1. Moment Statique d'une surface

On appelle moment statique S_x d'une section par rapport à un axe x quelconque, la caractéristique géométrique déterminée par l'intégrale suivante :

$$S_x = \int_A y dA \qquad (1)$$

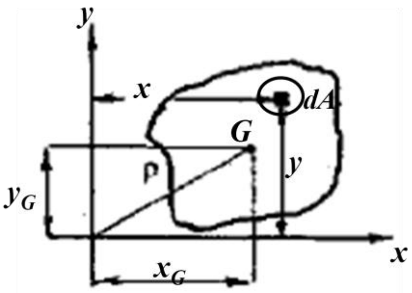


Figure 1

Son unité correspond à l'unité de longueur à la puissance 3 (cm^3 ou mm^3).

Notons que l'aire de la surface de la figure 1 est : $A = \int_A dA$.

On démontre que le moment statique de la section droite par rapport à l'axe x peut être calculé par la formule suivante :

$$S_x = \int_A y dA = A.y_G \qquad (2)$$

Avec y_G la distance du centre de gravité de la surface à l'axe x.

Et donc par rapport à l'axe y : $S_y = \int_A x dA = A.x_G$

Remarque : la connaissance de S_x et de S_y permet rapidement de déterminer la position du centre de gravité de la section plane.

Exemple : Déterminer la position du centre de gravité d'une section rectangulaire de dimension b et h.

2. Moment d'inertie des surfaces planes

2.1 Moment d'inertie axial

Le moment d'inertie quadratique axial, ou tout court moment d'inertie d'une surface plane est une caractéristique géométrique définie par :

$$\begin{aligned} &\text{Par rapport à l'axe } x : \quad I_x = \int_A y^2 dA \\ &\text{Par rapport à l'axe } y : \quad I_y = \int_A x^2 dA \end{aligned} \qquad (3)$$

2.2 Moment d'inertie centrifuge

Aussi appelé produit d'inertie, dans le plan x-y (Figure 1) il est définie par :

$$I_{xy} = \int_A x.y \, dA \qquad (4)$$

Où x et y sont les distances entre l'aire dA et les axes x et y.

Remarque : Le produit d'inertie peut être positif, négatif ou dans un cas particulier nul (quand il est calculé par rapport à un axe de symétrie).

2.3 Moment d'inertie polaire

Il s'exprime par : $$I_p = \int_A \rho^2 dA \qquad (5)$$

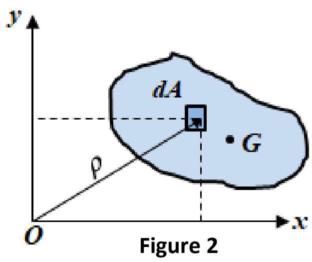


Figure 2

D'après la figure 2 : $\rho^2 = x^2 + y^2$; on trouve $I_p = I_x + I_y$

3. Moment d'inertie par rapport à des axes parallèles

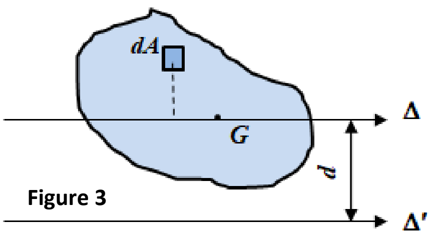


Figure 3

L'axe Δ passe par le centre de gravité de la surface plane donnée en figure 3. Le théorème des axes parallèles stipule que le moment d'inertie par rapport à un axe Δ' parallèle à Δ est donné par :

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta} + d^2.A \qquad (6)$$

C'est en fait le théorème de Huygens. $\boldsymbol{A}$ est l'aire de la surface donnée, $\boldsymbol{d}$ la distance entre les deux axes parallèles.

4. Expression des moments d'inertie pour une rotation des axes de coordonnées

Connaissant les moments d'inertie par rapport aux axes x-y, il s'agit de déterminer les expressions des moments par rapport au système d'axe Ox_1y_1. On démontre que :

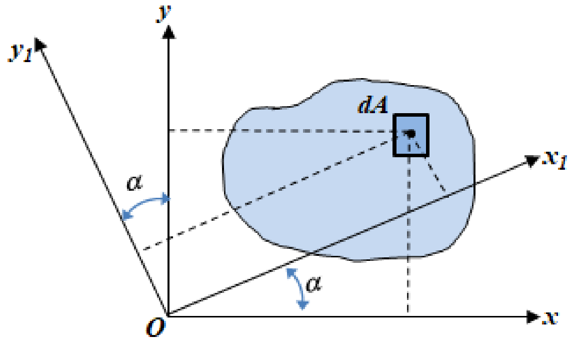


Figure 4

$$\begin{aligned} I_{x1} &= I_x \cdot cos^2\alpha + I_y . sin^2\alpha - 2I_{xy}\, sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha \\ I_{y1} &= I_x sin^2\alpha + I_y\, cos^2\alpha + 2I_{xy}\, sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha \\ I_{x1y1} &= I_x \frac{sin2\alpha}{2} - I_y \frac{sin2\alpha}{2} + I_{xy}\, cos2\alpha \end{aligned} \quad (7)$$

4.1 Axes d'inertie et Moments principaux d'inertie

En fonction de l'angle d'orientation $\boldsymbol{\alpha}$, il existe une position où les moments d'inertie $\boldsymbol{Ix}$ et $\boldsymbol{Iy}$ prennent des valeurs extrémales (max ou min). La procédure suivante permet de déterminer le maximum de $\boldsymbol{Ix}$:

$$\left.\frac{dI_{x1}}{d\alpha}\right|_{\alpha=?} = 0$$

On trouve :

$$-2\, I_x cos\,\alpha \cdot sin\,\alpha + 2I_y\, sin\,\alpha\ \cdot cos\,\alpha - 2\, I_{xy} cos\, 2\alpha = 0$$

Ce qui donne :

$$tg2\alpha = \frac{sin\, 2\alpha}{cos2\alpha} = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Par substitution de la valeur de α et après transformation trigonométrique, on obtient :

$$I_{\substack{max \\ min}} = \frac{I_X + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2} \quad (8)$$

5. Applications

a- Déterminer la position des centres de gravité des surfaces de la figure 5.

b- Calculer les moments d'inertie et produits d'inertie des surfaces élémentaires de la figure 6.

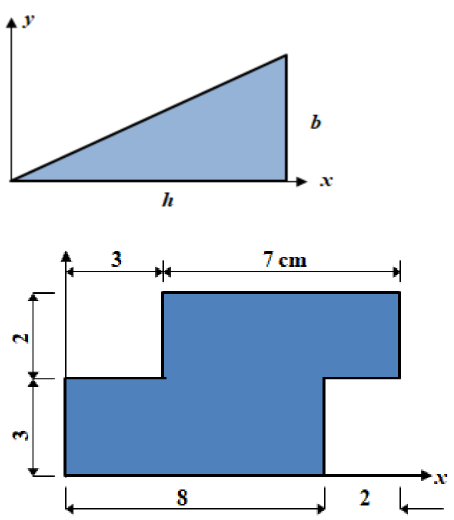


Figure 5

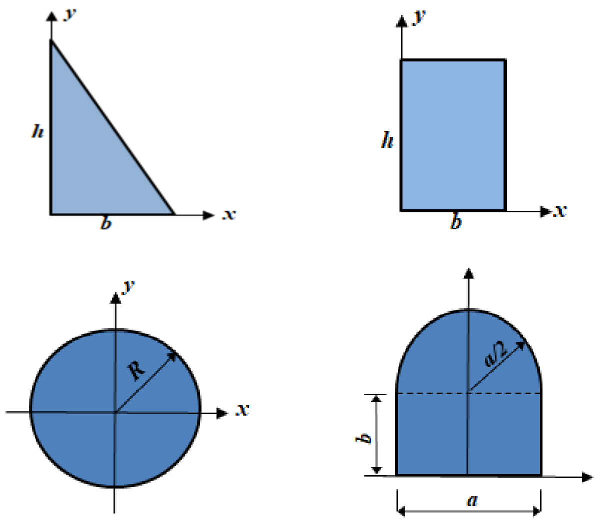
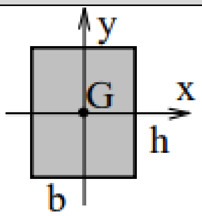
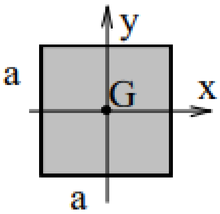
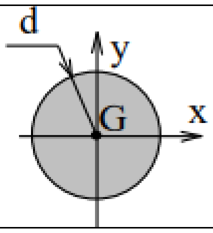
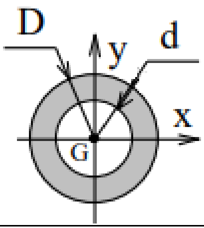
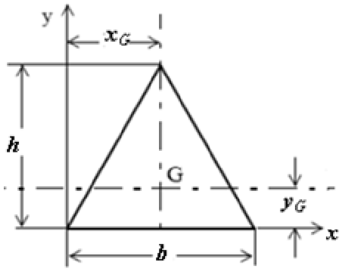
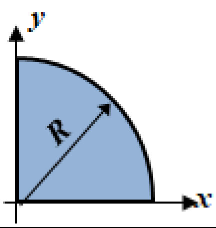


Figure 6

6. Caractéristiques géométriques de quelques sections planes usuelles

Forme	Aire	Centre de Gravité	Moments d'inertie		
			Ix	*Iy*	*Ip*
	***b.h***	*(0,0)*	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh}{12}(h^2+b^2)$
	a^2	*(0,0)*	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{6}$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	*(0,0)*	$\frac{\pi d^3}{64}$	$\frac{\pi d^3}{64}$	
	$\frac{\pi}{12}(D^2-d^2)$	*(0,0)*	$\frac{\pi}{64}(D^3-d^3)$	$\frac{\pi}{64}(D^3-d^3)$	
	$\frac{b.h}{2}$	$x_G=\frac{b}{2}$ $y_G=\frac{h}{3}$			
	$\frac{\pi R^2}{4}$	$x_G=\frac{4R}{3\pi}$ $y_G=\frac{4R}{3\pi}$	$\frac{R^4}{2}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)$	$\frac{R^4}{2}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)$	