nul pour r tendant vers l'infini.

1) A) En utilisant le théorème de Gauss, établir l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ créé par (S) pour r> R.

B) En déduire l'expression du potentiel électrique V(r) pour cette région.

2) A) calculer le flux Φ_1 du champ électrique à travers la sphère, de centre O et de rayon R_1 = 30 cm, sachant que $E(R_1)$ = 4.103 V/m.

B) Quelle relation y a-t-il entre le flux Φ_1 et le flux Φ_2 du champ électrique à travers la sphère de centre O et de rayon R_2 (R_2 R_1) ?

C) En déduire le champ électrique $E(R_2)$ pour $R_2 = 2R_1$.

3) A) Calculer la charge totale Q de (S) ainsi que sa densité volumique de charge ρ.

B) Calculer les potentiels V(R1) et V(R2).

4) On abandonne, sans vitesse initiale, une charge ponctuelle q=1nC au point M1 tel que $OM_1 = R_1$. Déterminer l'énergie cinétique $Ec(M_2)$ de la charge q lorsqu'elle sera au point M_2 tel que $OM_2 = R_2$

Exercice 3 :

Le circuit de la figure 2 comprend 3 générateurs réversibles, de forces électromotrices respectives E_1, E_2 et E_1, un récepteur pur de force contre électromotrice e, des résistances identiques R, une résistance variable x, deux condensateurs de capacité C_1 et C_2 et un interrupteur K à 2 positions.

On prendra : R=90 Ω, E_1 = 200 V, E_2= 100V, E_3= 50V, e = 50 V, C_1= 10000 µF et C_2= 5000 µF.

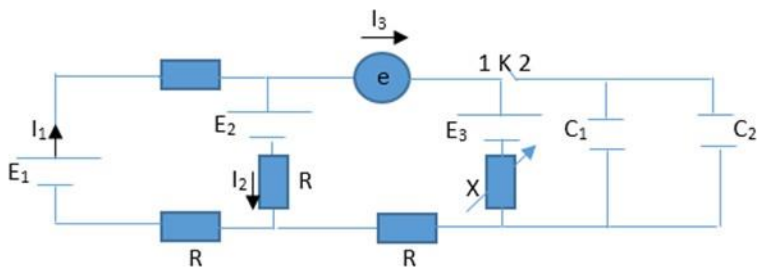


Figure 2

1) L'interrupteur K est mis sur la position 1. Les intensités des courants sont appelées I_1, I_2 et I_3 ; leurs sens sont indiqués sur la figure 2.

a) En appliquant les lois de Kirchhoff, établir le système d'équations permettant de calculer les courants I_1, I_2 et I_3.

b) Donner le courant I_3 en fonction de la résistance x.

c) Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance x en fonction de x.

d) Trouver x_0, la valeur de x pour laquelle cette puissance est maximale.

1) L'interrupteur k est mis sur la **position 2** à un instant qu'on prendra comme origine des temps. Les condensateurs sont initialement déchargés.

a) Calculer C, la capacité du condensateur équivalent aux deux condensateurs du circuit.

b) Établir l'équation différentielle régissant la charge, q(t), du condensateur équivalent en fonction de x et C.

c) En déduire la charge q(t) à un instant t quelconque.

d) Pour $x=x_0$, calculer le temps t_0 au bout duquel le condensateur équivalent atteint les 80% de sa charge finale.

e) Calculer les charges finales Q_1 et Q_2 des deux condensateurs.

CORRIGé

Exercice 1 :

1) L'expression des composantes radiale E_r et transversale E_θ du champ électrique $\vec{E}$ créé par le dipôle au point M est :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2kp\cos\theta}{r^3}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{kp\sin\theta}{r^3}$$

2) En M_1 :

$$\theta_1 = 0\,\text{rd}, \qquad \overrightarrow{E_1} = \begin{cases} E_{r_1} = \dfrac{2kp}{r^3} \\ E_{\theta_1} = 0 \end{cases}$$

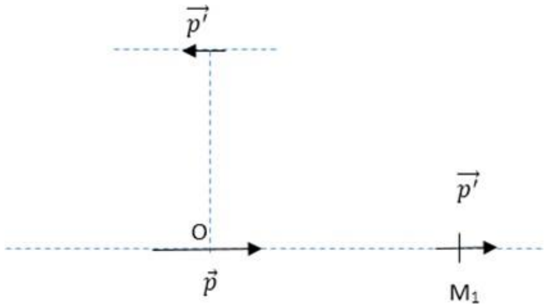
$$E_{P_1} = -\overrightarrow{P'}\cdot\overrightarrow{E_1} = -P'.E_1.\cos\alpha = -\frac{kpp'\sqrt{3}}{\left\|\overrightarrow{OM_1}\right\|^3}, \quad E_{P_1} = -1.52\ 10^{-45}\ \text{J}$$

En M_2 :

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2}\,\text{rd}, \qquad \overrightarrow{E_2} = \begin{cases} E_{r_2} = 0 \\ E_{\theta_2} = \dfrac{kp}{r^3} \end{cases}$$

$$E_{P_2} = -\overrightarrow{P'} \cdot \overrightarrow{E_2} = -P' .E_2 .\cos(\pi - \alpha) = P' .E_2 \cos\alpha = \frac{kpp'}{2\left\|\overrightarrow{OM_1}\right\|^3} \quad , \quad E_{P_2} = 0.76\ 10^{-45}\ \text{J}$$

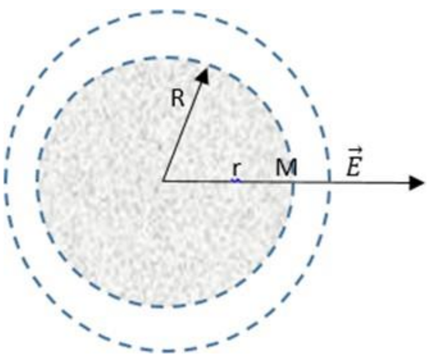
3) Représentation du dipôle $\overrightarrow{P'}$ dans sa position d'équilibre.



Justification : la position d'équilibre stable correspond à une énergie potentielle minimale. On trouve les valeurs $\alpha_1 = 0$ rd et $\alpha_2 = \pi$ rd.

Exercice 2 :

1) A) L'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$



- Le champ électrique est radial car la symétrie est sphérique,
- La surface de Gauss est une sphère de rayon $r \cdot R$.
- Flux du champ électrique à travers la surface de Gauss est :

$$\Phi = \iint_S \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \iint_S E.ds = E\iint_S dS = E\,4\,\pi\,r^2$$

- Charge enveloppée par la surface de Gauss : $q_{int} = Q$
- Théorème de Gauss :

$$\Phi = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$$

a) Expression du potentiel électrique V(r) :

Le champ étant radial :

$$dV = -E dr \Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

1) A) calculer le flux Φ_1 :

$$\Phi_1 = E(R_1)4\pi R_1^2 \Rightarrow \text{A.N. } \Phi_1 = 4.52\ 10^3\ \text{V.m}$$

B) Le flux de $\vec{E_r}$ est le même à travers toutes les sphères de centre O et de rayon r

$$(\text{pour } R < r < \infty) \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2$$

C)

$$E(R_1)4\pi R_1^2 = E(R_2)4\pi R_2^2 \Rightarrow \text{pour } R_2 = 2R_1,\ E(R_2) = \frac{E(R_1)}{4}$$

$$\Rightarrow \text{A.N. } E(R_2) = 10^3\ \text{V/m}$$

2) A) Calcul de la charge totale Q :

Application du théorème de Gauss :

$$Q = \Phi.\varepsilon_0 \Rightarrow \text{A.N } Q = 4\ .\ 10^{-8}\text{C}$$

La charge étant distribuée de maniéré uniforme, la densité volumique de charge est :

$$\text{cons tan te} \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \Rightarrow \text{A.N } \rho = 1.19\ 10^{-3}\ \text{C/m}$$

B) Calcul des potentiels $V(R_1)$ et $V(R_2)$:

$$V(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = 1200\ \text{V}$$

$$V(R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = 600\ \text{V}$$

3) La charge q est soumise à une force électrique telle que :

$$\vec{F} = q\overrightarrow{E_r}$$

Cette force est conservatrice.

$$E_C(M_2) - E_C(M_1) = E_P(M_2) - E_P(M_1)$$

$$E_C(M_2) = q[V(R_1) - V(R_2)] \Rightarrow \text{A.N. } E_C(M_2) = 6\ 10^{-7}\ \text{J}$$

Exercice 3 :

1) L'interrupteur K est mis sur **la position 1**

a) Système d'équations permettant de calculer les courants I_1, I_2 et I_3 :

Loi des nœuds :

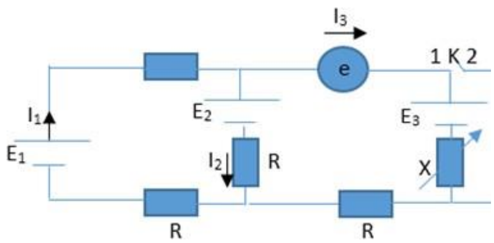
$$I_1 = I_2 + I_3$$

Loi des mailles :

$$2RI_1 + RI_2 = E_1 - E_2$$

$$-RI_2 + (R + x)I_3 = E_2 - E_3 - e$$

b) Le système d'équation devient :



$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ 180\,I_1 + 90\,I_2 = 100 \\ -90\,I_2 + (90 + x)\,I_3 = 0 \end{cases}$$

On élimine I_1 puis I_2 et on obtient :

$$I_3 = \frac{100}{360 + 3x}$$

c) Puissance dissipée par effet Joule dans la résistance x :

$$P_X = x\,I_3^2 = \frac{10^4\,x}{(360 + 3x)^2}$$

d) Valeur de x pour laquelle cette puissance est maximale

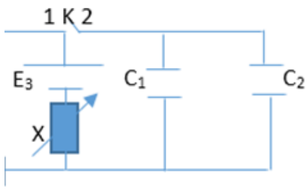
$$P_X \text{ est maximale } \Rightarrow \frac{dP_X}{dx} = 0$$

1) L'interrupteur K est mis sur la **position 2**

a) Capacité du condensateur équivalent :

$$C = C_1 + C_2 = 15000\ \mu F$$

b) Equation différentielle régissant la charge électrique q :



$$x\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_3$$

$$x\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 50$$

c) Charge q(t) à un instant t quelconque :

$$q = 50C\left(1 - e^{-\frac{t}{xC}}\right)$$

d) Calcul du temps t_0

$$q(t_0) = 50\,C\left(1 - e^{-\frac{t_0}{xC}}\right) \Rightarrow t_0 = x_0 C \ln 5 \Rightarrow t_0 = 2.89s$$

e) Calcul des charges finales Q_1 et Q_2

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C} = \frac{50\,C}{C} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 50\ C_1 = 5\ 10^{-2}\ C \\ Q_2 = 50\ C_2 = 2.5\ 10^{-2}\ C \end{cases}$$

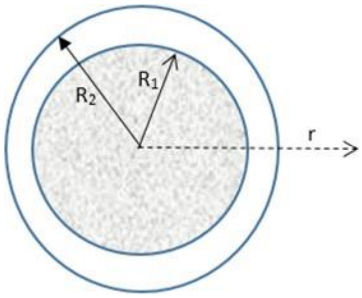
Usthb 14 Juin 2016
Faculté de Physique
Licence 1ére année MI

Rattrapage (1h30)

Exercice 1

Soient deux sphères concentriques de même centre O et de rayons respectifs $R_1=R$ et $R_2=5^{1/2}$ R.

- La sphère interne S_1 (O,R_1) porte une charge $Q_1 = Q$ 0répartie avec une densité de charge volumique (en C/m^3).
- La sphère externe S_2 (O,R_2) porte une charge $Q_2 = -Q_1$ répartie uniformément avec une densité de charge surfacique constante σ (en C/m^3).



1. Déterminer en fonction de R la charge totale Q1 portée par la sphère S1. En déduire la valeur de la densité surfacique σ de la sphère.

2. Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point de l'espace M tel que OM = r avec $0 < r < \infty$.Tracer le module du champ électrique E en fonction de r.

3. Déterminer le potentiel électrique en tout point de l'espace sachant qu'à l'infini, le potentiel est nul.

On donne : l'élément de volume pour une sphère est $dv = 4\pi r^2 dr$

Exercice 2 :

L'assemblage de résistances de la figure 1 est inséré dans le circuit de la figure 2 où K est un interrupteur.

1. Calculer en fonction de R la résistance équivalente R_{AB} vue entre les points A et B.
2. Le condensateur C étant entièrement déchargé, on ferme l'interrupteur K, à l'instant t = 0s.

a) Etablir l'équation différentielle régissant la variation de la charge du condensateur en fonction du temps.

b) Montrer que la solution de cette équation différentielle peut se mettre sous la forme :

$$q(t) = Q_f\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Préciser les expressions des grandeurs Q_f et τ.

c) Etablir, en fonction de C et E, l'expression de l'énergie Wj dissipée par effet joule dans la résistance R_{AB} durant la charge du condensateur.
d) Etablir, en fonction de C et E, l'expression de l'énergie Wc emmagasinée dans le condensateur C à l'instant t = τ.

1. Lorsque la charge du condensateur atteint sa charge finale, on ouvre l'interrupteur K.

a) Etablir l'expression de $q'(t)$ lors de la décharge du condensateur en précisant l'expression de la nouvelle constante de temps τ'.
b) En déduire l'expression du courant $i'(t)$ circulant dans le circuit.
c) Quelles sont les valeurs des grandeurs : τ, Q_f, W_j et τ'.

On donne : E= 12V, R=30 Ω , C=10^{-5} F.

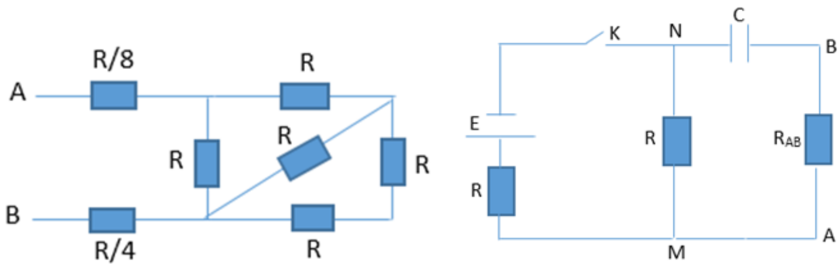


Figure 2

CORRECTION

Exercice 1 :

1-

$$Q_1 = \iiint \rho dv = 5\int_0^{R_1} \frac{4\pi r^2}{r} dr = 20\pi \int_0^{R_1} r dr = 10\pi R^2$$

$$Q_2 = -Q_1 = \iint \sigma ds = \sigma s = \sigma\, 4\pi R_2^2 = 20\pi\sigma R^2 = -10\ \pi R^2$$

$$\Rightarrow \sigma = -0.5 C/m^2$$

2. Calcul du champ :

$$\text{symétrie radiale} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} \ // \ \vec{u}_r$$

$$r \,{\scriptscriptstyle\blacksquare}\, R \qquad \iint \vec{E}_1\, \vec{ds} = \iint E_1 ds = E_1\, 4\pi r^2 = \iiint \rho \frac{dv}{\varepsilon_0}$$

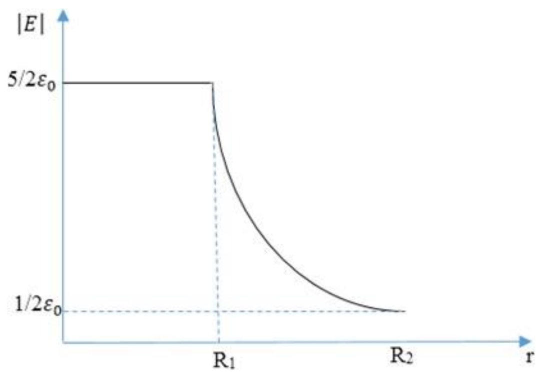
$$= \frac{5.4\pi}{\varepsilon_0} \int r dr = \frac{10\pi}{\varepsilon_0} r^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_1 = \frac{5\pi}{2\varepsilon_0} \vec{u}_r$$

$$R_1 \,{\scriptscriptstyle\blacksquare}\, r \,{\scriptscriptstyle\blacksquare}\, R_2 \qquad \iint \vec{E}_2\, \vec{ds} = \iint E_2 ds = E_2\, 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} = \frac{10\,\pi\, R^2}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{5R^2}{2\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

$$r \,{\scriptscriptstyle\blacksquare}\, R_2 \qquad \iint \vec{E}_3\, \vec{ds} = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow E_3 = 0$$

3.



4. Calcul du potentiel V :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \quad \Rightarrow V = -\int E\, dr$$

$$r \,{\scriptscriptstyle\blacksquare}\, R \qquad \Rightarrow V_1 = -\int E_1\, dr = -\frac{5r}{2\varepsilon_0} + C_1$$

$$R_1 \,{\scriptscriptstyle\blacksquare}\, r \,{\scriptscriptstyle\blacksquare}\, R_2 \qquad \Rightarrow V_2 = -\int E_2\, dr = -\frac{5R^2}{2\varepsilon_0 r} + C_2$$

$$r \,{\scriptscriptstyle\blacksquare}\, R_2 \qquad \Rightarrow V_3 = C_3$$

Calcul des constantes :

$$r \to \infty \quad \Rightarrow V = 0 \quad \Rightarrow C_3 = 0$$

Continuité de V donne :

$$V_2(R_2) = V_3(R_2) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{5R}{2\varepsilon_0\sqrt{5}} + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = -\frac{\sqrt{5}\, R}{2\varepsilon_0}$$

$$V_1(R_1) = V_2(R_1) \Rightarrow -\frac{5R}{2\varepsilon_0} + C_1 = \frac{5R}{2\varepsilon_0} - \frac{R\sqrt{5}}{2\varepsilon_0} \Rightarrow C_1 = \frac{R\left(10 - \sqrt{5}\right)}{2\varepsilon_0}$$

D'où :

$$V_1 = -\frac{5r}{2\varepsilon_0} + \frac{R\left(10 - \sqrt{5}\right)}{2\varepsilon_0}$$

$$V_2 = -\frac{5R^2}{2\varepsilon_0 r} - \frac{R\sqrt{5}}{2\varepsilon_0}$$

$$V_3 = 0$$

Exercices 2 :

1.

$$R_{AB} = R$$

2.

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ Ri_1 + R\,i_2 = E \\ Ri_3 - R\,i_2 + \frac{q}{C} = 0 \end{cases}$$

On élimine i_1 et i_2

$$\begin{cases} i_3 = \frac{dq}{dt} \\ \frac{dq}{dt} + \frac{2q}{3RC} = \frac{E}{3R} \\ \tau = \frac{3RC}{2} \end{cases}$$

2b) Solution de l'équation
différentielle :

Solution homogène :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = 0 \Rightarrow q(t) = Ae^{-t/\tau}$$

Solution particulière :

$$\frac{dq}{dt} = 0 \quad \Rightarrow q = \frac{EC}{2}$$

Solution générale :

$$t = 0s \quad \Rightarrow q(0) = 0 \quad \Rightarrow A = -\frac{EC}{2}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} q(t) = \dfrac{EC}{2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \\ Q_f = \dfrac{EC^2}{2} \end{cases}$$

2c)

$$w_J = \int_0^\infty R_{AB}\, i_3^2(t)\, dt = \int_0^\infty R\, i_3^2(t)\, dt$$

$$i_3 = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{3R} e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad w_J = \frac{E^2}{9R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}} dt$$

$$\Rightarrow w_J = \frac{CE^2}{12}$$

2d)

$$w_C = \frac{1}{2}\frac{q(\tau)}{C} \quad \text{or} \quad q(\tau) = \frac{2}{3} Q_f = \frac{CE}{3} \quad \Rightarrow w_C = \frac{CE^2}{18}$$

3) Décharge :

$$q'(0) = Q_f = \frac{CE}{2}$$

3a)

$$q'(0) = Q_f = \frac{CE}{2}$$

$$\frac{q'}{C} - 2Ri' = 0 \text{ où } i' = -\frac{dq'}{dt}$$

Equation différentielle :

$$\frac{q'}{2RC} + \frac{dq'}{dt} = 0 \text{ avec } \tau' = 2RC$$

Dont la solution est :

$$\begin{cases} q' = A\,e^{-t/\tau'} \\ q'(0) = \frac{CE}{2} = A \end{cases} \Rightarrow q'(t) = \frac{CE}{2} e^{-t/\tau'}$$

3b)

$$i'(t) = -\frac{dq'}{dt} = \frac{E}{4R} e^{-t/\tau'}$$

3C)

$$\tau = \frac{3RC}{2} = 0.45 \text{ ms}$$

$$Q_f = \frac{CE}{2} = 60 \ \mu C$$

$$\tau' = 2RC = 0.60 \text{ ms}$$

$$w_j = \frac{CE^2}{12} = 120 \ \mu J$$

Epreuve finale

(Vague 1, durée : 1h30)

Exercice 1 :

Dans un plan (XOY), on fixe deux charges ponctuelles q_A et q_B, respectivement aux points A (a, a) et B (-a, a) (figure 1). On donne : $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon 0} = 9 \times 10^9$(SI), $q_A = q_B = 10^{-10}$ C et a= 3 cm.

1. Déterminer en fonction de y, a et q le vecteur champ $\vec{E}(y)$ et le potentiel V(y) électriques créés par les charges q_A et q_B en un point M (0, y).

On fixe une troisième charge $q' = -q$ au point O (0,0).

2. a- Déduire la force appliquée à la charge q' et son énergie potentielle.

b-Calculer l'énergie interne du système des trois charges.

On libère la charge q' sans vitesse initiale. On suppose qu'elle n'est soumise qu'à la force électrique.

3. Calculer l'énergie totale de la charge q' au point O.
4. Calculer l'énergie potentielle de la charge q' aux points I (0, a) et J (0, 2a). Déduire son énergie cinétique en ces points.
5. Représenter sur le même graphe les courbes des énergies potentielle, totale et cinétique de la charge q' en fonction de y.
6. Déduire de ce graphique, une description qualitative du mouvement de la charge q'.

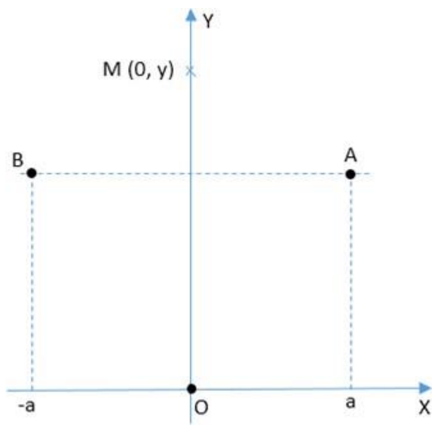


Figure 1

Exercice 2 :

Considérons l'association des condensateurs de la figure 2 soumis à une d.d.p $V_A - V_B = 5V$. On donne $C_1 = 1\mu F$, $C_2 = 3\mu F$, $C_3 = 3\mu F$ et $C_4 = 3\mu F$.

1. Calculer la capacité du condensateur équivalent entre les points A et B. sachant que la charge emmagasinée par C_1 et $Q_1 = 3\ 10^{-6}$ C.
2. Calculer la différence de potentiel pour chaque condensateur.
3. Déduire les charges des condensateurs C_2, C_3 et C_4.

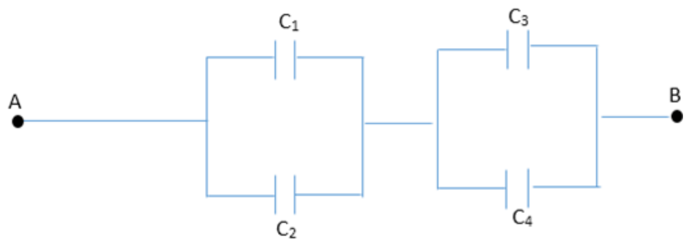


Figure 2

Exercice 3 :

Le circuit de la figure 3, comporte deux générateurs réversibles de fem E_1 de valeur inconnue et E_2=4V, de quatre résistances identiques de valeur R = 4 Ω, d'un condensateur initialement déchargé de capacité C=µF et de deux interrupteurs k_1 et k_2.

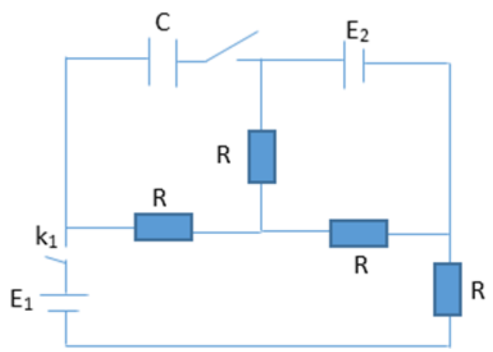


Figure 3

1) k_1 et k_2 ouverts ; calculer l'intensité de courant circulant dans le circuit.

2) Déterminer en fonction de E_1, les intensités des courants circulant dans les différentes résistances. Discuter selon la valeur de E_1 l'état de fonctionnement de chaque générateur.

3) Calculer leurs valeurs pour E_1 = 14V.

4) Calculer dans ce cas les puissances fournie, emmagasinée et dissipée dans le circuit. Vérifier le bilan énergétique.

On ouvre k1 et à t = 0s on ferme k_2.

5) Etablir l'équation différentielle régissant la charge q(t) du condensateur.

6) Déterminer l'expression de q(t). Préciser les valeurs de la charge finale du condensateur et de la constante de temps du circuit.

7) Calculer l'énergie emmagasinée dans le condensateur complétement chargé.

8)

CORRIGé

Exercice 1 :

1)

$$\vec{E}(M) = \frac{kq}{AM^2}\overrightarrow{u_A} + \frac{kq}{AM^2}\overrightarrow{u_B}, \; AM = BM = \sqrt{\left((y-a)^2 + a^2\right)}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{kq}{AM^2}\left(\overrightarrow{u_A} + \overrightarrow{u_B}\right), \; \vec{E}(y) = \frac{2kq(y-a)}{\left((y-a)^2 + a^2\right)^{3/2}}\vec{j}$$

$$V(M) = \frac{kq}{AM} + \frac{kq}{BM} = \frac{2kq}{AM}; \quad V(y) = \frac{2kq}{\left((y-a)^2 + a^2\right)^{1/2}}$$

2)

a-

$$\overrightarrow{Fe}(0) = q'\,\vec{E}_0 = -q\vec{E}(y=0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{kq^2}{a^2}\vec{j}, \quad \text{A.N}: \; Fe = 7.07\,.10^{-8}\text{ N}$$

$$E_P(O) = q'\,V_0 = -qV(y=0) = -\sqrt{2}\frac{kq^2}{a}, \quad \text{A.N}: \; E_P = -4.42\,.10^{-9}\text{ J}$$

b-

$$U = -\frac{kq^2}{OA} - \frac{kq^2}{OB} + \frac{kq^2}{AB} = -\sqrt{2}\frac{kq^2}{a} + \frac{kq^2}{2a} = \frac{kq^2}{a}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}\right), \quad \text{A.N}: \; U = -2.7\,.10^{-9}\text{ J}$$

3) La charge q' est libérée du point O sans vitesse initiale.

$$w\left(\overrightarrow{Fe}\right) = -\Delta E_P = \Delta E_C \Rightarrow E_T = E_C + E_P = Cte = E_T(O) = E_P(O) = -\sqrt{2}\frac{kq^2}{a}$$

4)

$$E_P(J) = q' \, V(y = 2a) = -\frac{kq^2}{a}\sqrt{2} = -4.24\ 10^{-9}\ \text{j}$$

$$E_P(I) = q' \, V(y = a) = -2\frac{kq^2}{a} = -6\ 10^{-9}\ \text{j}$$

$$E_C(M) = E_T - E_p(M) \quad \text{donc} : \ E_C(I) = \frac{kq^2\left(2-\sqrt{2}\right)}{a} = 1.76\ 10^{-9}\ \text{j}$$

6) Le mouvement de q' est possible lorsque $E_C = E_T - E_P > 0$ est vérifiée pour y compris entre 0 et 6cm. La charge q' fait des allers-retours entre les points O et J.

Exercice 2 :

1)

(C_1 // C_2) en série avec (C_3 // C_4), leur capacité équivalente, C, est telle que :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4} \quad \Rightarrow \quad C = 2.4\ \mu F$$

2)

La tension aux bornes de C_1 est V_{C1} :

$$V_{C1} = \frac{Q_1}{C_1} = 3V = V_{C2}; \ V_{C3} = V_{C4} = \left(V_A - V_B\right) - V_{C1} = 2V$$

3)

$$Q_2 = V_{C2}\, C_2 = 9\mu C; \ \ Q_3 = V_{C3}\, C_3 = 6\mu C; \ \ Q_4 = V_{C4}\, C_4 = 6\mu C$$

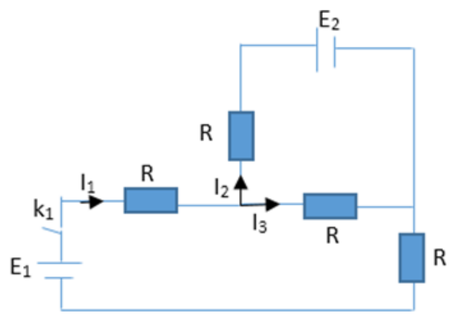
Exercice 3 :

1)

$$I = \frac{E_2}{2R} = 0.5\ A$$

2)

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ RI_2 - RI_3 = -E_2 \\ 2RI_1 + RI_3 = E_1 \end{cases} \Rightarrow I_3 = \frac{E_1 + 2E_2}{5R}, \ I_2 = \frac{E_1 - 2E_2}{5R}, \ I_1 = \frac{2E_1 - E_2}{5R}$$



3) E_2 fonctionne comme un récepteur

$$E_1 = 14\ V.\ I_1 = 1.2\ A,\ I_3 = 1.1\ A$$

4)

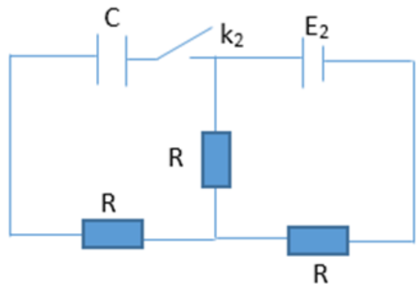
$$p_f = E_1 I_1 = 16.8 W\ ;\ p_u = E_2 I_2 = 0.4 W, p_J = 2RI_1^2 + RI_2^2 + RI_3^2 = 16.4 W$$

Bilan énergétique :

$$p_f = p_u + p_J$$

5) Régime transitoire :

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ \frac{q}{C} + Ri_2 - Ri_1 = 0 \\ Ri_1 + Ri = E_2 \end{cases}$$



$$i_2 = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{3R}{2}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \frac{E_2}{2}$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\frac{3R}{2}C} = \frac{E_2}{3R}$$

6)

$$q(t)=\frac{CE}{2}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right),\quad \tau=\frac{3RC}{2}=6\mu F,\quad q_f=\frac{CE}{2}=2\mu C$$

7)

$$W_C=\frac{q_f^2}{2C}=2.10^{-6}\ j$$

Epreuve finale de Physique II-Electricité

Exercice 1 : (8pts)

Quatre charges ponctuelles positives et identiques q sont placées aux points A(a,0,0), B(0,a,0),C(-a,0 ,0) et D(0,-a,0) dans le plan Oxy (figure 1). On donne a=10cm, q=+1nC et k=9.109 unités SI.

1-Déterminer l'expression du potentiel électrique V_M en un point M (0,0, z) en fonction de a, q et z.

2-Déduire le champ électrique $\overrightarrow{E_M}$ créé par ces quatre charges au point M.

3- On place une cinquième charge ponctuelle 2q au point M_0 (0,0, 2a). Déterminer et représenter le champ électrique $\overrightarrow{E_{M1}}$créé par les cinq charges, au point M_1 (0,0, a). Calculer son intensité.

4- On place au point M_1 un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{F} = 10^{-10}(+\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ cm.

a- Calculer l'énergie potentielle du dipôle électrique dans sa position initiale.

b-Représenter le dipôle dans sa position d'équilibre finale. Justifier cet état.

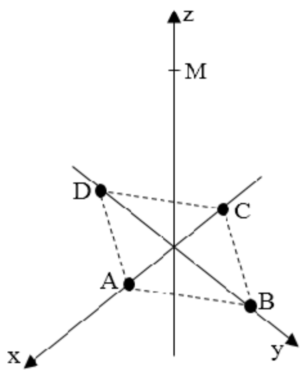
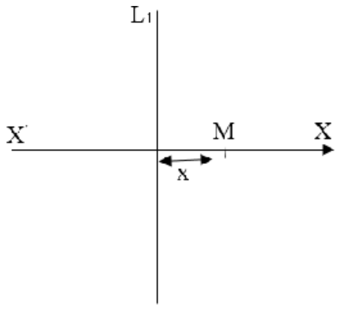


Figure 1

Exercice 2 :(4pts)

1. Soit un fil de longueur infini L_1 parallèle à l'axe oy et chargé uniformément (figure 2-a) ; sa densité linéaire …..Positive. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E_1}$ créé par la charge du fil en un point M sur l'axe Ox.

2. On place maintenant un second fil infini L_2 (figure 2-b), de densité linéaire ….. Constante et positive, à une distance d du premier fil. Déterminer le champ électrique total $\vec{F}$ en un point M, situé entre les deux fils sur l'axe Ox en fonction de d, x, λ_1 et λ_2. 3. A quelle position x le champ électrique $\vec{E}$ est –il nul ?



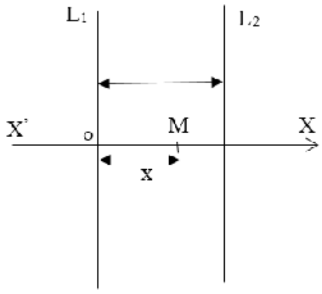


Figure 2-a **Figure 2-b**

Exercice 3 :(8pts)

Le circuit de la figure 3 est constitué d'un générateur de f.é.m. E, de cinq résistances identique R, d'un condensateur de capacité C et de deux interrupteurs K_1 et K_2.
On donne : E=12Volts, R=300Ω, C= 0 .1 μF
<u>I. Le condensateur étant initialement déchargé, on ouvre K_2 et on ferme K_1.</u>
1. Donner un schéma simplifié du circuit.
2. En appliquant les lois de Kirchhoff, montrer que l'équation différentielle qui régit la charge q(t) est donnée par :

$$\frac{5R}{3}\frac{dq}{dt}+\frac{q}{c}=\frac{E}{c}$$

3. Trouver l'expression de la charge q(t) et calculer la constante de temps τ du circuit.
4. Calculer l'intensité du courant circulant entre les points N et M lorsque le condensateur est complétement chargé.
<u>II. Le condensateur C étant entièrement chargé, on ouvre K_1 et on ferme simultanément K_2.</u>
5. Donner un schéma simplifié du circuit correspondant et déterminer la résistance équivalente $R_{AB.}$
6. Etablir la nouvelle équation différentielle qui régit la variation de la charge q(t) du condensateur.
7. Déduire l'expression de q(t) et la constante de temps τ' du circuit.
8. Calculerτ'.

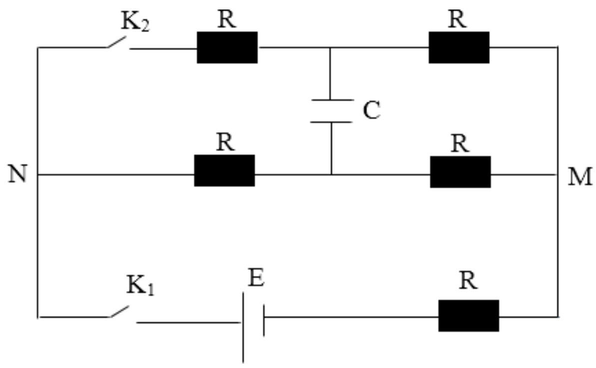


Figure 3

Licence L1(MI)

Corrigé de l'épreuve finale de Physique II-Electricité

Exercice 1 : (8 Pts)

1- $V_M = V_A + V_B + V_C + V_D$

Les quatre charges sont identiques équidistantes par rapport à M :

$$AM = BM = CM = DM = r, \quad \text{donc } VA = VB = VC = VD = kq/r$$

$$r = \sqrt{a^2 + z^2} \quad \Rightarrow \quad V_M = \frac{4kq}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

2-

$$dV_M = -\overrightarrow{E_M}\,.\,\overrightarrow{dr} = -E_M(z)\,.dz \quad \Rightarrow \quad E_M(z) = -\frac{dV_M}{dz} = \frac{4kqz}{\left(a^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

3-

$$\vec{E}_{M1} = \vec{E}_M(a) + \vec{E}_{2q}(2a)$$

$$E_{M1} = E_M(a) - E_{2q}(2a) = \frac{2kq}{\sqrt{2}a^2} - \frac{2kq}{a^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\frac{2kq}{a^2} \Rightarrow E_{M1} = -527{,}21\ V/m$$

4-

a.

$$w_{init} = -\vec{E}_{M1}.\vec{P} = -\left(E_{M1}.\vec{k}\right).\left(10^{-10}\left(+\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)\right)$$

$$w_{init} = 10^{-10}\,E_{M1} = 5{,}27.10^{-8}\ J$$

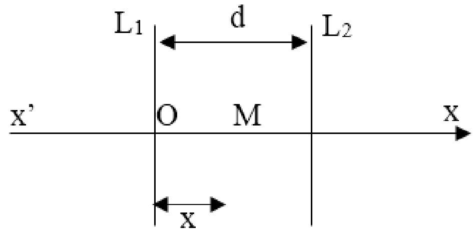
b. position d'équilibre finale $\Rightarrow$ l'énergie est minimale.

$$W = -\left|\vec{E}_{M1}\right|.\left|\vec{P}\right|\cos\theta \quad \left(\Rightarrow W_{min} \Leftrightarrow \cos\theta = 1\right) \Rightarrow \vec{E}_{M1} \ // \ \vec{P}$$ et dans le même sens

Exercice 2 : (4 Pts)

La surface de Gauss est un cylindre de rayon x et de longueur l'infinie.

$$\Phi = \oiint \vec{E}_1.\vec{ds}$$



$\vec{E}$ est uniforme et radial $\Rightarrow \quad \Phi = E_1 S_G = E_1\left(2\pi x l\right)$

$$\text{T.G} \Rightarrow \Phi = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{\sum q_{int}}{2\pi\varepsilon_0 x l}$$

$$\sum q_{int} = \lambda_1 l \Rightarrow \overrightarrow{E_1} = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{i}$$

2. $\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$

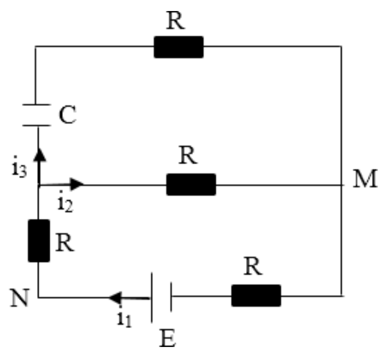
$$\begin{cases} \overrightarrow{E_1} = \dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{i} \\ \overrightarrow{E_2} = -\dfrac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 (d-x)}\vec{i} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \left(\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 x} - \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 (d-x)}\right)\vec{i}$$

3. $E = 0 \Rightarrow \dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 x} = \dfrac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 (d-x)} \Rightarrow x = \dfrac{d\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

Exercice 3 : (8 points)

I. Le condensateur étant initialement déchargé, on ouvre K_2 et on ferme K_1

1. Schéma simplifié du circuit :



2. i_3 courant de charge $i_3 = dq/dt$

$i_1 = i_2 + i_3 \qquad \Rightarrow i_2 = i_1 - i_3$

$E = 2Ri_1 + Ri_2 \qquad \Rightarrow i_1 = \dfrac{E + Ri_3}{3R}$

$E = 2Ri_1 + V_C + Ri_3 \Rightarrow \dfrac{E}{3} = \dfrac{5}{3}R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C}$

$$\Rightarrow \frac{5}{3}R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \frac{E}{3}$$

3.
$$\frac{5}{3}RC\frac{dq}{dt} = \frac{EC}{3} - q \Rightarrow \int \frac{dq}{\left(\frac{EC}{3} - q\right)} = \int \frac{dt}{\frac{5EC}{3}}$$

$$\ln\left(\frac{EC}{3} - q\right) = -\frac{t}{\frac{5EC}{3}} + Cte \Rightarrow q(t) = \frac{EC}{3} - Ae^{-\frac{t}{\frac{5EC}{3}}}$$

$$t = 0 \rightarrow q(0) = 0 \Rightarrow A = \frac{EC}{3} \Rightarrow q(t) = \frac{EC}{3}\left(1 - e^{-\frac{t}{\frac{5EC}{3}}}\right)$$

La constante de temps du circuit :

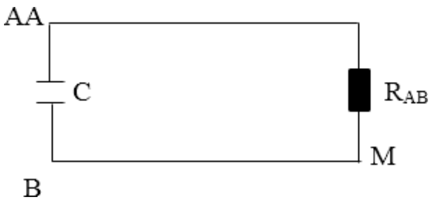
$$\tau = \frac{5}{3}RC \Rightarrow \tau = 5.10^{-5}s$$

4. condensateur est complétement chargé $\Rightarrow i_3 = 0$ et $i_1 = i_2 = i$

$$E = 3Ri \Rightarrow i = \frac{E}{3R} \qquad i = 0.0133A$$

<u>II. Le condensateur C étant entièrement chargé, on ouvre K_1 et on ferme simultanément K_2</u>

5. Schéma simplifié du circuit $R_{AB}=R$



6.

$$\begin{cases} V_C = V_R \\ i = -\dfrac{dq}{dt} \end{cases} \Rightarrow R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

7. $q(t) = q_0 e^{-t/\tau'}$ avec $q_0 = \frac{1}{3}EC$ et $\tau' = RC$

8. $\tau' = 3.10^{-5}$ s

ANNEXCE 2

Formules mathématique

Formule quadratique et développement limité

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots \left(x^2 < 1\right)$$

$$ax^2 + bx + C = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Produit scalaire et vectorielle

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y = a \cdot b \cos\theta$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} + \left(a_x b_z - a_z b_x\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin\theta$$

Intégrale et dérivée

$$(\sin x)' = \cos x \Rightarrow \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\left(e^x\right)' = e^x \Rightarrow \int e^x \, dx = e^x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$$

$$\int \frac{x\,dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^{1/2}}$$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} = -\frac{x}{a^2\left(x^2 + a^2\right)^{1/2}}$$

RÈGLE DE CRAMER

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

ECRITURE MATRICIELLE ET SOLUTION D'UN SYSTÈME D'éQUATIONS LINéAIRES

Soit le système d'équations linéaires à trois dimensions :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= d_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= d_3 \end{aligned}$$

Considérons les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

On peut écrire le système précédent comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

La solution du système précédent est donnée comme suit :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

ANNEXCE 3

Dimensions et unités des grandeurs physiques

Grandeurs fondamentales du système M.K.S.A
Longueur l [L] mètre, Masse m [M] kilogramme.
Temps t [T] seconde, Intensité I [I] ampère.

Grandeurs délivrées utilisées

Grandeurs	Symbole	loi	Dimensions	Unité
Vitesse	υ	$\upsilon = l/t$	$L.T^{-1}$	m /s
accélération	a	a = v/t	$L.T^{-2}$	m /s^2
Force	F	F = ma	$M.L.t^{-2}$	Newton : N
Travail	W	W = F.l	$M.L^2.t^{-2}$	Joule : J
Puissance	P	P = W/t	$M.L^2.t^{-3}$	Watt : W
Charge électrique.	q	q = I.t	t.A	Coulomb : C
Potentiel	V	P = V.I	$M.L^2.t^{-3}A^{-1}$	Volt : V
Champ électrique	E	V = E.l	$M.L^1.t^{-3}A^{-1}$	Volt/m :V/m
Capacité	C	q = CV	$M^{-1}.L^{-2}.t^4 A^2$	Farad : F

Constantes physiques

Grandeur	Symbole	Valeur
Vitesse de lumière	c	2.988×10^8 m/s
Constante de gravité	G	6.673×10^{-11} $N.m^2/kg^2$
Nombre d'Avogadro	N_A	6.022×10^{23} mol^{-1}
Constante universelle des gaz parfaits	R	8.314 $J.mol^{-1}.K^{-1}$
Masse d'électron	me	9.109×10^{-31} Kg
Masse de proton	mp	1.673×10^{-27} Kg
Masse de Neutron	mn	1.675×10^{-27} Kg

Références

1. Jonathan Ferreira, Cours d'Electrostatique-Electrocinétique, Université Joseph Fourier, DEUG SMa, Année universitaire 2001-2002

2. Emile Amzallag, Joseph Cipriani, Jocel Yne Ben Aim, Norbert Piccioli, La physique en fac, électrostatique et électrocinétique, exercices et cours corrigés, l'université Pierre et Marie Curie (Paris 6) (2006).

3. J.L.Caubarrere, J.Fourny, H.Ladjouze, Eléctricité et ondes, cours, Exercices et travaux pratiques, USTHB, ENS, Office des publications universitaires (2001).

4. Eugene Hecht, circuits électriques et électromagnétisme, série Schaum, université d'Adelphi (1985).

5. Marcelo Alonso, Physique générale 2, Champs et ondes, Département des affaires scientifiques, Organisation des états américains (1967).

6. Jearl Walker, Fundamentals of Physics, Wiley 1807-2007 knowledge for generations.