Chapitre 2

Fonctions de plusieurs variables
Limites & Continuité

5 mars 2024

Table des matières

Dans tout ce chapitre, n, p et q sont trois entiers naturels non nuls.

1 Généralités

1.1 Notion de fonctions de plusieurs variables

Considérons une fonction f définie sur une partie non vide D de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. A tout point $x = (x_1, ..., x_n) \in D$, on associe un unique point $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^p$. Le $p-$uplet $f(x)$ sera parfois noté

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_p(x))$$

où pour tout $j = 1, ..., p$, f_j est une fonction de D dans $\mathbb{R}$ appelée la $j^{\text{ième}}$ **fonction composante (ou coordonnée)** de f. Cela se note

$$\begin{array}{cccc} f: & D \subset \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^p \\ & x = (x_1, ..., x_n) & \mapsto (f_1(x), ..., f_p(x)) \end{array}$$

D est le **domaine** de f, et l'**image** de f est l'ensemble des valeurs prises par f, soit

$$\{f(x) \; ; \; x \in D\}.$$

Remarque 1 Lorsqu'il s'agit d'une fonction de 2 ou 3 variables, il est d'usage de noter x et y (et z) au lieu de x_1 et x_2 (et x_3).

Exemple 1 L'aire d'un rectangle de longueur x et de largeur y est donné par la relation $A = xy$. Ceci définit la fonction

$$\begin{array}{rll} f: & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto xy \end{array}$$

Exemple 2 Le périmètre d'un rectangle de longueur x et de largeur y est donné par la relation $P = 2(x+y)$. Ceci définit la fonction

$$\begin{array}{rll} f: & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto 2(x+y) \end{array}$$

Exemple 3 La température T en un point de la surface de la Terre dépend de la longitude x et de la latitude y de ce point, ainsi que de l'instant t. On peut donc considérer T comme une fonction de trois variables x, y et t ou comme une fonction du triplet (x, y, t). On exprime cette dépendance fonctionnelle en écrivant $T = f(x, y, t)$.

Exemple 4 La fonction

$$\begin{array}{rll} f: & \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto \left(\dfrac{y^3 - x\cos(x+y)}{z^2}, \ln(x) + \dfrac{\pi}{2} - z \right) \end{array}$$

est une fonction de trois variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, dont le domaine de définition est $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Les fonctions composantes de f sont les fonctions :

$$\begin{array}{lll} f_1 & : & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto \dfrac{y^3 - x\cos(x+y)}{z^2}, \\ f_2 & : & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto \ln(x) + \dfrac{\pi}{2} - z. \end{array}$$

Exemple 5 Supposons qu'une entreprise utilise n ingrédients différents pour fabriquer un produit alimentaire, que c_i est le coût unitaire du i-ième ingrédient, et qu'il faut x_i unités de ce i-ième ingrédient. Le coût total C des ingrédients est alors une fonction des n variables $x_1, ..., x_n$:

$$C = f(x_1, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

La fonction f est une fonction à valeurs réelles dont le domaine est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 6 Calculons $f(3,2)$ et trouvons le domaine de la fonction suivante

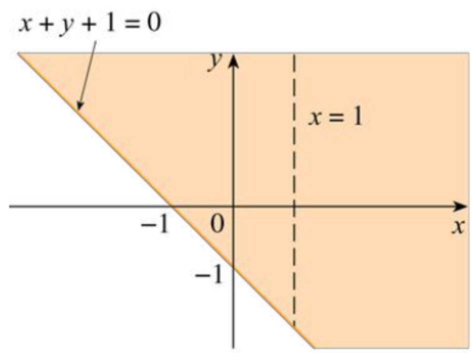
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}.$$

On a $f(3,2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

L'expression de f a un sens si le dénominateur n'est pas nul et si le radicande n'est pas négatif. Le domaine de f est donc

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x+y+1 \geq 0 \text{ et } x \neq 1\right\}.$$

L'inégalité $x+y+1 \geq 0$, ou encore $y \geq -x-1$, décrit les points situés sur la droite $y = -x-1$ ou au-dessus de cette droite, tandis que $x \neq 1$ signifie que les points sur la droite $x = 1$ doivent être exclus du domaine (voir la figure ci-dessous).



Le domaine de définition D de f est la partie colorée privée de la droite en pointillés $x = 1$.

1.2 Graphe d'une fonction de plusieurs variables

Définition 1 (Graphe d'une fonction de plusieurs variables) *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction. On appelle graphe de f l'ensemble*

$$G = \{(x, f(x)) \ ; \ x \in D\} = \{(x,y) \ ; \ x \in D \text{ et } y = f(x)\}.$$

C'est un sous-ensemble de $D \times \mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^{n+p}$.

- Pour $n = p = 1$ (fonction scalaire d'une variable réelle), G est l'ensemble

  $$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \in D \text{ et } y = f(x)\right\}$$

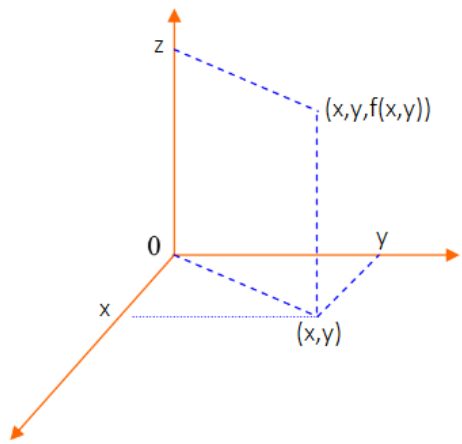
  qui se représente par une courbe dans le plan $\mathbb{R}^2$.

  Le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ est une courbe dans $\mathbb{R}^2$, une parabole.

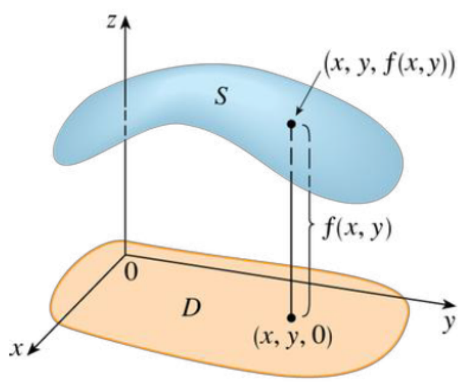
– Pour $n = 2$ et $p = 1$ (fonction scalaire de deux variables réelles), G est l'ensemble

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ (x, y) \in D \text{ et } z = f(x, y)\} .$$

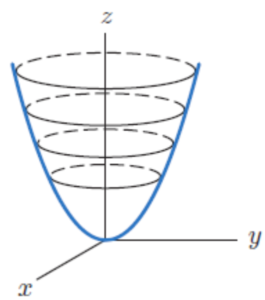
A chaque point $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ correspond un seul point (x, y, z) sur la surface G. Voici comment on place les points dans un repère à trois dimensions.



A cet effet, G se représente par une surface S dans $\mathbb{R}^3$ déssinée au dessus du domaine D :



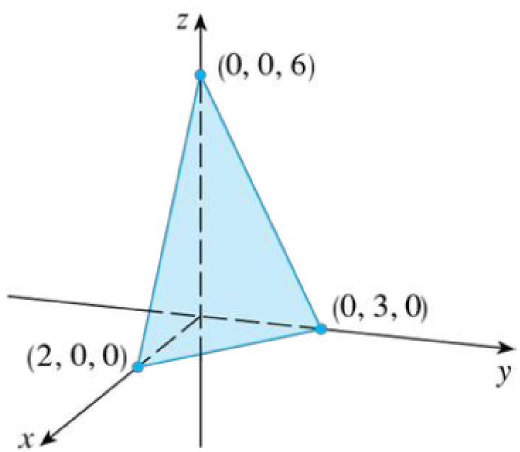
Le graphe de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est une surface dans $\mathbb{R}^3$, un paraboloïde :



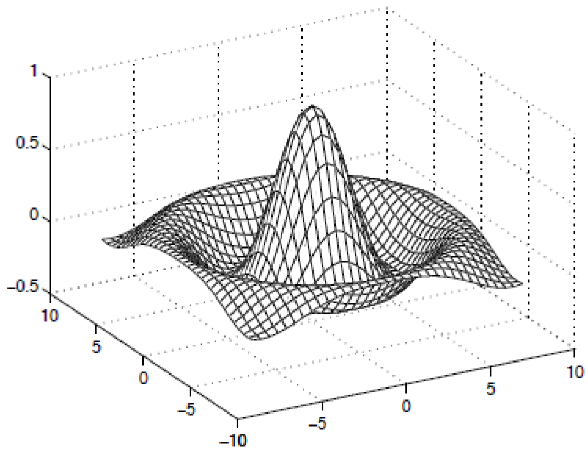
Graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Exemple 7 Traçons le graphe de la fonction $f : (x, y) \mapsto 6 - 3x - 2y$.

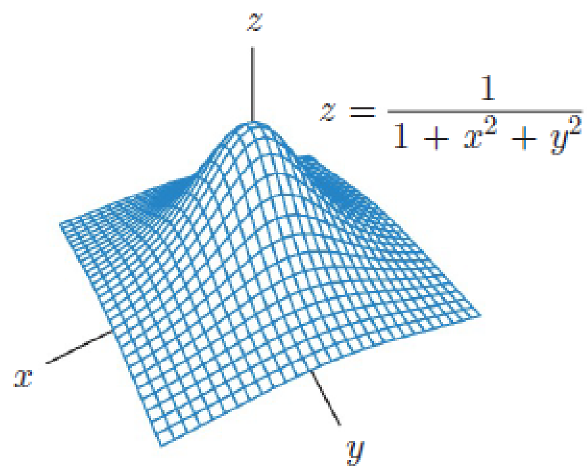
L'équation du graphe de f est $z = 6 - 3x - 2y$ ou $3x + 2y + z = 6$, qui est celle d'un plan. Pour représenter graphiquement ce plan, on doit d'abord trouver ses intersections avec les axes de coordonnées. En posant $y = z = 0$ dans l'équation, on obtient l'intersection $x = 2$ avec l'axe des x. De même, l'intersection avec l'axe des y est 3, et l'intersection avec l'axe des z est 6. Cela nous permet de tracer la partie du graphe située dans le premier octant (voir la figure ci-dessous).

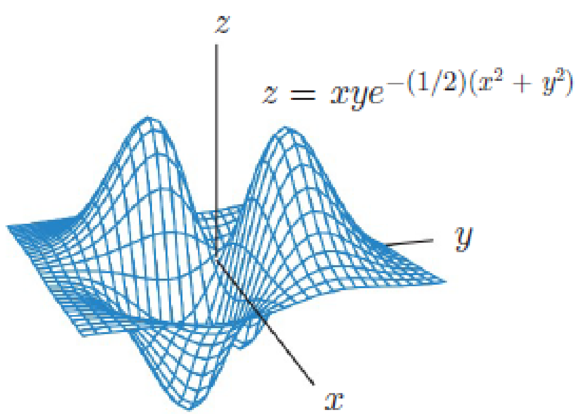


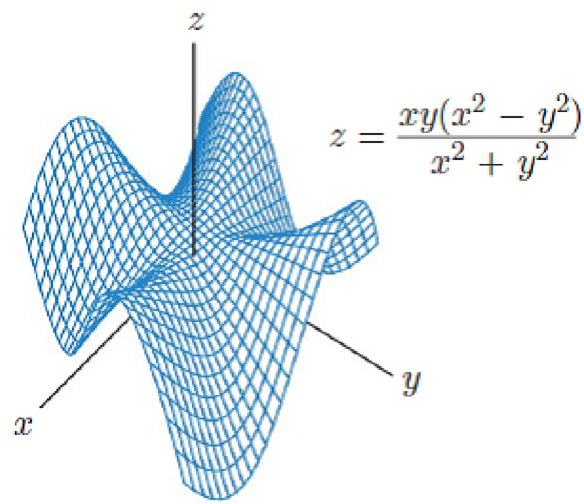
Voici quelques exemples de graphes de fonctions de 2 variables :



$z = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$





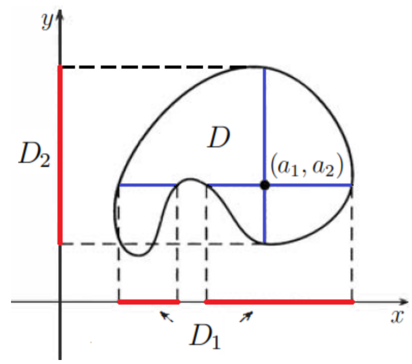


– Pour $n \geq 3$, la représentation graphique de G est impossible, car son graphe est contenu dans un espace à quatre dimensions au moins.

1.3 Fonctions partielles associées à une fonction de plusieurs variables

Considérons d'abord le cas d'une fonction scalaire de deux variables $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Etant donné un point $a = (a_1, a_2) \in D$, on définit les parties D_1 et D_2 de $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} D_1 &= \{x \in \mathbb{R}\ ;\ (x, a_2) \in D\}\,, \\ D_2 &= \{y \in \mathbb{R}\ ;\ (a_1, y) \in D\}\,. \end{aligned}$$



Les fonctions φ_1 et φ_2 définies par :

$$\begin{array}{rll} \varphi_1 : & D_1 & \to \mathbb{R} \\ & t & \mapsto f(t, a_2) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rll} \varphi_2 : & D_2 & \to \mathbb{R} \\ & t & \mapsto f(a_1, t) \end{array}$$

sont appelées les **fonctions partielles** associées à f au point $a = (a_1, a_2)$.

Exemple 8 Soit la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{x^2 - y^2}$ définie sur

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 - y^2 \geq 0\right\}.$$

- Au point $a = (2, 1)$, les fonctions partielles $\varphi_1 : t \mapsto \sqrt{t^2 - 1}$ et $\varphi_2 : t \mapsto \sqrt{4 - t^2}$ sont définies respectivement sur :

$$D_1 = \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[, \qquad D_2 = [-2, 2].$$

- Au point $a = (0, 0)$, la première fonction partielle $\varphi_1 : t \mapsto \sqrt{t^2} = |t|$ est définie sur $\mathbb{R}$, alors que la deuxième fonction partielle $\varphi_2 : t \mapsto \sqrt{-t^2}$ n'est définie qu'en 0.

Plus généralement,

Définition 2 (Fonctions partielles) *Soit $a = (a_1, ..., a_n)$ un point adhérent à D. Pour tout $j = 1, ..., n$, on appelle $j^{ième}$ fonction partielle de f en a, la fonction*

$$\begin{array}{rll} \varphi_j^a : & \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^p \\ & t & \mapsto f(a_1, ..., a_{j-1}, t, a_{j+1}, ..., a_n) \end{array}$$

définie sur

$$D_j = \{t \in \mathbb{R} \; ; \; (a_1, ..., a_{j-1}, t, a_{j+1}, ..., a_n) \in D\}.$$

Exemple 9 Soit $f : (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_1 + \cdots + x_n \in \mathbb{R}$.

- La $j^{\text{ième}}$ fonction partielle de f en $0 = (0, ..., 0)$ est la fonction $\varphi_j^0 : t \mapsto t$ définie sur $D_j = \mathbb{R}$.
- La $j^{\text{ième}}$ fonction partielle de f en $a = (1, ..., 1)$ est la fonction $\varphi_j^a : t \mapsto t + (n-1)$ définie sur $D_j = \mathbb{R}$.

2 Limites des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

La notion de limite s'étend à des fonctions de plusieurs variables. En outre bon nombre de propriétés de la limite connues pour les fonctions d'une variable seront encore valables ici.

Dans tout ce qui suit, D est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et f est une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

2.1 Définition et propriétés

2.1.1 Notion de Limite

Définition 3 *Soit $a \in \mathbb{R}^n$ un point adhérent à D. On dit que f admet une limite en a (ou quand $x \in D$ tend vers a) s'il existe un vecteur ℓ de $\mathbb{R}^p$ tel que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D : \quad \|x - a\| \leq \delta \implies \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Le vecteur ℓ est appelé <u>limite</u> de f en a, et on note

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$$

ce qui se lit "$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a".

Remarque 2 En raison de l'équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie, l'existence et la valeur de la limite d'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ en un point ne dépend pas du choix des normes choisies sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

Proposition 1 *Si la fonction f admet une limite en un point $a \in \overline{D}$, alors cette limite est unique.*

Il est alors légitime d'utiliser la notation $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Exemple 10 Montrons que la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \in \mathbb{R}$ admet pour limite 0 en $(0,0)$.
Compte tenu de l'inégalité $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\|(x,y)\|_2^2$, on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|xy|}{\|(x,y)\|_2} \leq \frac{1}{2}\|(x,y)\|_2 .$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|f(x,y)-0| \leq \varepsilon$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\|(x,y)\|_2 \leq 2\varepsilon := \delta$. D'après la définition, cela indique que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Exemple 11 Pour montrer que la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \dfrac{(x+y)^2}{|x|+|y|}$ admet pour limite 0 en $(0,0)$, il est préférable d'utiliser la norme $\|\cdot\|_1$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$|f(x,y)-0| = \frac{|x+y|^2}{|x|+|y|} \leq \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} = |x|+|y| = \|(x,y)\|_1 .$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|f(x,y)-0| \leq \varepsilon$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\|(x,y)\|_1 \leq \varepsilon$. D'après la définition, cela indique que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

2.1.2 Lien avec la notion de limite d'une suite.

Le résultat suivant relie limite d'une fonction et limite d'une suite.

Proposition 2 (Caractérisation séquentielle des limites) *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ définie sur D et a un point adhérent à D. Alors, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si et seulement si, pour toute suite $(u^m)_m$ d'éléments de D, convergente dans $\mathbb{R}^n$ vers a, la suite $(f(u^m))_m$ converge dans $\mathbb{R}^p$ vers ℓ.*

2.1.3 Opérations sur les limites

Le résultat suivant précise les conditions d'existence et la valeur de la limite de la composée de deux fonctions.

Proposition 3 *Soient f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ définie sur D_f et g une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ définie sur D_g avec $f(D_f) \cap D_g \neq \varnothing$, et soit a un point adhérent à D_f.*

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \overline{D}_g$ et que $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell \in \mathbb{R}^q$.

Si a est un point adhérent au domaine $D_{g\circ f}$ de $g\circ f$, alors $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x) = \ell$.

Proposition 4 (Opérations algébriques sur les limites) *Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, définies au voisinage d'un point a, et admettant pour limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 en a. Alors :*

1. *Linéarité : pour tous λ, μ réels, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet une limite en a, et on a :*

$$\lim_{x \to a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \ell_1 + \mu \ell_2 \ ;$$

Dans le cas où f et g sont des fonctions scalaires ($p = 1$), on a :

2. *fg admet une limite en a, et on a :*

$$\lim_{x \to a} (fg)(x) = \ell_1 \ell_2 \ ;$$

3. *Si $\ell_2 \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ admet une limite en a, et on a :*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

2.1.4 Lien avec les fonctions composantes et les fonctions partielles

Proposition 5 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et soient $f_1, ..., f_p$ ses fonctions composantes. On note $\ell = (\ell_1, ..., \ell_p) \in \mathbb{R}^p$. On a l'équivalence suivante :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \left(\forall j = 1, ..., p : \quad \lim_{x \to a} f_j(x) = \ell_j \right).$$

L'immense intérêt de cette propriété est de permettre de ramener l'étude de la limite de toute fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ à celle de p fonctions scalaires (à valeurs dans $\mathbb{R}$) ce qui est à priori plus simple.

Proposition 6 *Si une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ admet pour limite ℓ en $a \in \overline{D}$ alors les fonctions partielles*

$$\varphi_j^a : t \in D_j \mapsto f(a_1, ..., a_{j-1}, t, a_{j+1}, ..., a_n)$$

admettent toutes pour limite ℓ lorsque t tend vers a_j.

Remarque 3 La réciproque de la proposition ci-dessus est fausse. Même si toutes les fonctions partielles ont la même limite ℓ, on ne peut rien conclure quant à l'existence d'une limite pour f, comme on peut le voir sur l'exemple suivant. Toutefois, on peut affirmer que si f a une limite en a, cette limite est obligatoirement ℓ.

Exemple 12 La fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ admet pour fonctions partielles en $(0,0)$:

$$\varphi_1^{(0,0)} : x \in \mathbb{R}^* \mapsto f(x,0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi_2^{(0,0)} : y \in \mathbb{R}^* \mapsto f(0,y) = 0$$

qui ont une limite nulle en $x = 0$ et $y = 0$ respectivement. Or, on verra dans l'exemple 16 que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

2.1.5 Fonction bornée

Définition 4 *Une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ définie sur D est dite bornée si l'ensemble $f(D)$ est borné dans $\mathbb{R}^p$, i.e. si*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in D : \quad \|f(x)\| \leq M.$$

Proposition 7 *Si f admet une limite en $a \in \overline{D}$, alors f est bornée au voisinage de a.*

Exemple 13 La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{x+y}$ définie sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ n'est bornée sur aucun voisinage de $a = (0,0)$ puisque pour tout $r > 0$ et tout $M > 0$, le couple (x,y) avec $x = y = \dfrac{1}{2}\min\left(r, \frac{1}{M}\right)$ vérifie $\|(x,y)\|_2 \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}r < r$ i.e. $(x,y) \in B_2(0,r)$ et $|f(x,y)| \geq M$. On en déduit que f n'a pas de limite en 0.

2.2 Etude pratique des limites de fonctions réelles de plusieurs variables

2.2.1 Comment établir qu'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ n'a pas de limite ?

Utilisation des fonctions partielles A la lumière de la proposition 6, pour montrer qu'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ n'a pas de limite en $a = (a_1, ..., a_n)$, il suffit :

– de montrer qu'une des fonctions partielles φ_j^a n'a pas de limite en a_j ;
– ou bien que deux fonctions partielles φ_j^a et φ_i^a n'ont pas la même limite en a_j et a_i respectivement.

Exemple 14 La fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \dfrac{\cos x \sin y}{x^2+y^2}$ n'a pas de limite en $(0,0)$ car la deuxième fonction partielle en $(0,0)$:

$$\varphi_2^{(0,0)} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ y \mapsto f(0,y) = \frac{\sin y}{y^2} = \frac{1}{y}\frac{\sin y}{y}$$

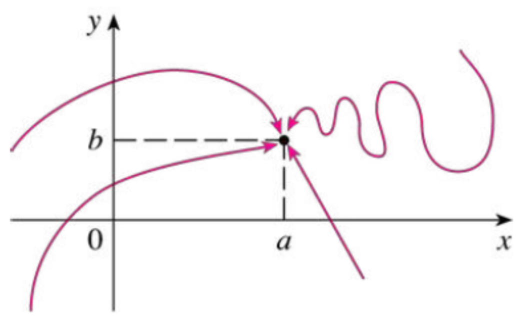
n'a pas de limite en $y = 0$.

Exemple 15 La fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ n'a pas de limite en $(0,0)$ car les fonctions partielles en $(0,0)$ qui sont

$$\varphi_1^{(0,0)} : x \in \mathbb{R}^* \mapsto f(x,0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi_2^{(0,0)} : y \in \mathbb{R}^* \mapsto f(0,y) = -1$$

ont pour limites respectives 1 et -1 en $x = 0$ et $y = 0$.

__**Utilisation de deux chemins différents**__ Dans le cas d'une fonction d'une seule variable, on peut faire tendre x vers a selon deux directions seulement, à partir de la droite ou à partir de la gauche. Et si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.
Dans le cas de fonctions de plusieurs variables, la situation n'est pas aussi simple puisqu'on peut faire tendre x vers a selon un nombre infini de trajectoires (voir la figure ci-dessous pour le cas de deux variables) pourvu que x reste dans le domaine de f.



La définition 3 de la limite de f en a ne fait intervenir que la **distance** entre x et a sans préciser le chemin selon lequel on fait tendre x vers a. Si la limite existe, alors $f(x)$ doit tendre vers la même limite indépendamment du chemin parcouru pour faire tendre x vers a. Par conséquent,

> *pour montrer qu'une limite n'existe pas, il suffit de montrer que la limite est différente le long de deux chemins se rendant en a.*

Exemple 16 Regardons si la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ admet une limite en $(0,0)$.
Si $y = 0$, alors $f(x,0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Par suite,

$$f(x,y) \to 0 \quad \text{lorsque } (x,y) \to (0,0) \text{ selon l'axe des } x.$$

Si $x = 0$, alors $f(0,y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, d'où

$$f(x,y) \to 0 \quad \text{lorsque } (x,y) \to (0,0) \text{ selon l'axe des } y.$$

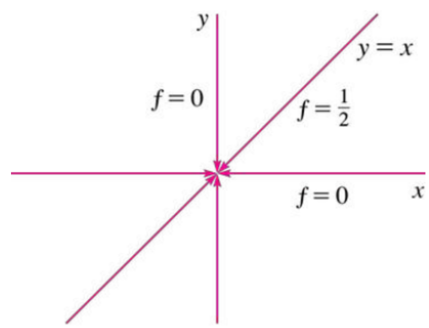
L'obtention de deux limites identiques selon les axes de coordonnées ne garantit pas que la limite est 0. Maintenant, on fait tendre (x, y) vers $(0,0)$ selon une autre droite, soit $y = x$ (la première bissectrice), on obtient pour tout $x \neq 0$,

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

par conséquent,

$$f(x,y) \to \frac{1}{2} \quad \text{lorsque } (x,y) \to (0,0) \text{ selon la droite } y = x.$$

(voir la figure ci-dessous).



Comme on a obtenu des limites différentes selon des chemins différents, la limite n'existe pas.

Remarque 4 Du point de vue pratique, il est commode de faire tendre $(x_1, ..., x_n)$ vers $(a_1, ..., a_n)$ suivant le vecteur dont toutes les composantes sont égales à un réel λ quelconque fixé à l'exception de l'une d'entre elles qui vaut 1. Si par exemple, la limite de $f(x_1, \lambda x_1, ..., \lambda x_1)$ lorsque $x_1 \to a_1$ dépend de λ alors f n'a pas de limite en a.

Exemple 17 Intéressons-nous à l'existence d'une limite en $(0,0)$ de la fonction

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Soit λ un réel quelconque fixé. On fait tendre (x, y) vers $(0,0)$ selon la droite d'équation $y = \lambda x$, on obtient

$$f(x, \lambda x) = \frac{|x| + |\lambda|\,|x|}{\sqrt{x^2 + \lambda^2 x^2}} = \frac{1 + |\lambda|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Comme la limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x, \lambda x) = \frac{1+|\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ dépend de la valeur de λ (et donc du chemin parcouru), la fonction f n'a pas de limite en $(0,0)$.

Utilisation de la caractérisation séquentielle de la limite La proposition 2 permet de montrer qu'une fonction f n'admet pas ℓ pour limite lorsque $x \to a$, ou de montrer que cette fonction n'admet pas du tout de limite pour $x \to a$; elle permet aussi de trouver la seule valeur possible de la limite éventuelle ℓ de $f(x)$ pour $x \to a$.

- Si on arrive à construire une suite de vecteurs $(u^m)_m$ de D, convergente vers a, et telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} f(u^m) \neq \ell$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq \ell$.
- Si on arrive à trouver deux suites de vecteurs $(u^m)_m$ et $(v^m)_m$ de D, toutes deux convergentes vers a et telles que $\lim\limits_{m\to+\infty} f(u^m) \neq \lim\limits_{m\to+\infty} f(v^m)$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.
- Si on trouve une suite de vecteurs $(u^m)_m$ de D, convergente vers a, telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} f(u^m) = \ell$, alors si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, sa valeur est nécessairement égale à ℓ.

Exemple 18 Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
Il est clair que cette fonction est définie sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Est-ce que f admet une limite pour $(x,y) \to (0,0)$?
Considérons la suite $(u^m)_m$ définie par $u^m = (0, \frac{1}{m})$. Elle converge vers $(0,0)$ et est formée de vecteurs de D, et l'on a

$$f(u^m) = f\left(0, \tfrac{1}{m}\right) = \frac{0 \cdot \frac{1}{m}}{0^2 + \frac{1}{m^2}} = 0 \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On peut donc affirmer que si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe, alors cette limite est nulle, mais il ne faut surtout pas conclure que cette limite existe.
Considérons maintenant la suite $(v^m)_m$ définie par $v^m = (\frac{1}{m}, \frac{1}{m})$. Elle converge aussi vers $(0,0)$ et est formée de vecteurs de D. Mais, cette fois-ci on a

$$f(v^m) = f\left(\tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{m}\right) = \frac{\frac{1}{m^2}}{2\frac{1}{m^2}} = \frac{1}{2} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0.$$

Puisque $f(v^m)$ n'a pas la même limite que $f(u^m)$, on peut affirmer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

2.2.2 Comment établir qu'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ a une limite ?

A cette fin, on a besoin du théorème suivant.

Théorème 1 (d'encadrement) *Soient f, g et h trois fonctions réelles définies sur une partie D de $\mathbb{R}^n$ et vérifiant au voisinage d'un point $a \in \overline{D}$ la double inégalité*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Si f et h admettent la même limite ℓ en a, alors g admet ℓ pour limite en a.

D'après la définition 3, la fonction f admet pour limite en $a \in \overline{D}$ le nombre $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si la fonction scalaire $g : x \in D \mapsto |f(x) - \ell| \in \mathbb{R}_+$ admet pour limite 0 en a.

Il résulte par ailleurs du théorème d'encadrement, que si h est une fonction à valeurs réelles qui admet 0 pour limite en a et telle qu'au voisinage de a on ait $g(x) \leq h(x)$ alors g admet pour limite 0 en a.

D'un point de vue pratique, pour établir que la fonction f a une limite en a on peut procéder ainsi :

1. On cherche une valeur éventuelle ℓ de la limite de f en a (en utilisant par exemple les fonctions partielles ou en considérant un chemin dans D passant par a, ou encore une suite dans D convergeant vers a ...).
2. On majore au voisinage de a la fonction $g : x \in D \mapsto |f(x) - \ell| \in \mathbb{R}_+$ par une fonction h dont on sait que la limite en a est 0.

Exemple 19 Considérons la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0, 0)\} \mapsto \dfrac{\sin(xy)}{|x| + |y|}$. Ses fonctions partielles en $(0, 0)$ correspondent à la fonction nulle. On en déduit que si f a une limite en $(0, 0)$, cette limite est nécessairement 0. En utilisant les inégalités $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $2\,|xy| \leq (|x| + |y|)^2$, on obtient pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0, 0)\}$:

$$|f(x, y) - 0| = \left|\frac{\sin(xy)}{|x| + |y|}\right| \leq \frac{|xy|}{|x| + |y|} \leq \underbrace{\frac{1}{2}\left(|x| + |y|\right)}_{:=h(x,y)}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x, y) = 0$, on en déduit que f admet pour limite 0 en $(0, 0)$.

3 Continuité des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

La notion de continuité s'étend à des fonctions de plusieurs variables. En outre bon nombre de propriétés des fonctions continues connues pour les fonctions d'une variable seront encore valables ici.

3.1 Continuité en un point et continuité sur un ensemble

3.1.1 Définitions et premiers exemples

Définition 5 *Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, a un point de D et A une partie de D.*

- *On dit que f est continue au point a si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

i.e. si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D : \quad \|x - a\| \leq \delta \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

- *On dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point de A.*
- *On dit que f est continue si elle est continue sur son domaine de définition D.*

Notation. On désigne par $C(D, \mathbb{R}^p)$ ou $C^0(D, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions continues de D dans $\mathbb{R}^p$.

Remarque 5 En raison de l'équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie, la propriété de continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ ne dépend pas des normes choisies sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

Exemple 20 Toute *fonction constante* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est continue sur $\mathbb{R}^n$, puisque pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $x, a \in \mathbb{R}^n$, on a $\|f(x) - f(a)\| = 0 \leq \varepsilon$.

Exemple 21 L'application identité $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto x$ est continue. En effet, à $\varepsilon > 0$ donné, on peut prendre $\delta = \varepsilon$.

Exemple 22 Toute *norme* sur $\mathbb{R}^n$ est continue. En effet, l'inégalité

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

montre qu'à $\varepsilon > 0$ donné, on peut prendre $\delta = \varepsilon$.

Exemple 23 Les projections canoniques

$$\begin{array}{rcl} p_1 : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} p_2 : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto y \end{array}$$

sont continues en tout point (a_1, a_2) de $\mathbb{R}^2$ puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} |p_1(x, y) - p_1(a_1, a_2)| &= |x - a_1| \leq |x - a_1| + |y - a_2| = \|(x, y) - (a_1, a_2)\|_1 , \\ |p_2(x, y) - p_2(a_1, a_2)| &= |y - a_2| \leq |x - a_1| + |y - a_2| = \|(x, y) - (a_1, a_2)\|_1 , \end{aligned}$$

de sorte qu'à $\varepsilon > 0$ donné, il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$.

Exemple 24 Plus généralement, pour tout $j = 1, ..., n$ la j-ième projection canonique

$$p_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, ..., x_n) \mapsto x_j$$

est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 6 (Homéomorphisme) *Soient $D \subset \mathbb{R}^n$, $\Delta \subset \mathbb{R}^p$ et f une bijection de D sur Δ. On dit que f est un homéomorphisme de D sur Δ si f et f^{-1} sont continues sur D et Δ respectivement.*

On dit alors que D et Δ sont homéomorphes.

Comme par définition une application f est continue en a si elle admet pour limite $f(a)$ en a, on déduit des propriétés de la limite énoncées dans la section précédente un certain nombre de résultats concernant les fonctions continues.

3.1.2 Critère séquentiel de la continuité

En adaptant la caractérisation séquentielle de la limite (Proposition 2) au cas particulier des fonctions continues, on obtient le critère séquentiel de continuité en un point.

Proposition 8 *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $a \in D$. Alors, f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ de points de D qui converge vers a, la suite image $(f(u^m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*

Cette propriété sert souvent à montrer qu'une fonction n'est pas continue.

Exemple 25 La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, si on note $u^m = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right)$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, alors u^m tend vers $(0,0)$ mais $f(u^m) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers $f(0,0) = 0$ quand $m \to +\infty$.

3.1.3 Opérations sur les fonctions continues

Exactement comme pour les fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$, on démontre les propositions suivantes.

Proposition 9 (Composée de fonctions continues) *Soient D et Δ deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^p$ respectivement, et soient $f : D \to \mathbb{R}^p$ et $g : \Delta \to \mathbb{R}^q$ deux fonctions telles que $f(D) \subset \Delta$. Si f est continue en $a \in D$ (resp. sur D) et si g est continue en $f(a)$ (resp. sur Δ), alors la fonction $g \circ f$ est continue en a (resp. sur D).*

De même, si f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, et si g est une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ définie et continue au voisinage de ℓ, alors on a

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = g(\ell).$$

Exemple 26 La fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée des fonctions continues $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$.

Exemple 27 La fonction $f : (r, t) \mapsto \cos t$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée des fonctions continues

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (r, t) & \mapsto t \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \cos x. \end{array}$$

Corollaire 1 *Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est continue en $a \in D$ (resp. sur D), alors la fonction $\|f\| : x \mapsto \|f(x)\|$ est continue en a (resp. sur D).*

Proposition 10 (Opérations algébriques sur les fonctions continues) *Soient f et g deux fonctions de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.*

Si f et g sont continues en $a \in D$ (resp. sur D) alors :

1. *$f + g$ est continue en a (resp. sur D) ;*
2. *pour tout réel λ, la fonction λf est continue en a (resp. sur D) ;*

   Et dans le cas où $p = 1$, on a :
3. *$f \times g$ est continue en a (resp. sur D) ;*
4. *f/g est continue en a si $g(a) \neq 0$ (resp. sur D si g ne s'annule pas sur D).*

Remarque 6 Les points 1. et 2. de la proposition ci-dessus indiquent que $C(D, \mathbb{R}^p)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$ des fonctions de D dans $\mathbb{R}^p$.

Exemple 28 Les fonctions S et P de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définies par $S(x,y) = x+y$ et $P(x,y) = xy$ sont continues, comme somme et produit des projecteurs canoniques p_1 et p_2 respectivement.

Exemple 29 La fonction $f : (x,y) \mapsto 3x^3y^2 - 4y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une combinaison linéaire de produits des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$: $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$.

Exemple 30 Plus généralement, toute *fonction polynômiale en* (x,y), c'est-à-dire toute fonction combinaison linéaire de monômes du type $x^\alpha y^\beta$:

$$f : (x,y) \mapsto \sum_{\alpha+\beta \leq N} c_{\alpha,\beta}\, x^\alpha y^\beta$$

avec $\alpha, \beta, N \in \mathbb{N}$ et $c_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$, est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 31 La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{2x^3y + x^2}{x^2 + y^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme quotient de deux fonctions polynômiales, le dénominateur ne s'annulant pas.

Plus généralement,

Définition 7
- *On appelle fonction polynômiale en* $(x_1, ..., x_n)$ *toute fonction de la forme*

$$f : (x_1, ..., x_n) \mapsto \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n \leq N} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\, x^{\alpha_1} \ldots x^{\alpha_n}$$

avec $\alpha_1, ..., \alpha_n, N \in \mathbb{N}$ *et* $c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ *des constantes réelles.*
- *On appelle fonction rationnelle toute fonction qui s'écrit comme le quotient de deux fonctions polynômiales.*

Exemple 32 *La fonction* $f : (x,y,z) \mapsto x + 3xyz - 2y^2z^3$ *est une fonction polynômiale sur* $\mathbb{R}^3$.

En raisonnant de même que ci-dessus, on déduit que

Corollaire 2

1. *Toute fonction polynômiale sur* $\mathbb{R}^n$ *est continue.*
2. *Toute fonction rationnelle est continue en tout point où son dénominateur ne s'annule pas.*

3.1.4 Lien avec la continuité des fonctions composantes et des fonctions partielles

Proposition 11 (Lien avec la continuité des fonctions composantes) *On note $f_1, ..., f_p$ les fonctions composantes de f, i.e. les fonctions de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que :*

$$\forall x \in D, \quad f(x) = (f_1(x), ..., f_p(x)).$$

f est continue en $a \in D$ si et seulement si toutes les fonctions composantes de f sont continues en a.

Preuve. Conséquence de l'égalité :

$$\|f(x) - f(a)\|_1 = |f_1(x) - f_1(a)| + \cdots + |f_p(x) - f_p(a)|$$

et des inégalités :

$$|f_j(x) - f_j(a)| \leq \|f(x) - f(a)\|_1, \quad \forall j = 1, ..., p.$$

■

Exemple 33 La fonction

$$\begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto \left(x^2 - xy, \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}\right) \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$ car les deux fonctions composantes

$$(x, y) \mapsto x^2 - xy \quad \text{et} \quad (x, y) \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$$

sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 34 La fonction $f : (r, t) \mapsto (r \cos t, r \sin t)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ puisque chacune de ses fonctions composantes est continue comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 35 La fonction $f : (x, y) \mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$ est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ puisque chacune de ses fonctions composantes est continue comme composée de fonctions continues :

$$\begin{array}{lll} (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}, \\ (x, y) & \mapsto & \dfrac{y}{x} \mapsto 2 \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right). \end{array}$$

Proposition 12 (Lien avec la continuité des fonctions partielles) *Si une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est continue en $a = (a_1, ..., a_n) \in D$, alors pour tout $j = 1, ..., n$, la j-ième fonction partielle φ_j^a de f en a*

$$\varphi_j^a : t \mapsto f(a_1, ..., a_{j-1}, t, a_{j+1}, ..., a_n)$$

est continue en a_j.

Remarque 7 La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 36 Considérons sur $\mathbb{R}^2$ la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On a

$$\varphi_1^{(0,0)}(x) = f(x,0) = 0 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 = f(0,0) = \varphi_1^{(0,0)}(0)$$

et

$$\varphi_2^{(0,0)}(y) = f(0,y) = 0 \underset{y \to 0}{\longrightarrow} 0 = f(0,0) = \varphi_2^{(0,0)}(0),$$

ce qui montre que les fonctions partielles $\varphi_1^{(0,0)}$ et $\varphi_2^{(0,0)}$ sont continues en $x = 0$ et $y = 0$ respectivement, et pourtant f n'est pas continue en $(0,0)$ (Voir exemple 25).

3.1.5 Prolongement par continuité

Définition 8 (Prolongement par continuité) *Soient $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction définie sur D et a un point adhérent à D n'appartenant pas à D. Si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^p$ lorsque x tend vers a, on peut étendre le domaine de définition de f à $D \cup \{a\}$ en posant $f(a) = \ell$. On dit que l'on a prolongé f par continuité au point a, et la fonction ainsi obtenue*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D, \\ \ell & \text{si } x = a, \end{cases}$$

est continue en a et est appelée prolongement par continuité de f au point a.

Exemple 37 La fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est définie sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et tend vers 0 en $(0,0)$ (Voir exemple 10). On peut donc prolonger la fonction f en $(0,0)$ en une fonction continue $\widetilde{f}$ en posant $\widetilde{f}(0,0) = 0$.

3.1.6 Caractérisation topologique des fonctions continues

Notation. Si $f : X \to Y$ est une application, alors pour toute partie $B \subset Y$, l'image réciproque de B par f est la partie de X notée $f^{-1}(B)$ et définie par

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \ ; \ f(x) \in B\} .$$

Proposition 13 *Soit f une fonction définies sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue sur $\mathbb{R}^n$.*
2. *Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^p$, l'image réciproque $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
3. *Pour tout fermé F de $\mathbb{R}^p$, l'image réciproque $f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.*

La proposition ci-dessus fournit un moyen d'établir qu'un ensemble est ouvert ou fermé.

Exemple 38 Comme $]0, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et que $[0, +\infty[$ et $\{0\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continue alors :
- l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ f(x) > 0\} = f^{-1}(]0, +\infty[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$;
- l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$;
- l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ f(x) \geq 0\} = f^{-1}([0, +\infty[)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

3.1.7 Continuité et compacité

Théorème 2 *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction continue et K une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ contenue dans D. Alors, $f(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^p$.*

Une conséquence importante et utile en pratique de ce résultat (avec $p = 1$) est la suivante.

Théorème 3 (de Weierstrass) *Une fonction réelle f continue sur un compact K de $\mathbb{R}^n$ est bornée et atteint ses bornes. En d'autres termes, il existe $a, b \in K$ tels que*

$$\forall x \in K : \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

3.2 Continuité uniforme

Une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est continue sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^n$ si :

$$\forall x \in D,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0,\ \forall y \in D : \quad \|x - y\| \leq \delta_{x,\varepsilon} \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

Pour certaines fonctions, le réel $\delta_{x,\varepsilon}$ peut être le même pour tous les éléments x de D : il ne dépend alors pas de x. En imposant cette condition à une fonction, on définit une notion plus « forte » que la continuité appelée **continuité uniforme**.

Définition 9 *Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est dite uniformément continue sur D si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in D : \quad \|x - y\| \leq \delta \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

Remarque 8 Il résulte des définitions 5 et 9 que toute fonction uniformément continue sur D est continue sur D. Evidemment, la réciproque n'est pas vraie.

Exemple 39 Toute fonction constante $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$, puisqu'on a $\|f(x) - f(y)\| = 0$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 40 La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{1 + |x|} \in \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet, puisque pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a $|x| + 1 \geq 1$ et $|y| + 1 \geq 1$, on obtient :

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{|y| - |x|}{(1 + |x|)(1 + |y|)} \right| \leq ||y| - |x|| \leq |y - x|.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ (prendre $\delta = \varepsilon$) tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $|x - y| \leq \delta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \leq \delta = \varepsilon$.

Théorème 4 *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction continue et K une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ contenue dans D ; alors f est uniformément continue sur K.*

Une classe importante de fonctions uniformément continues est celle des fonctions lipschitziennes.

Définition 10 *Soit $k \in \mathbb{R}_+$. Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est dite $k-$lipschitzienne (ou lipschitzienne de rapport k) si*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k\, \|x - y\|. \tag{1}$$

f est dite lipschitzienne si elle est $k-$lipschitzienne pour un certain $k \in \mathbb{R}_+$.
f est dite contractante si elle est $k-$lipschitzienne pour un certain $k \in [0, 1[$.
Le plus petit réel $k \in \mathbb{R}_+$ vérifiant (1) est appelé la constante de Lipschitz de f.

Remarque 9 La constante de Lipschitz k dépend du choix des normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Par contre, par équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie, le fait qu'une fonction soit lipschitzienne ou non ne dépend pas des normes choisies.

Exemple 41 Une fonction constante $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est lipschitzienne de rapport 0 puisque pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a $\|f(x) - f(y)\| = 0$. Réciproquement, toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ qui est lipschitzienne de rapport 0 est constante car si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a $\|f(x) - f(y)\| \leq 0$ alors $\|f(x) - f(y)\| = 0$, autrement dit $f(x) = f(y)$.

En prenant $\delta = \varepsilon/k$ dans la définition de la continuité uniforme, on voit immédiatement que

Proposition 14 *Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est lipschitzienne alors f est uniformément continue sur D.*

Proposition 15 *La fonction $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$ est lipschitzienne et donc uniformément continue.*

Preuve. Soient (x, y) et (x', y') deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^2$. On a

$$|S(x,y) - S(x',y')| = |(x+y) - (x'+y')| = |(x-x') + (y-y')| \leq |x-x'| + |y-y'|,$$

i.e.,

$$|S(x,y) - S(x',y')| \leq \|(x,y) - (x',y')\|_1,$$

ce qui montre que S est lipschitzienne et par conséquent uniformément continue. ■

Proposition 16 *Toute norme sur $\mathbb{R}^n$ est lipschitzienne et donc uniformément continue.*

Preuve. L'inégalité

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \quad |\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|$$

montre que la fonction $x \mapsto \|x\|$ est lipschitzienne et donc uniformément continue. ■

Proposition 17 *Tout application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est lipschitzienne et donc uniformément continue.*

On termine ce chapitre par un résultat utile pour montrer les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites.

Théorème 5 (du point fixe de Banach-Picard) *Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction contractante de F dans F (de rapport k). Alors, f admet un unique point fixe a (solution de l'équation $f(x) = x$) dans F.*
En outre, si on se donne $x^0 \in F$ et si on définit par récurrence $x^{m+1} = f(x^m)$, alors la suite $(x^m)_m$ converge vers cet unique point fixe quand m tend vers l'infini. Plus précisément, on a

$$\|x^m - a\| \leq \frac{k^m}{1-k} \left\|x^1 - x^0\right\|, \qquad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$