

Chapitre 3

Analyse Cinématique des Mécanismes Plans

Plan du cours :

- Généralités
- Paramétrage d'un mécanisme plan
- Analyse structurale des mécanismes plans
 - Mécanismes 4 barres articulées
 - Classification selon la méthode d'Assour
 - Loi de Grashof
- Analyse Cinématique des Mécanismes Plans
 - Analyse des Positions : Méthode analytique
 - Analyse des vitesses : Méthode Graphique; Méthode Analytique
 - Analyse des accélérations : Méthode Graphique; Méthode Analytique

1. Généralités

Pour le problème d'analyse cinématique des mécanismes, les données sont : schéma cinématique (ou modèle physique) du mécanisme, la position considérée, la vitesse et l'accélération des pièces motrices.

On cherche à déterminer :

- a) La position du mécanisme : position de toutes les pièces mobiles du mécanisme;
- b) La vitesse du mécanisme : vitesse de toutes les pièces mobiles ;
- c) L'accélération du mécanisme : accélération de toutes les pièces mobiles ;

Trois méthodes sont utilisées dans ce document :

- méthode géométrique (construction géométrique);
- méthode graphique (ou grapho-analytique, construction graphique);
- méthode analytique (fonctions analytiques)

2. Paramétrage d'un mécanisme plan

2.1 Définition

Pour un mécanisme plan tous les points des éléments mobiles décrivent des courbes situées dans des plans parallèles, au cours de leurs mvts.

2.2 Liaison dans le plan

Les liaisons possibles dans le plan sont : Pivot d'axe perpendiculaire au plan; Glissière d'axe parallèle au plan; Ponctuelle d'axe parallèle au plan.

2.3 Caractéristiques géométriques des éléments

Dans une chaîne cinématique fermée, chaque élément possède au moins deux liaisons. Ces éléments sont appelés **éléments binaires**.

Pour les éléments binaires, 3 cas peuvent se présenter selon la nature des liaisons. (Figures 1 a et b)

- élément avec 2 pivot : distance entre perpendiculaires aux 2 axes;
- élément avec une pivot et une glissière : distance du centre de la pivot à l'axe de la glissière;
- un élément avec 2 glissières : angle entre les 2 axes de ces liaisons.

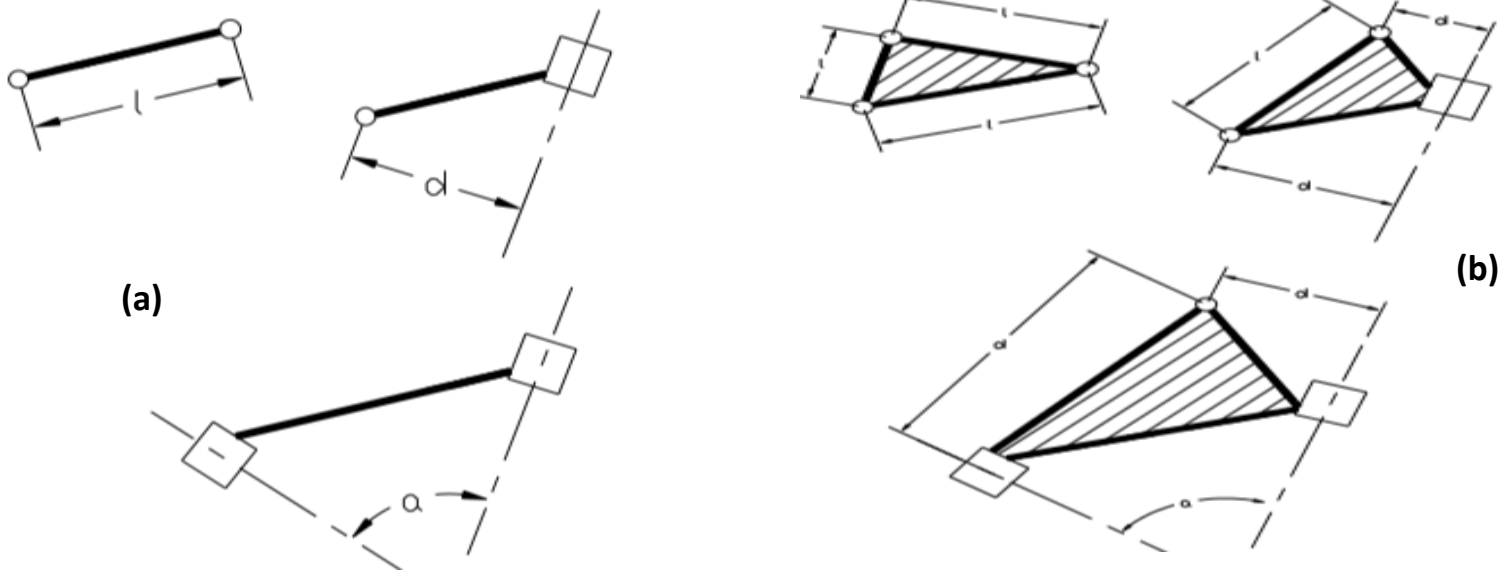


Figure 1

Pour analyser un mécanisme il est nécessaire de connaître ses caractéristiques géométriques. Dans le cas général, il y a toujours des paramètres fixes et des paramètres variables au cours du mouvement du mécanisme. Exemple: (Figure 2)

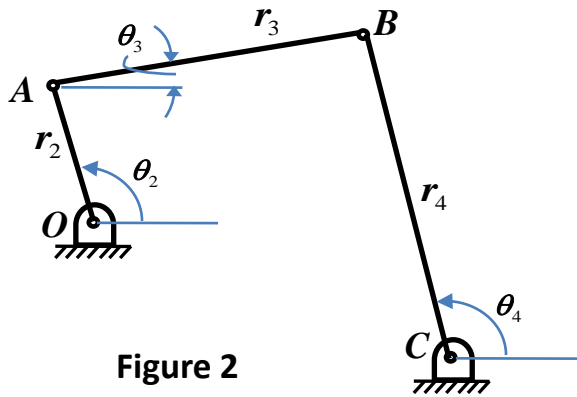


Figure 2

Paramètres fixes

- $r_1 = OC$
- $r_2 = OA$
- $r_3 = AB$
- $r_4 = BC$

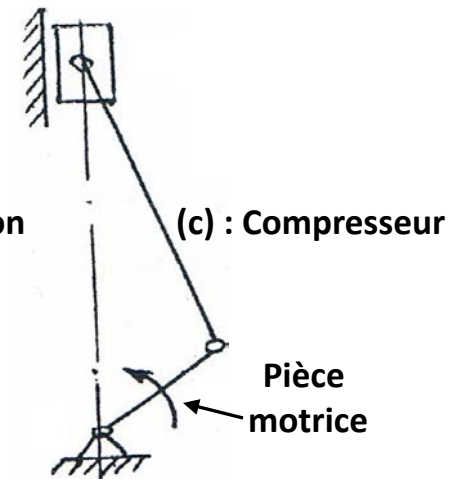
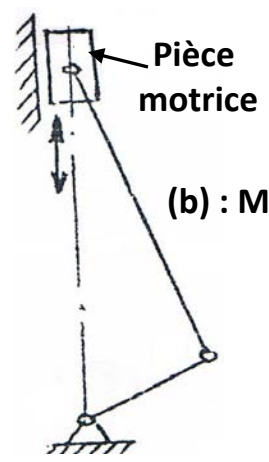
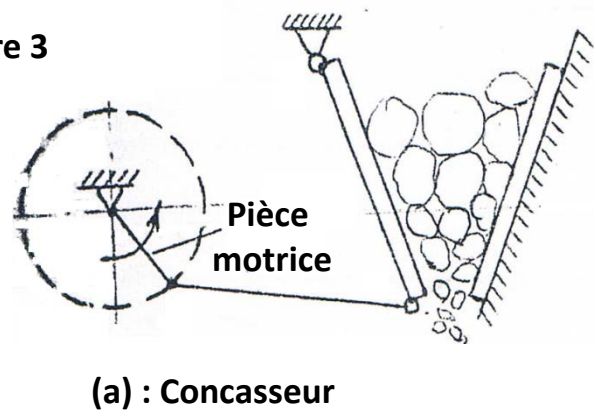
Paramètres variables : $\theta_2(t)$, $\theta_3(t)$ et $\theta_4(t)$

3. Analyse structurale des mécanismes plans

Dans ce qui suit, nous prenons comme exemple le mécanisme articulé 4 barres.

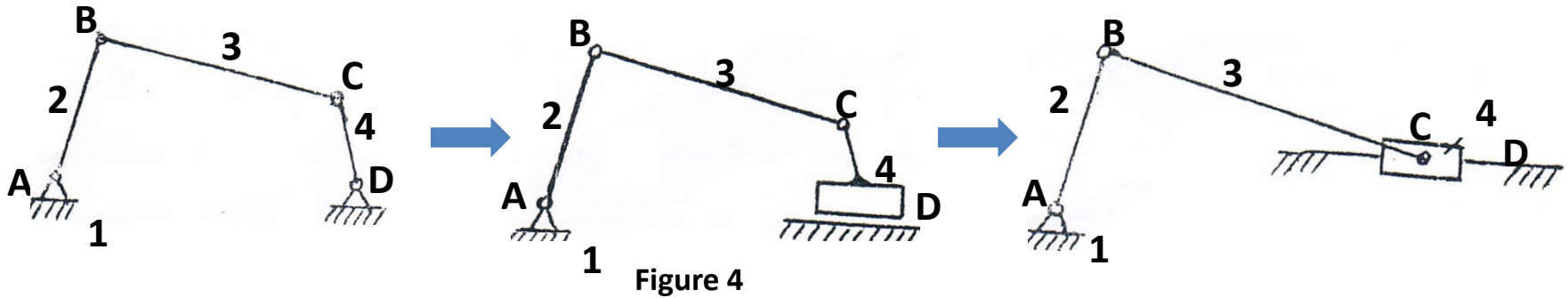
3.1 Exemple de mécanismes articulés 4 barres

Figure 3

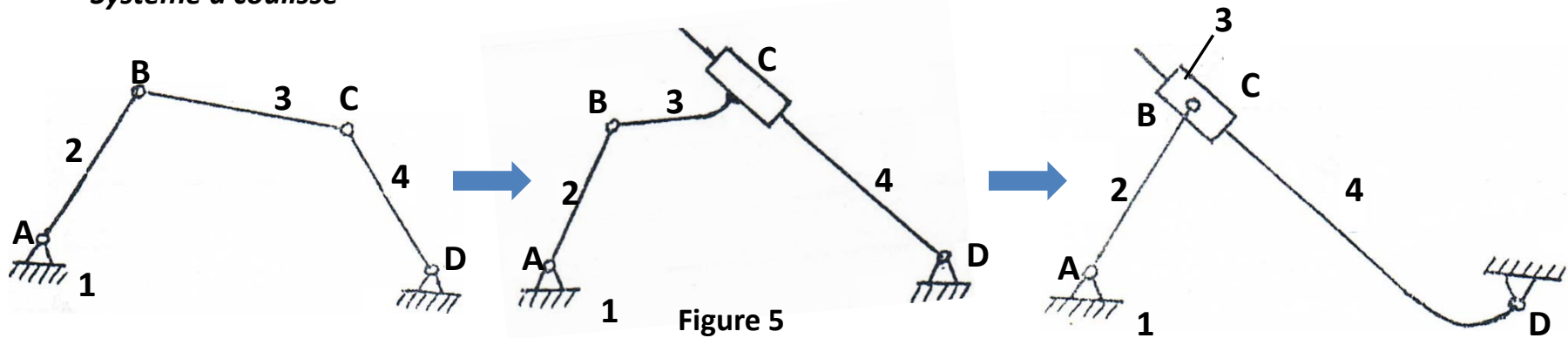


3.2 Systèmes dérivés du mécanisme articulés 4 barres

Système à piston



Système à coulisse



3.3 Classification des mécanismes articulés 4 barres

3.3.1 Classification par nature des paires cinématiques

α- mécanismes aux paires inférieures : toutes les paires cinématiques sont des paires inférieures.
Exemple : mécanisme à piston

b- mécanismes aux paires supérieures : contenant des paires supérieures.

Exemple : mécanismes à came, mécanismes à engrenage.

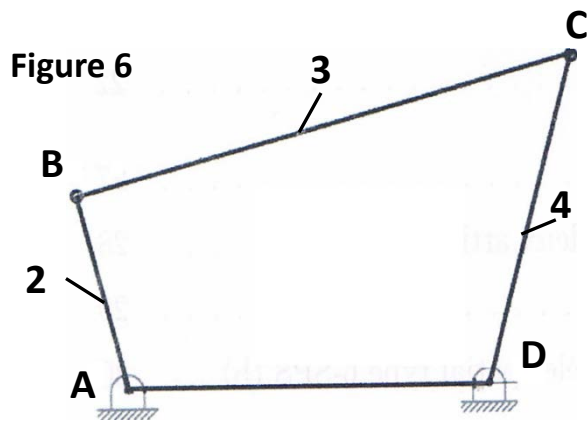
3.3.2 Classification selon la méthode d'Assour

Chaque mécanisme est formé par une ou plusieurs pièces motrices reliées à la base et des chaînes cinématiques statico-déterminées; les plus simples sont appelées groupes d'Assour.

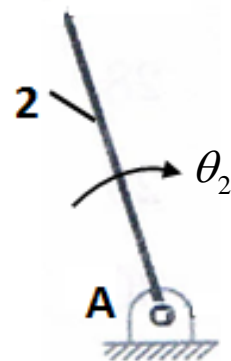
Statico-déterminée = Sont ddl est nul ($w = 0$).

La plus simple = Ne peut être décomposée en plus simples chaînes statico-déterminées.

Exemples :



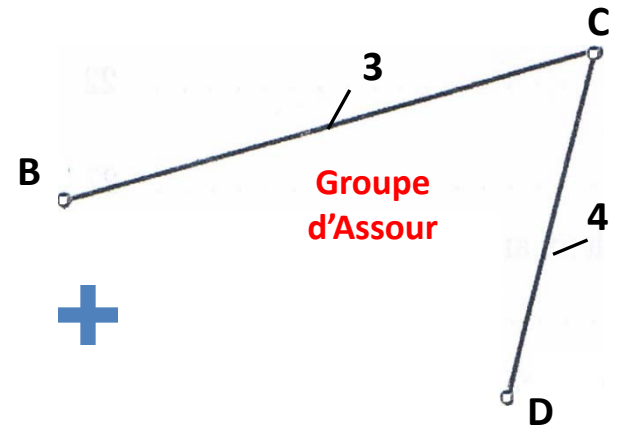
$$w = 3.3 - 2.4 = 1 \text{ ddl}$$



Pièce motrice + base

$$w = 3.1 - 2.1 = 1$$

Paramètre θ_2



$$w = 3.2 - 2.3 = 0$$

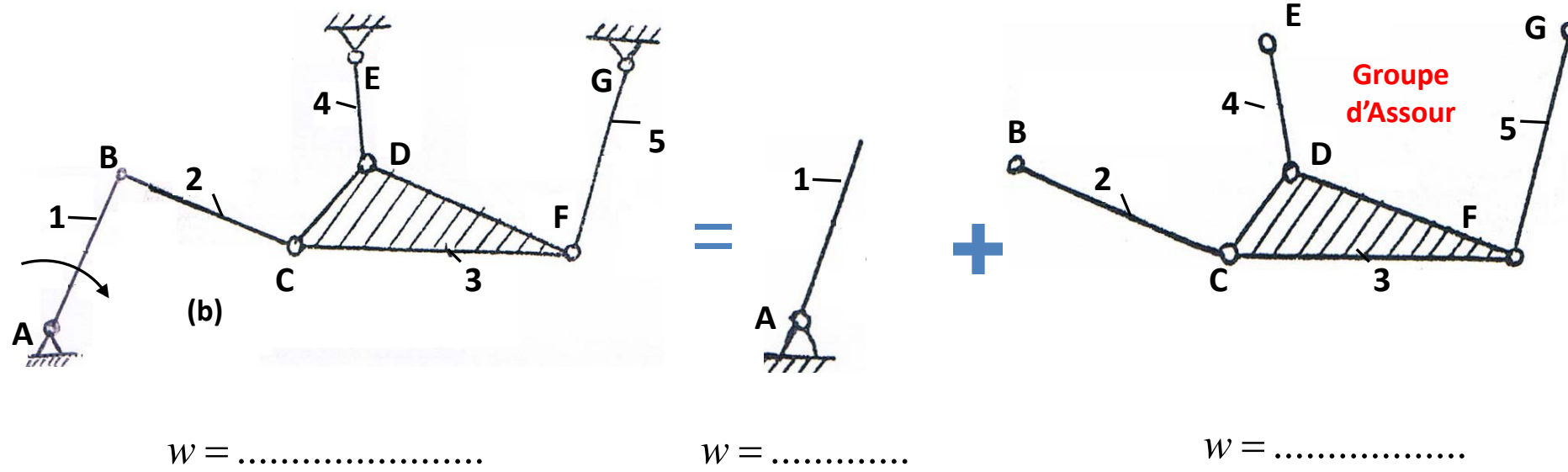
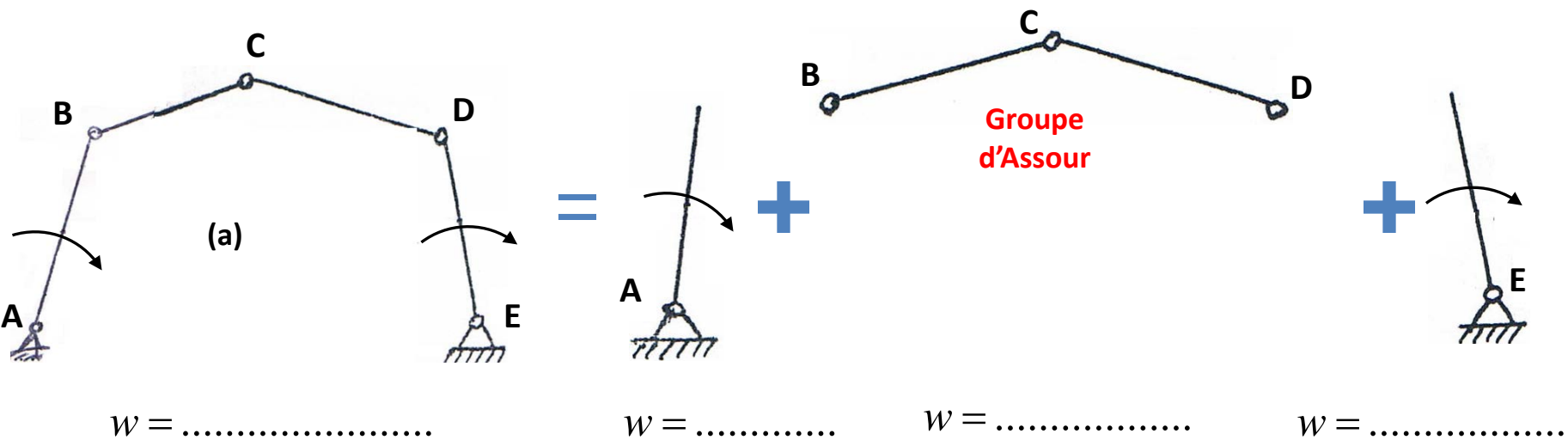


Figure 7

Classification des mécanismes par groupe d'Assour

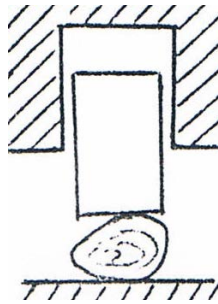
Le numéro de la classe du mécanisme est celui du plus haut groupe d'Assour contenu dans le mécanisme.

Numéro de classe = nombre de cotés du plus grand polygone (Figure 8)

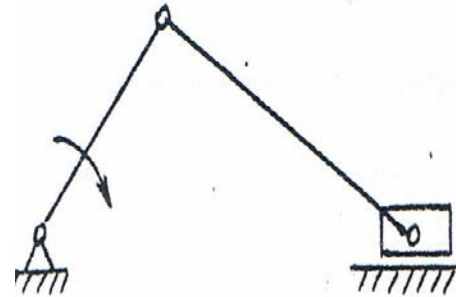


Moteur électrique

(a) Mécanisme de 1^{ière} classe

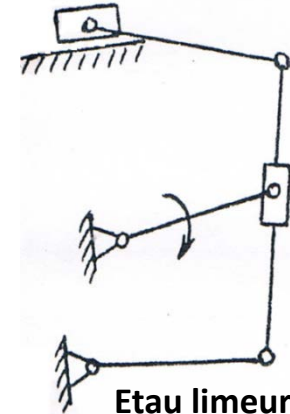


Presse hydraulique



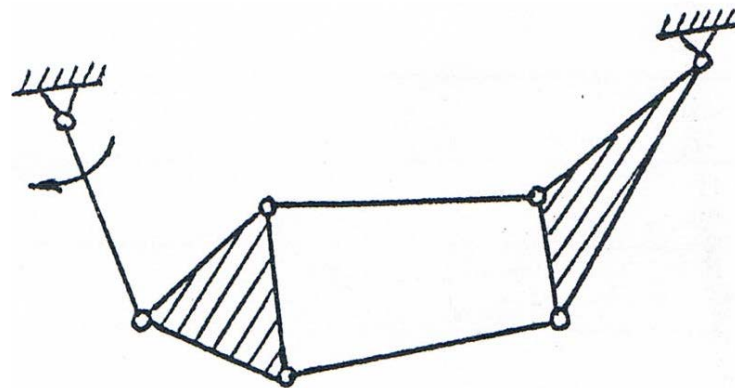
Moteur alternatif

(b) Mécanisme de 2^{ième} classe



Etau limeur

(c) Mécanisme de 3^{ième} classe



(d) Mécanisme de 4^{ième} classe

Figure 8

3.4 Construction des mécanismes articulés 4 barres

Considérons un mécanisme articulé 4 barres composé d'une bielle et de 2 pièces reliées à la base.

Loi de Grashof

Pour un mécanisme 4 barres, la manivelle n'existe que dans le cas où la somme des longueurs de la plus courte et de la plus longue barre est égale ou inférieure à la somme des deux autres.

Si l'on a : $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$

$$r_1 + r_4 \leq r_2 + r_3 \quad (1)$$

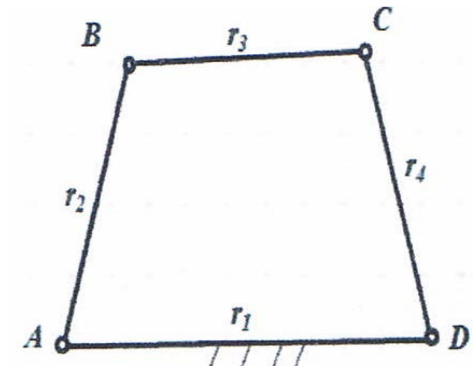


Figure 9

Equation (1) satisfaite \longrightarrow **Mécanisme de Grashof**

Conséquences :

- Si l'une des barres voisines de la plus courte est base, la barre la plus courte est manivelle et la barre opposée à la plus courte est balancier ;
- Si la barre la plus courte est base, on aura 2 manivelles ;
- Si la barre opposée à la plus courte est base, on aura 2 balanciers;

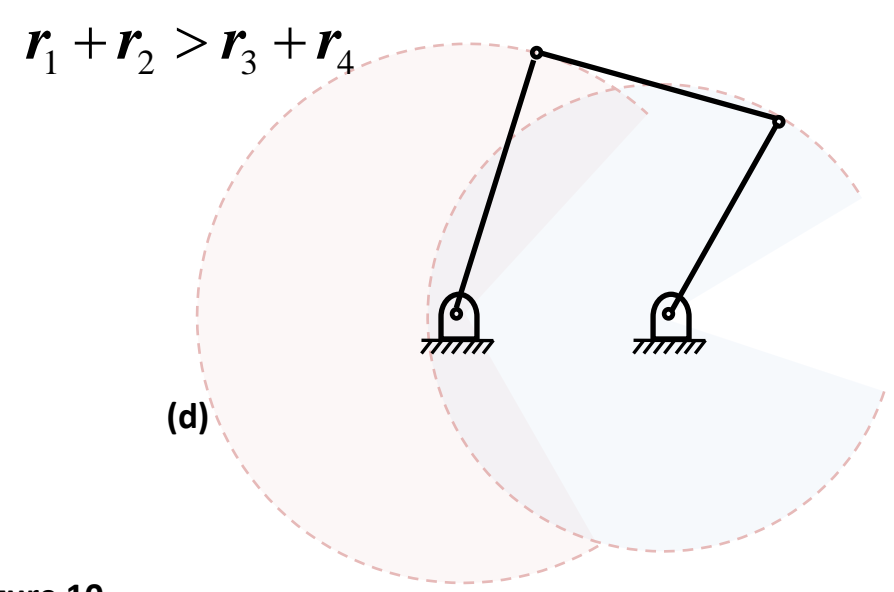
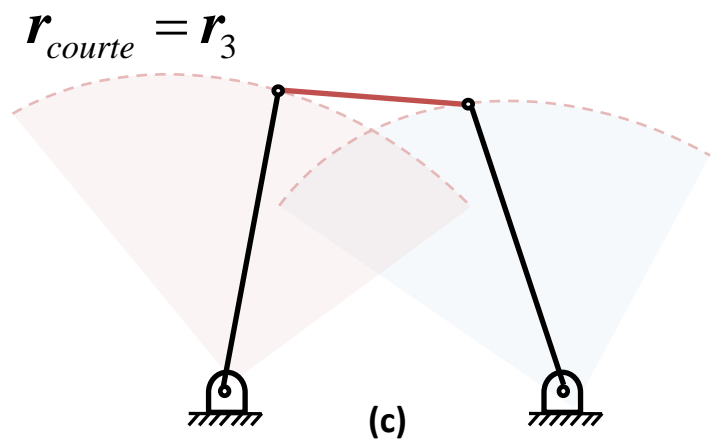
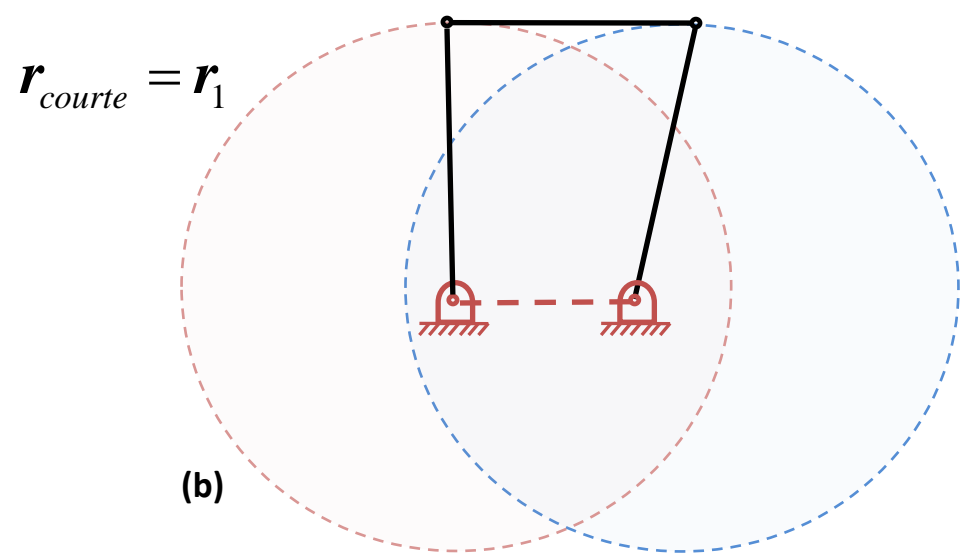
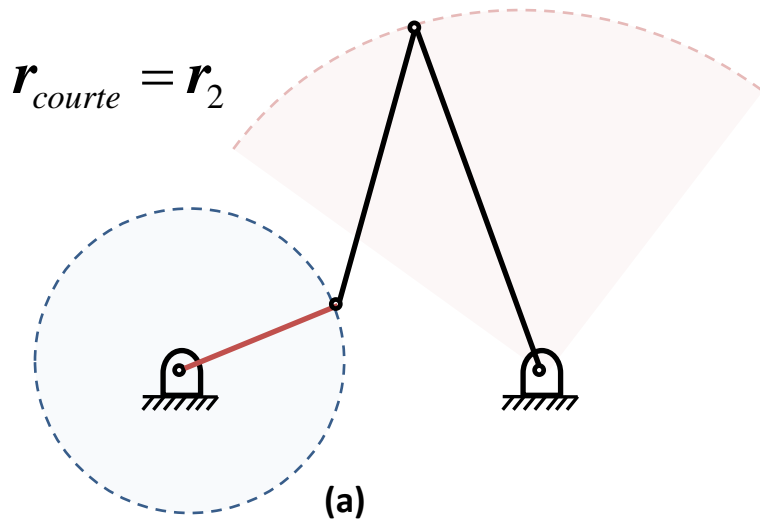
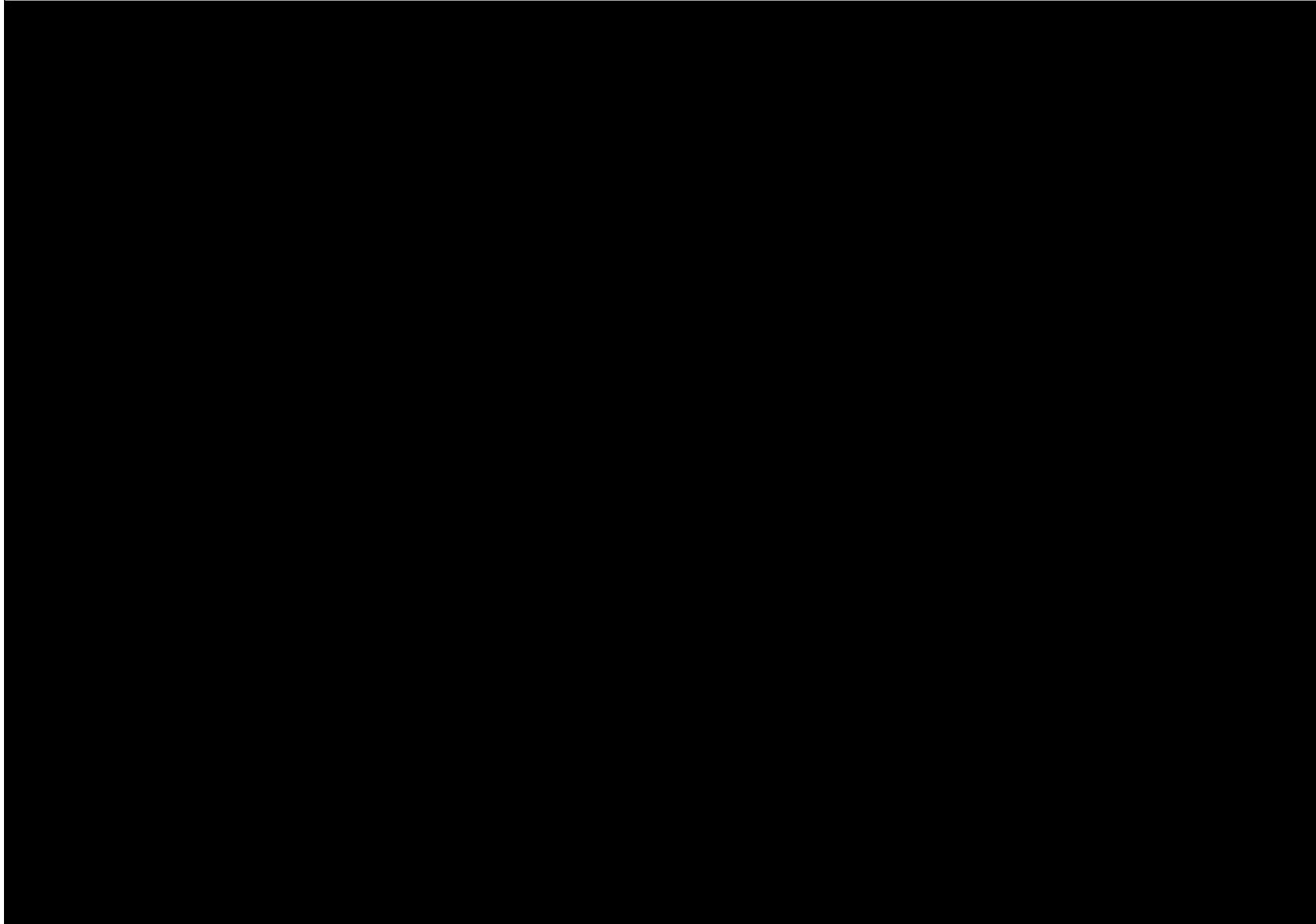


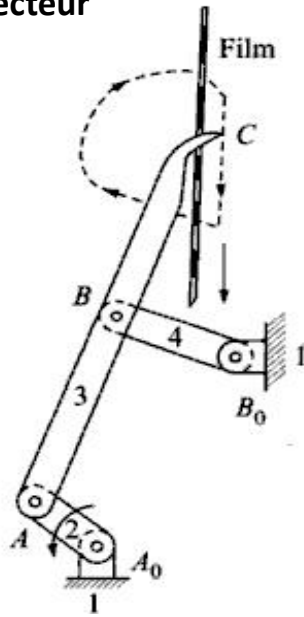
Figure 10

x|-5.800 m y|2.700 m
0

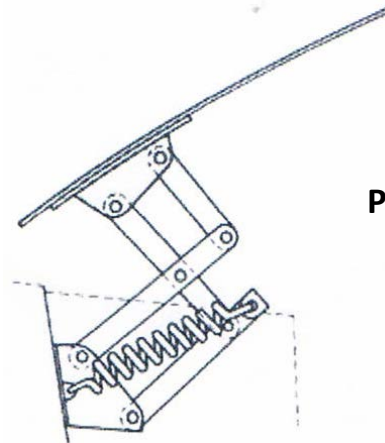
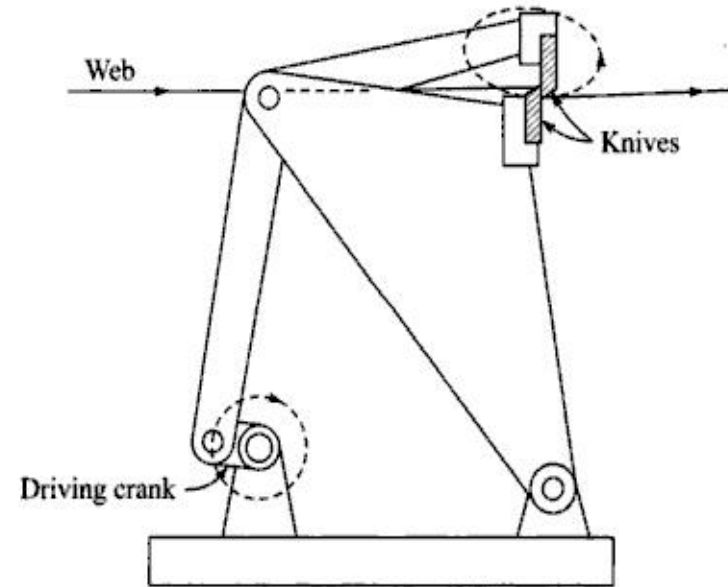


Exemples de mécanismes 4 barres articulées

Un mécanisme d'avance de film d'une caméra / projecteur



Un mécanisme de coupe de tissus



Pédale d'accélérateur

Figure 11

3. Analyse cinématique des mécanismes plans

3.1 Analyse des déplacements des mécanismes plans

3.1.1 Aperçu sur la Méthode graphique

L'étude graphique des mécanismes plans à 1 ddl est relativement facile. Cependant, la précision des solutions obtenues dépend des soins pris lors de la conception géométrique.

Principe :

Sur la figure 12, le point O est choisi comme origine du repère. Le point A est donné par ses coordonnées polaires (r_2, θ_2) . La position du point B est déterminée par l'intersection des deux cercles, de rayon r_4 de centre C et de rayon r_3 de centre A .

En général pour les problèmes plans deux solutions existent, représentées sur le graphique obtenue par les deux points B_1 et B_2

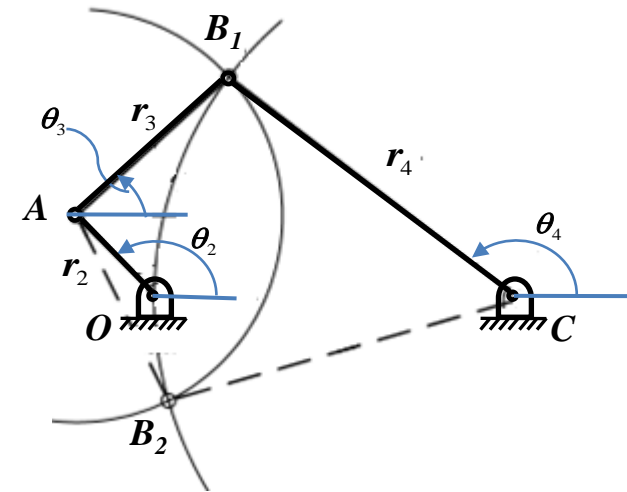


Figure 12

Les paramètres inconnus (les angles θ_3 et θ_4) seront alors directement mesurés sur le graphique.

3.1.2 Méthode analytique

Cette méthode possède plusieurs avantages par rapport à la méthode graphique :

- Plus grande précision ;
- Meilleure adaptation à la programmation sur ordinateur ;
- Automatisation facile pour une analyse complète du mécanisme.

Remarques :

- Dans un mécanisme plan on peut écrire autant d'équations vectorielles qu'on a de cycles.

- Dans la suite du cours, l'écriture des équations de fermeture de boucle, positions, vitesses et accélérations, est basée sur la représentation par les nombres complexes des vecteurs (éq. 6).

Le nombre d'équations indépendantes correspond au nombre de cycles indépendants.

$$\gamma = L - N + 1 \quad (2)$$

On rappelle que le nombre de degré de liberté des mécanismes plans est calculé par la formule de Grubler simplifiée :

$$w = 3n - 2b - h \quad (3)$$

Résolution

- Représenter chaque corps par le vecteur,

$$\vec{r}_k = r_k e^{i\theta} \quad (4)$$

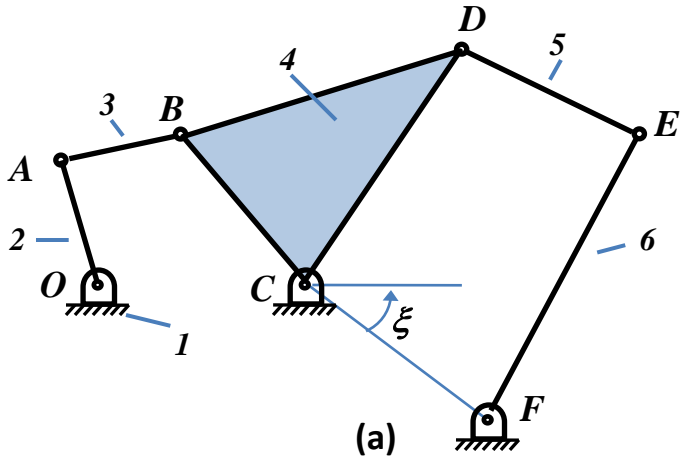
- Écrire les équations de fermeture de boucles ,

$$\sum_{k=1}^N \vec{r}_k = \vec{0} \quad (5)$$

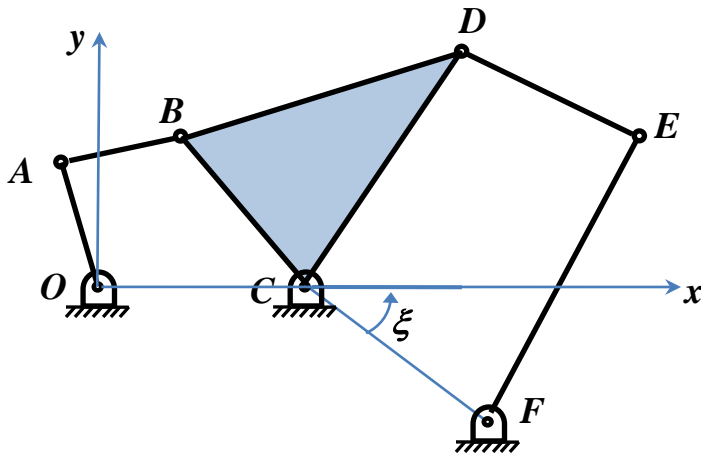
- Séparer les parties imaginaires et réelles pour former 2 équations pour chaque équation vectorielle,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad (6)$$

Exemple 1: Figure 13



(a)



(b)

- Le nombre de cycles indépendants

$$\gamma = 7 - 5 + 1 = 3 \text{ cycles}$$

➔ $OABCO ; CDEFC ; OABDEFO$

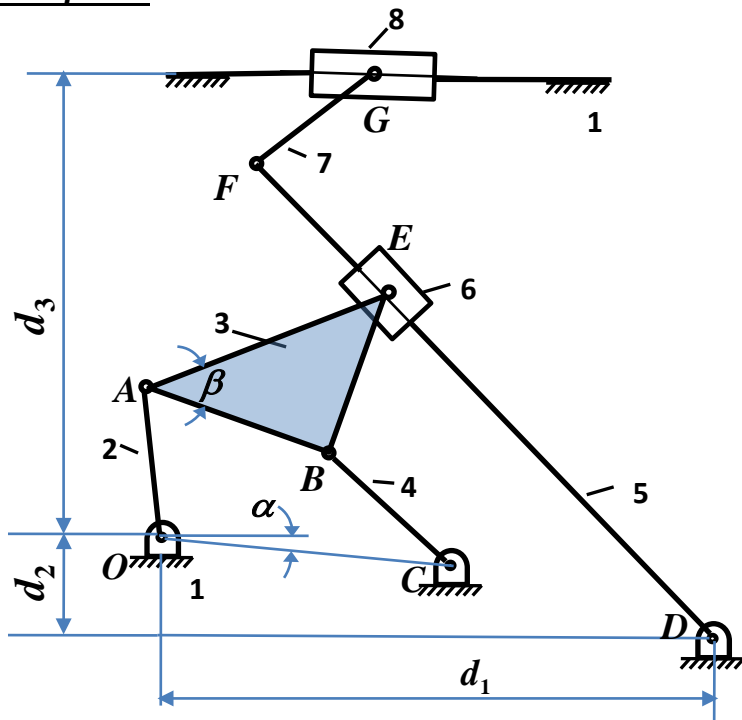
➔ 3 éq^{ns} vectorielles à écrire

- Nombre de ddl :

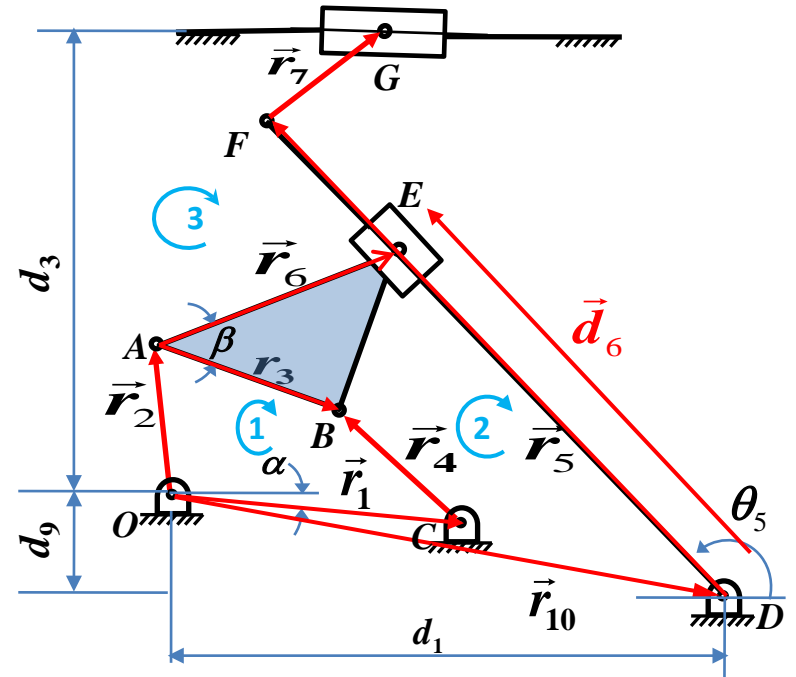
$$w = 3 \times 5 - 2 \times 7 = 1$$

- Paramétrage et écriture des équations de fermeture de boucle :

Exemple 2:



(a)



(b)

Figure 14

Paramètres fixes de
chaque élément

Elément	1	2	3	4	5	7
Paramètres	r_1, r_{10}, d_3, α	r_2	r_3, r_6, β	r_4	r_5	r_7

Paramètres variables du mécanisme

$$\theta_2; \theta_3; \theta_4; d_5; \theta_6; \theta_7; x_8$$

Mobilité du mécanisme

$$w = 3 \times 7 - 2 \times 10 = 1 \text{ ddl}$$

Nombre cyclomatique

$$\gamma = 10 - 8 + 1 = 3 \text{ cycles indépendants}$$

Paramétrage : Figure 14 (b)

Equations vectorielles

$$\text{Cycle 1 : } \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0} \Rightarrow \quad \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_4$$

$$\text{Cycle 2 : } \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DO} = \vec{0} \Rightarrow \quad \vec{r}_2 + \vec{r}_6 = \vec{r}_{10} + \vec{d}_6$$

$$\text{Cycle 3 : } \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GO} = \vec{0} \Rightarrow \quad \vec{r}_2 + \vec{r}_6 + (\vec{r}_5 - \vec{d}_6) + \vec{r}_7 = \vec{r}_8$$

$$\begin{cases} r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} = r_1 e^{-i\alpha} + r_4 e^{i\theta_4} \\ r_2 e^{i\theta_2} + r_5 e^{i(\theta_3+\beta)} = d_1 - d_9 i + d_6 e^{i\theta_5} \\ r_2 e^{i\theta_2} + r_5 e^{i(\theta_3+\beta)} + (r_6 - d_5) e^{i\theta_5} + r_7 e^{i\theta_7} = x_8 + d_3 i \end{cases}$$

6 éq^{ns} scalaires

6 inconnues

Exercice 1:

Faire une analyse de position du mécanisme à coulisse de la figure ci-dessous pour déterminer θ_4 et la distance O_4A . On donne :

$$O_4O_2 = 2286m, \quad O_2A = 114.3mm, \quad \theta_2 = 135^\circ$$

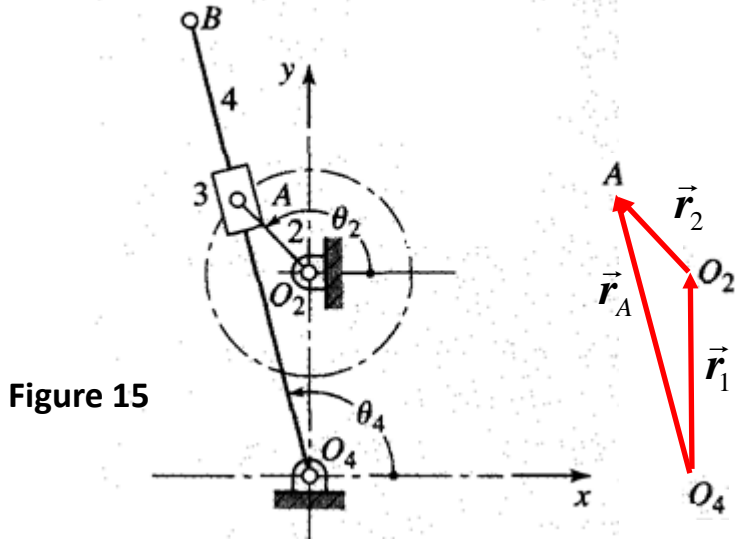


Figure 15

Equation de fermeture de boucle :

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_A = \vec{0} \Rightarrow \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}_A$$

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} = r_A e^{i\theta_4}$$

$$\theta_1 = 90^\circ$$

$$\begin{cases} r_2 \cos \theta_2 = r_A \cos \theta_4 \dots \dots \dots (1) \\ r_1 + r_2 \sin \theta_2 = r_A \sin \theta_4 \dots \dots \dots (2) \end{cases}$$

Input : θ_2

Output : r_A et θ_4

$$r_A = \left(r_2^2 + r_1^2 + 2r_1 r_2 \sin \theta_2 \right)^{1/2}$$

$$\theta_4 = \tan^{-1} \left(\frac{r_1 + r_2 \sin \theta_2}{r_2 \cos \theta_2} \right)$$

A.N. $r_A = 319.80mm$

$$\theta_4 = -75.36^\circ$$

Pratiquement on doit avoir : $\theta_4 = 180^\circ - 75.36^\circ = 104.64^\circ$

Exercice 2:

Résoudre le problème de positions du mécanisme articulé quatre barres de la figure 4, et ce en fonction du paramètre d'entrée et des dimensions cinématiques des pièces.

$$\vec{r}_2 + \vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_4$$

$$r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} = r_1 + r_4 e^{i\theta_4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 = r_1 + r_4 \cos \theta_4 \dots \dots \dots \text{(I)} \\ r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 = r_4 \sin \theta_4 \dots \dots \dots \text{(II)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 = r_1 + r_4 \cos \theta_4 \dots \dots \dots \text{(I)} \\ r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 = r_4 \sin \theta_4 \dots \dots \dots \text{(II)} \end{array} \right.$$

Après développement on obtient une équation linéaire de la forme:

$$a \cos \theta_3 + b \sin \theta_3 = c \dots \dots \dots \text{(III)}$$

Ou a, b et c sont tous non nuls :

$$\left. \begin{array}{l} a = 2r_2 r_3 \cos \theta_2 - 2r_1 r_3 \\ b = 2r_2 r_3 \sin \theta_2 \\ c = r_4^2 - r_2^2 - r_3^2 + r_1^2 + 2r_1 r_2 \cos \theta_2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots \text{(IV)}$$

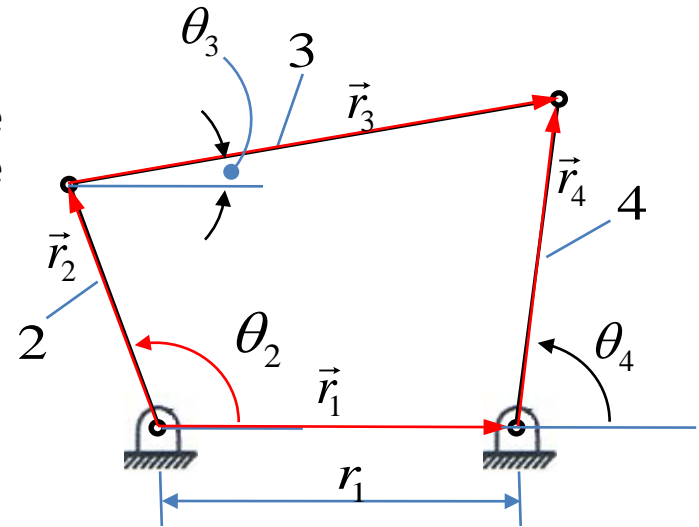


Figure 16

Solution : Voir TD

3.2 Analyse des vitesses et des accélérations des mécanismes plans

3.2.1 Méthode analytique

a- Vitesses

Les avantages et les inconvénients sont les mêmes que ceux présentés lors de l'analyse des déplacements.

Toutes les données géométriques étant connues, le nombre cyclomatique déterminé, on écrit les équations vectorielles correspondants aux cycles.

$$\sum_{k=1}^n \vec{r}_k = \vec{0} \quad (7)$$

L'étude des vitesses revient à dériver ces équations par rapport au temps pour donner :

$$\sum_{k=1}^n \frac{d}{dt}(\vec{r}_k) = \vec{0} \quad (8)$$

Dans le cas général, la dérivée de \vec{r}_k donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{r}_k) &= \dot{r}_k e^{i\theta_k} + r_k \cdot i\dot{\theta}_k e^{i\theta_k} \\ &= (\dot{r}_k + i\omega_k) e^{i\theta_k} \end{aligned} \quad (9)$$

Remarque : Apparition de 2 composantes de vitesses

$$\begin{cases} r_k \cdot i\dot{\theta}_k e^{i\theta_k} \rightarrow \text{vitesse tangentielle} \\ \dot{r}_k e^{i\theta_k} \rightarrow \text{vitesse radiale} \end{cases}$$

b- Accélération

L'étude des accélération revient à dériver à considérer la 2^{ième} dérivée par rapport au temps des équations de fermeture de boucle.

$$\sum_{k=1}^n \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_k) = \vec{0} \quad (10)$$

En considérant le vecteur position de la $k^{\text{ième}}$ pièce :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_k) &= \frac{d}{dt} (\dot{r}_k e^{i\theta_k} + r_k \cdot i\dot{\theta}_k e^{i\theta_k}) \\ &= \ddot{r}_k e^{i\theta_k} + \dot{r}_k \cdot i\dot{\theta}_k e^{i\theta_k} + \dot{r}_k \cdot i\dot{\theta}_k e^{i\theta_k} + r_k \cdot i\ddot{\theta}_k e^{i\theta_k} + r_k \cdot i^2 \dot{\theta}_k^2 e^{i\theta_k} \\ &= \ddot{r}_k e^{i\theta_k} + 2i\dot{r}_k \omega_k e^{i\theta_k} + ir_k \alpha_k e^{i\theta_k} - r_k \omega_k^2 e^{i\theta_k} \end{aligned} \quad (11)$$

$\omega_k = \dot{\theta}_k \rightarrow$ vitesse angulaire

$\alpha_k = \ddot{\theta}_k \rightarrow$ accélération angulaire

Remarque : l'équation 11 met en évidence 4 types d'accélération, voir le résumé de la figure suivante.

Résumé des équations analytiques de la cinématique,

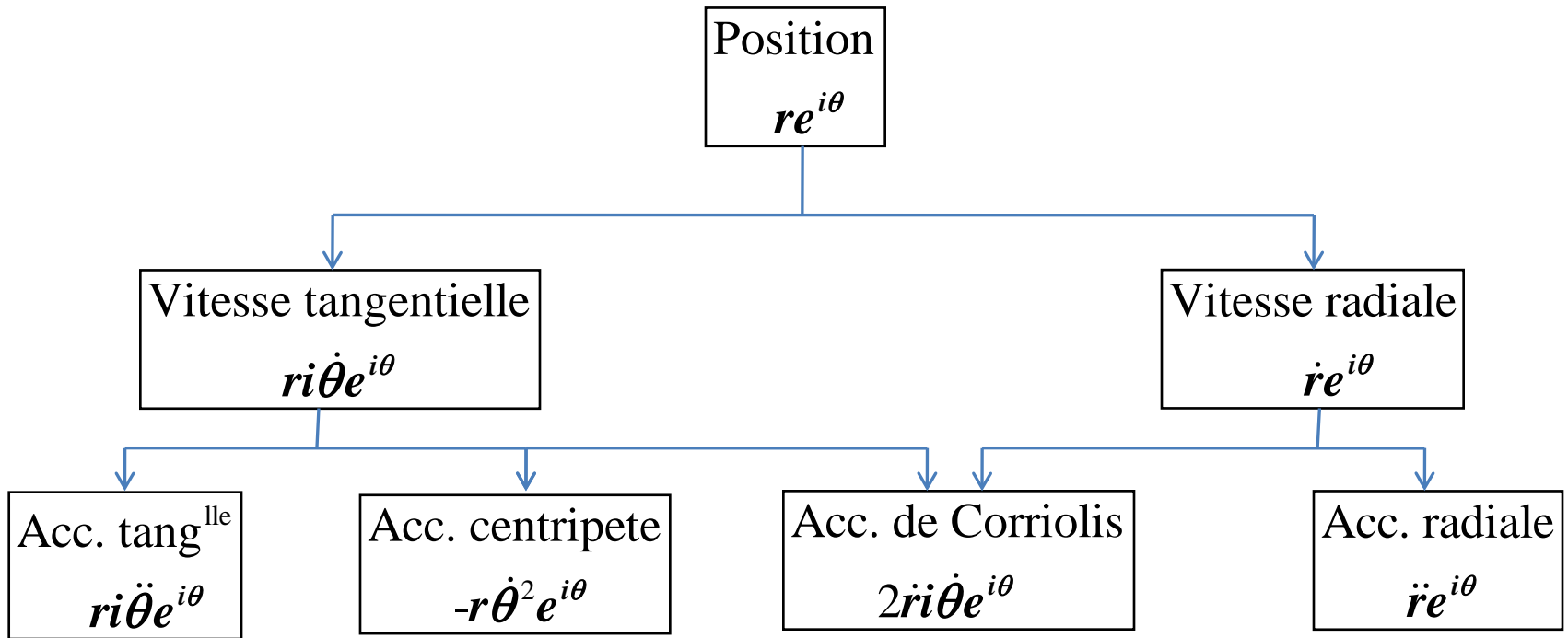


Figure 17

3.2.1 Méthode Graphique

a. Epure des vitesses

La méthode graphique est très utile pour l'analyse des vitesses des mécanismes plans, elle permet de donner rapidement des informations nécessaires sur le mouvement des mécanismes.

Soit un solide (S) sur lequel on considère 2 points A et B. d'après la relation de composition des vitesses (Torseurs) :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(S) = \vec{V}_A + \vec{\Omega}(S) \wedge \overrightarrow{AB} \quad (12)$$

Soit \vec{V}_{BA} la vitesse relative du point B par rapport au point A.

$$\vec{V}_{BA} = \vec{\Omega}(S) \wedge \overrightarrow{AB}$$

$\vec{\Omega}$: Vecteur vitesse de rotation;

Note : \vec{V}_{BA} est orthogonale à \overrightarrow{AB}

Puisque le mouvement de (S) est plan, on doit avoir : $\vec{\Omega} = \omega \vec{k}$

L'épure des vitesses du solide correspond à la représentation graphique de l'équation (12), que l'on peut écrire :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

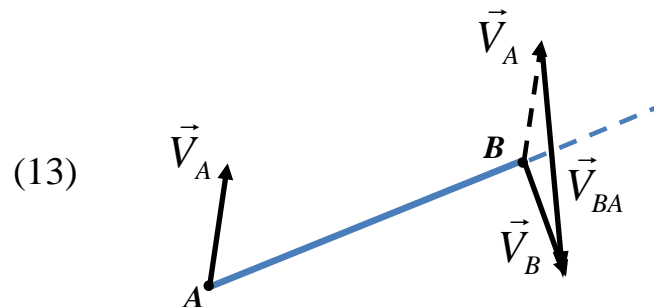
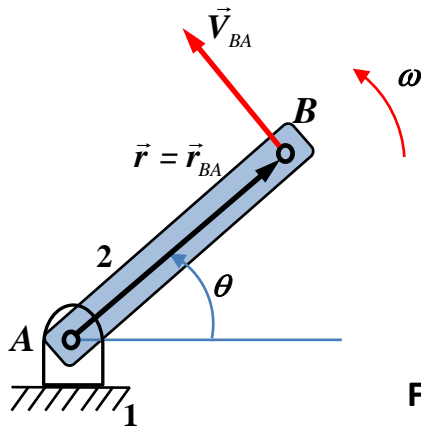


Figure 18

Interprétation en utilisant la représentation polaire complexe



$$\vec{r} = \vec{r}_{BA} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\vec{V}_{BA} = \dot{\vec{r}}_{BA} = r\omega(-\sin \theta + i \cos \theta)$$

Figure 19

Exemple 1 : Analyse graphique du problème de vitesses d'un mécanisme articulé 4 barres (Figure 19).

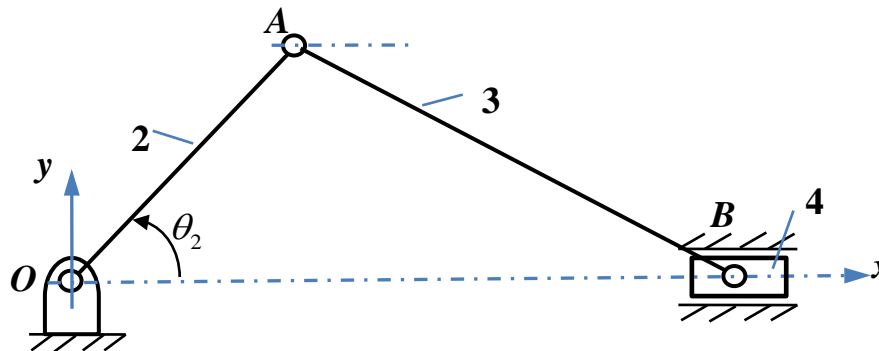
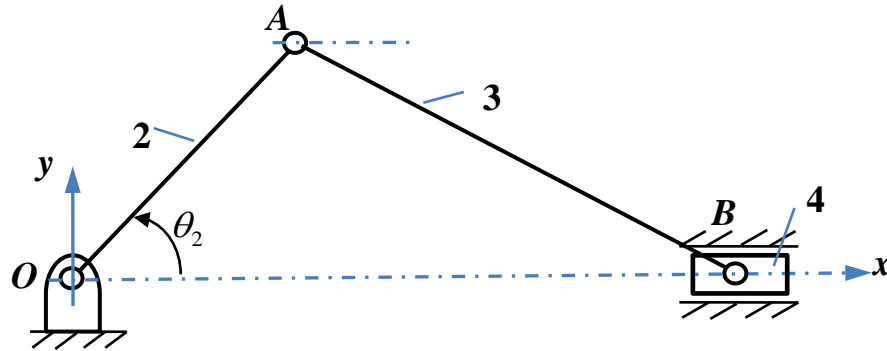


Figure 20

Exemple 1 : Analyse graphique du problème de vitesses d'un mécanisme articulé 4 barres (Figure 19).



$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

$$\parallel \overrightarrow{Ox} \quad \perp \overrightarrow{OA} \quad \perp \overrightarrow{AB}$$

$$? \quad r_2 \omega_2 \quad ?$$

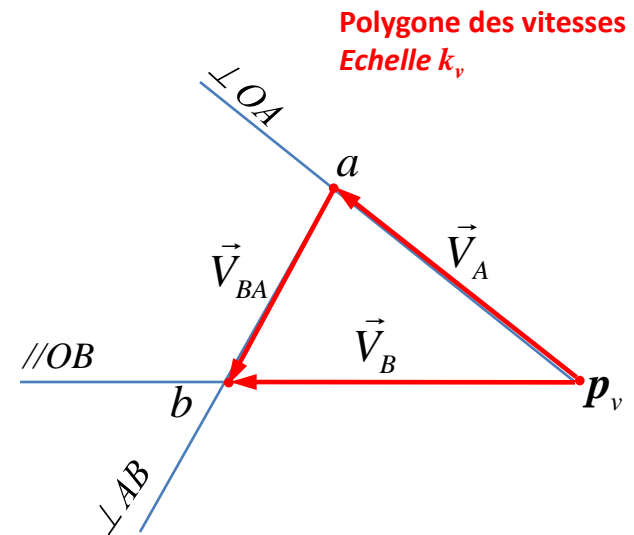
$$V_A = r_2 \omega_2 = \dots \Rightarrow \text{sur l'épure } p_v a \text{ [mm]}$$

$$\text{Soit } k_v = \frac{V_A}{p_v a} \left[\frac{\text{mm/s}}{\text{mm}} \right] \rightarrow \text{Echelle des vitesses}$$

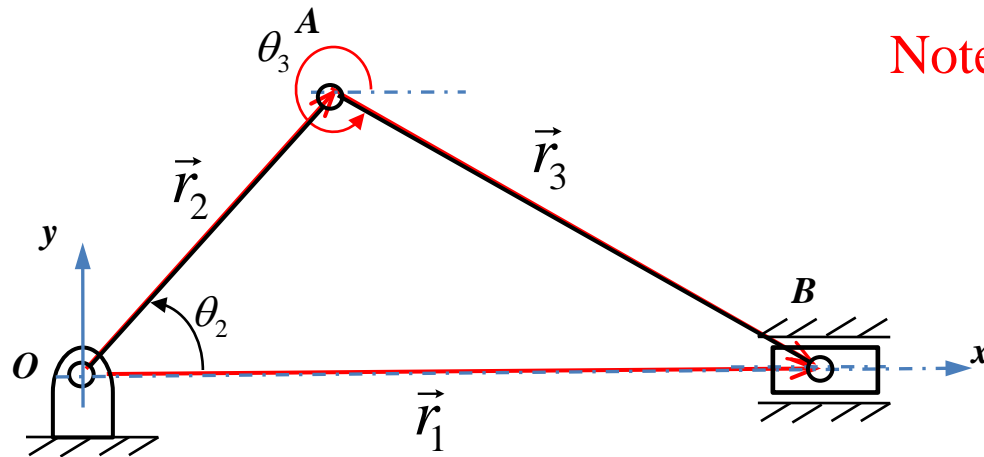
$$V_B = p_v b \cdot k_v = \dots \text{ mm/s}$$

$$V_{BA} = ab \cdot k_v = \dots \text{ mm/s}$$

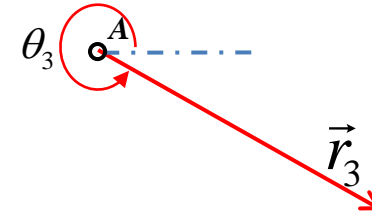
$$\omega_3 = \frac{V_{BA}}{r_3} = \dots \text{ rad/s}$$



Méthode analytique



Notez la représentation de l'angle θ_3



$$\vec{r}_2 + \vec{r}_3 = \vec{r}_1$$

$$r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} = r_1 \Rightarrow \begin{cases} r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 = r_1 \\ r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta_3 \text{ et } r_1$$

$$r_2 i \dot{\theta}_2 e^{i\theta_2} + r_3 i \dot{\theta}_3 e^{i\theta_3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 = \dot{r}_1 \\ r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + r_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_2 \omega_2 \sin \theta_2 + r_3 \omega_3 \sin \theta_3 = \dot{r}_1 \\ r_2 \omega_2 \cos \theta_2 + r_3 \omega_3 \cos \theta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_3 = \frac{-r_2 \omega_2 \cos \theta_2}{r_3 \cos \theta_3} & \rightarrow \text{vitesse angulaire de la bielle} \\ \dot{r}_1 = r_2 \omega_2 \sin \theta_2 - r_2 \omega_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3 & \rightarrow \text{vitesse du piston} \end{cases}$$

b. Epure des accélérations

Considérons un mécanisme bielle – manivelle représenté à une échelle donnée (Exemple 1, figure 20). Le problème consiste à trouver l'accélération d'un point du coulisseau 4 et l'accélération de la bielle 3, dans la position représentée

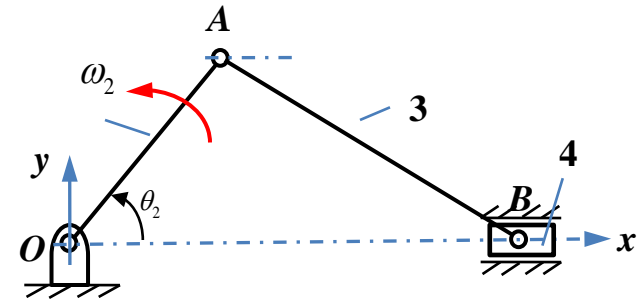


Figure 21

La construction de l'épure des vitesses à permis de déterminer θ_3 et r_1 pour la position considérée .
On suppose que : $\omega_2 = cte$

Le problème se ramène à la résolution graphique de l'équation :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \quad (14)$$

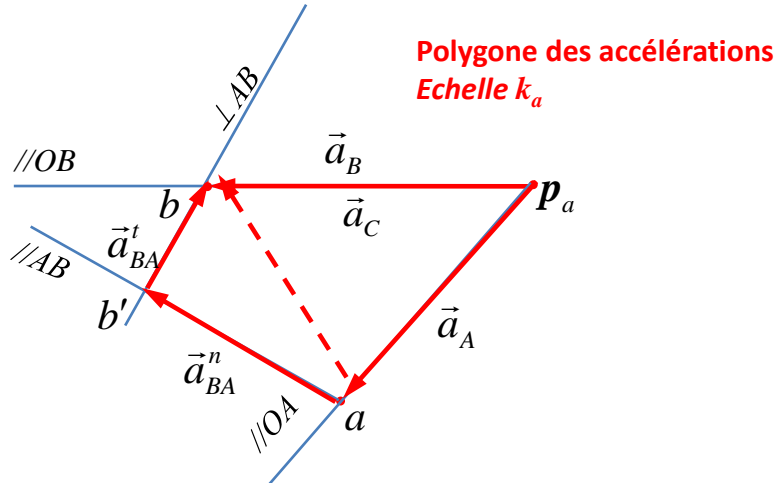
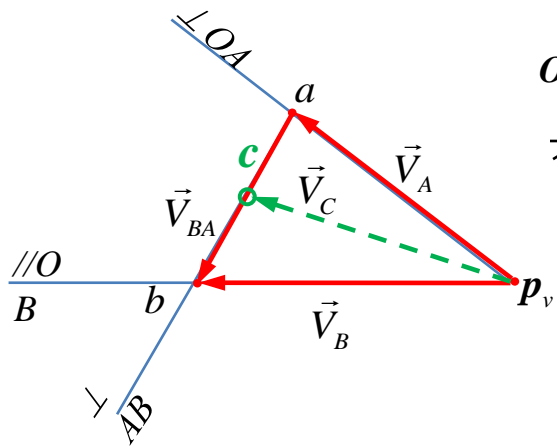
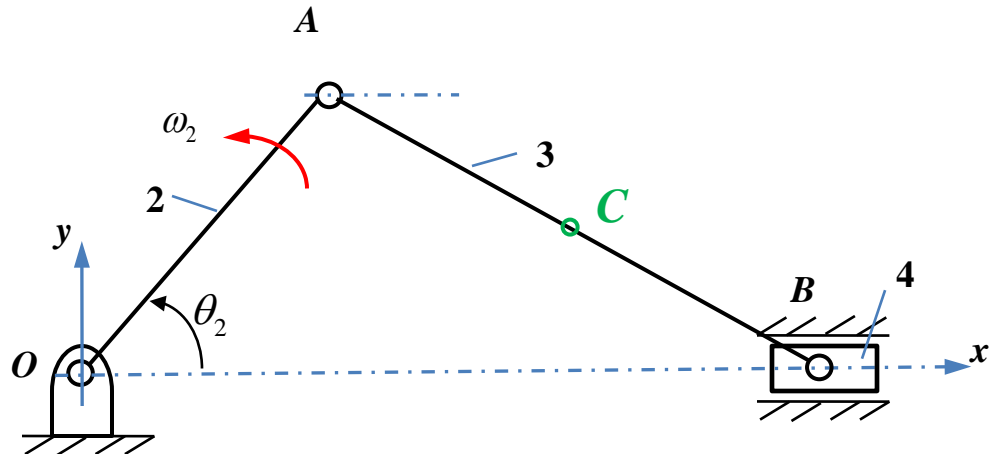
Chaque vecteur accélération peut être décomposé en une composante normale et une composante tangentielle.

$$\vec{a}_B^t + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A^t + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n \quad (15)$$

Pour le système considéré :

$$B \text{ possède une trajectoire rectiligne} \Rightarrow a_B^n = 0$$

$$\text{pièce 2, } \omega_2 = cte \Rightarrow a_A^t = 0$$



Polygone des accélérations
Echelle k_a

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$$

$$\parallel \vec{OB} \quad \parallel \vec{AO} \quad \parallel \vec{BA} \quad \perp \vec{BA}$$

$$? \quad r_2 \omega_2^2 \quad V_{BA}^2 / r_3 \quad ?$$

$a_A = r_2 \omega_2^2 = \dots \Rightarrow$ sur l'épure $p_a a$ [mm]

Soit $k_a = \frac{a_A}{p_a a} \left[\frac{mm/s^2}{mm} \right] \rightarrow$ Echelle des vitesses

$a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{r_3} = r_3 \omega_3^2 = \dots mm/s^2 \rightarrow$ sur l'épure $ab' = \frac{a_{BA}^n}{k_a}$

$a_{BA}^t = bb' \cdot k_a = \dots mm/s^2$

$\alpha_3 = \frac{a_{BA}^t}{AB} = \frac{a_{BA}^t}{r_3} \dots rad/s^2 \rightarrow$ accélération angulaire de la bielle

$a_B = p_a b \cdot k_a = \dots mm/s^2 \rightarrow$ accélération du piston

Synthèse sur l'analyse des accélérations.

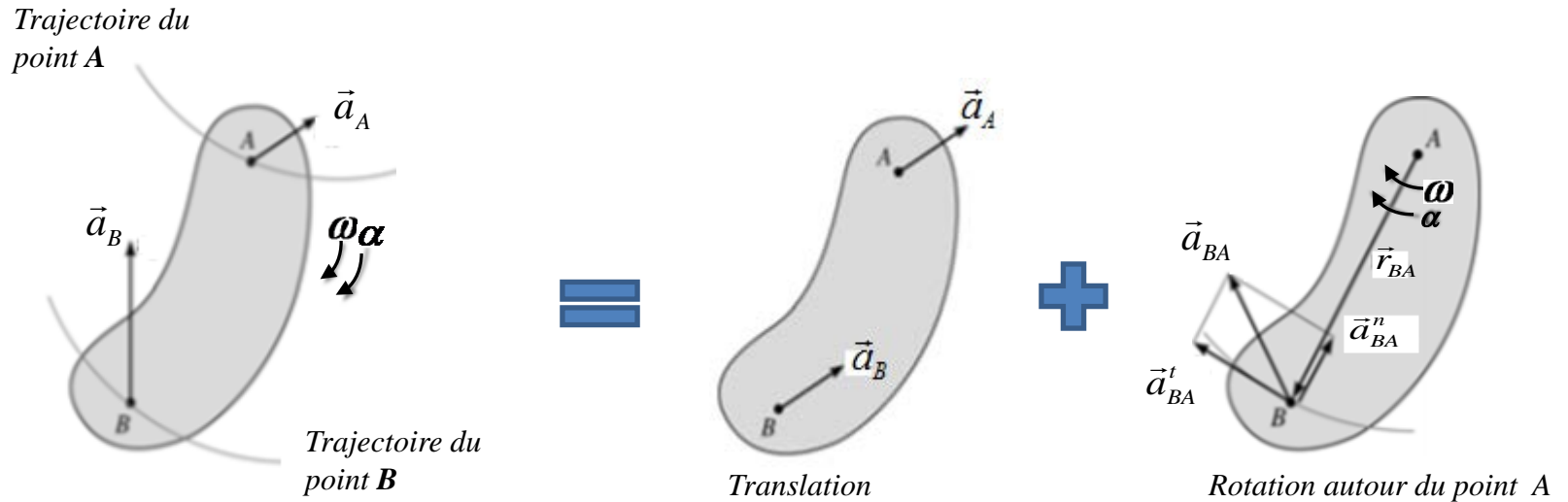


Figure 22

$$\vec{a}_{BA}^n = -\omega^2 \vec{r}_{BA} \rightarrow \text{Acc. normale (centripete)}$$

$$\vec{a}_{BA}^t = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_{BA} = \alpha r_{BA} \rightarrow \text{Acc. tangentielle, } \perp \text{ à } \overline{AB}$$

$\omega \rightarrow$ Vitesse angulaire

$\alpha \rightarrow$ Accélération angulaire

3.2.2 Commentaires sur les vitesses et les accélérations relatives

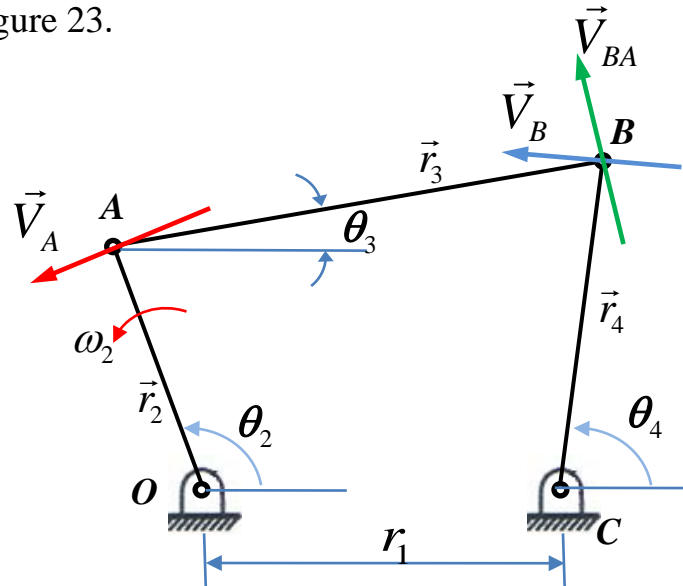
a. Vitesse relative

Il y a quatre cas où la vitesse relative est considérée (bien que seulement 3 ne sont pas triviaux).

	Même Point	Différentes positions
Même pièce	Cas 1 Trivial	Cas 2 Mouvement différent
Différentes pièces	Cas 3 Mouvement relatif	Cas 4 Mouvement différent & relatif

Exemple : Cas 2

2 points différents pris sur la même pièce. Etude de la vitesse du point **B** par rapport au point **A** du mécanisme 4 barres articulées de la figure 23.



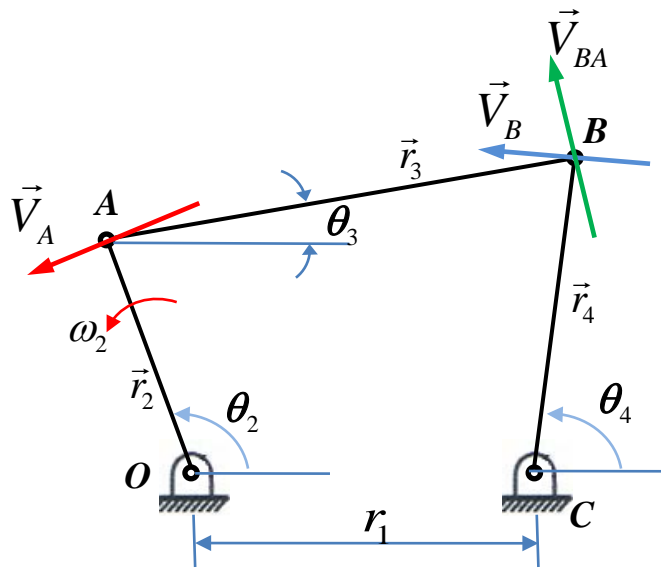
$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

\vec{V}_A : vitesse absolue du point A

\vec{V}_B : vitesse absolue du point B

\vec{V}_{BA} : vitesse relative de B par rapport au point A

Figure 23



Donc, pour le barre rigide 3, on doit avoir :

De même, pour les pièces 2 et 4 on peut écrire :

$$\vec{r}_{BA} = r_{BA} e^{i\theta_{BA}} \rightarrow \text{dans le cas considéré : } \vec{r}_3 = r_3 e^{i\theta_3}$$

$$\vec{V}_{BA} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{BA}) = \dot{r}_{BA} e^{i\theta_{BA}} + r_{BA} \frac{d}{dt}(e^{i\theta_{BA}})$$

$$\vec{V}_{BA} = \dot{r}_{BA} e^{i\theta_{BA}} + r_{BA} (i\omega_{BA}) \frac{d}{dt}(e^{i\theta_{BA}})$$

toujours nul pour les barres rigides

Equivalente à une rotation de 90° dans le sens de ω_{BA} c-à-d ω_3

$$\vec{V}_{BA} = r_3 \omega_3, \perp \text{ à } \vec{r}_3$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{V}_{AO} = \omega_2 r_2 (ie^{i\theta_2})$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_O + \vec{V}_{BO} = \omega_4 r_4 (ie^{i\theta_4})$$

Exemple : Cas 3

Points confondus sur différentes pièces.

Se produit souvent pour les liaisons glissières (Figure 24) les vérins, les pistons et les cames :

- Deux points sur des liaisons différentes occupent momentanément le même point dans le plan
- Chacun a une vitesse absolue différente, donc une vitesse relative existe

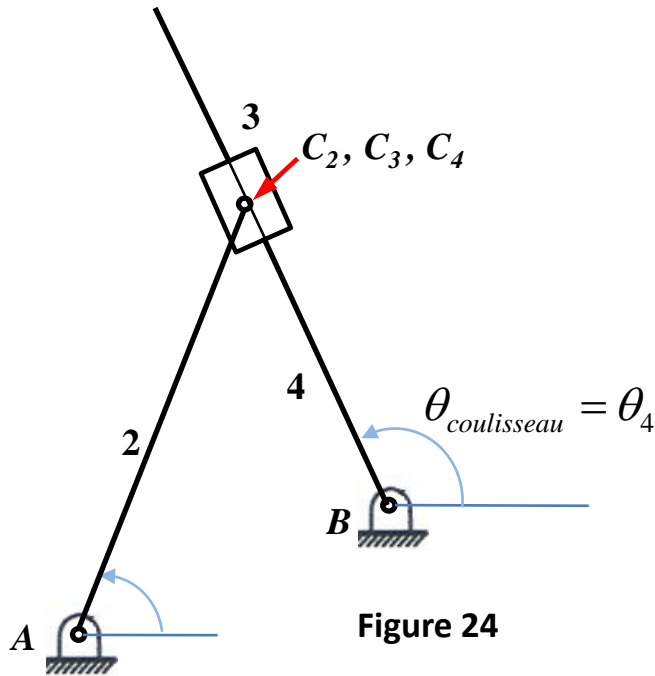


Figure 24

- Calcul de la vitesse du coulisseau (relative), $\vec{V}_{C_3C_4}$

Par un raisonnement similaire on peut penser à la dérivée du vecteur position relative, $\vec{r}_{C_3C_4}$

Comment exprimer ce vecteur pour deux points coïncidents?

Intuitivement, nous pouvons imaginer un déplacement de C_3 par rapport à C_4 , puis représenter $\vec{r}_{C_3C_4}$

Ce vecteur est dirigé suivant la tangente à la trajectoire du coulisseau, mais ayant une longueur nulle.

$$\vec{r}_{C_3C_4} = r_{C_3C_4} e^{i\theta_{coul}}$$

$$\vec{V}_{C_3C_4} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{C_3C_4}) = \dot{r}_{C_3C_4} e^{i\theta_{coul}} + r_{C_3C_4} \omega_{coul} (ie^{i\theta_{coul}}) \quad \xrightarrow{\text{on obtient}} \quad \vec{V}_{C_3C_4} = \dot{r}_{C_3C_4} e^{i\theta_{coul}} \quad (16)$$

Vitesse instantanée du coulisseau

= 0, même point (confondus)

Notons que dans cette expression simple, il est parfois difficile de trouver l'angle de tangence du coulisseau 3.

b. Accélération relative

Nous considérons le système complexe correspondant au Cas 3 (Figure 24) : Points confondus sur différentes pièces. On suit la même procédure que celle appliquée pour les vitesses relatives :

Soit $\vec{r}_{C_2C_4} \parallel \vec{r}_{C_4}$, donc :

$$\vec{r}_{C_2C_4} = \vec{r}_{C_2C_4} e^{i\theta_{C_4}} = \vec{r}_{C_2C_4} e^{i\theta_4}$$

$$\vec{V}_{C_2C_4} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{C_2C_4}) = \underbrace{\dot{r}_{C_2C_4}}_{(*)} e^{i\theta_4} + r_{C_2C_4} \underbrace{(i\omega_4)}_{(**)} e^{i\theta_4}$$

Calcul de l'accélération.

$$\vec{a}_{C_2C_4} = \frac{d}{dt}(\vec{V}_{C_2C_4}) = \underbrace{\ddot{r}_{C_2C_4} e^{i\theta_4} + i\omega_4 \dot{r}_{C_2C_4} e^{i\theta_4}}_{\frac{d}{dt}(*)} + \underbrace{i\omega_4 \dot{r}_{C_2C_4} e^{i\theta_4} + r_{C_2C_4} (i\alpha_4) e^{i\theta_4} + (i\omega_4)^2 r_{C_2C_4} e^{i\theta_4}}_{\frac{d}{dt}(**)}$$

Après arrangement :

$$\vec{a}_{C_2C_4} = \ddot{r}_{C_2C_4} e^{i\theta_4} + 2\omega_4 \dot{r}_{C_2C_4} (ie^{i\theta_4}) + r_{C_2C_4} \alpha_4 (ie^{i\theta_4}) - r_{C_2C_4} \omega_4^2 (e^{i\theta_4})$$

De même que pour les vitesses, les 2 derniers termes sont nuls puisque : $r_{C_2C_4} = 0$

$$\vec{a}_{C_2C_4} = \underbrace{\ddot{r}_{C_2C_4} e^{i\theta_4}}_{\substack{\text{acc. du coulisseau} \\ \text{dir.: trajectoire coulisseau}}} + \underbrace{2\omega_4 \dot{r}_{C_2C_4} (ie^{i\theta_4})}_{\substack{\text{acc. de Coriolis} \\ \text{dir.: rotation de } 90^\circ \\ \text{a partir de } \theta_3 = \theta_4}} = \vec{a}_{C_2C_4}^s + \vec{a}_{C_2C_4}^c \quad (17)$$

Pour la représentation graphique, on note :

$$\vec{a}_{C_2C_4} = \vec{a}_{C_2C_4}^s + \vec{a}_{C_2C_4}^c + \cancel{\vec{a}_{C_2C_4}^t} + \cancel{\vec{a}_{C_2C_4}^n}$$

$$\vec{a}_{C_2C_4}^c = 2\omega_4 \dot{r}_{C_2C_4} (ie^{i\theta_4})$$

(18)



Accélération de Coriolis dont le sens dépend des signes de la vitesse linéaire et angulaire du coulisseau :

$$V_3 = \dot{r}_{C_2C_4} \text{ et } \omega_3, \text{ (avec dans le cas considéré } \omega_3 = \omega_4)$$

Note : Il est important de connaître le sens et la direction de l'accélération de Coriolis, surtout dans la construction graphique du polygone des accélérations

La figure suivante représente le sens et la direction de l'accélération de Coriolis.

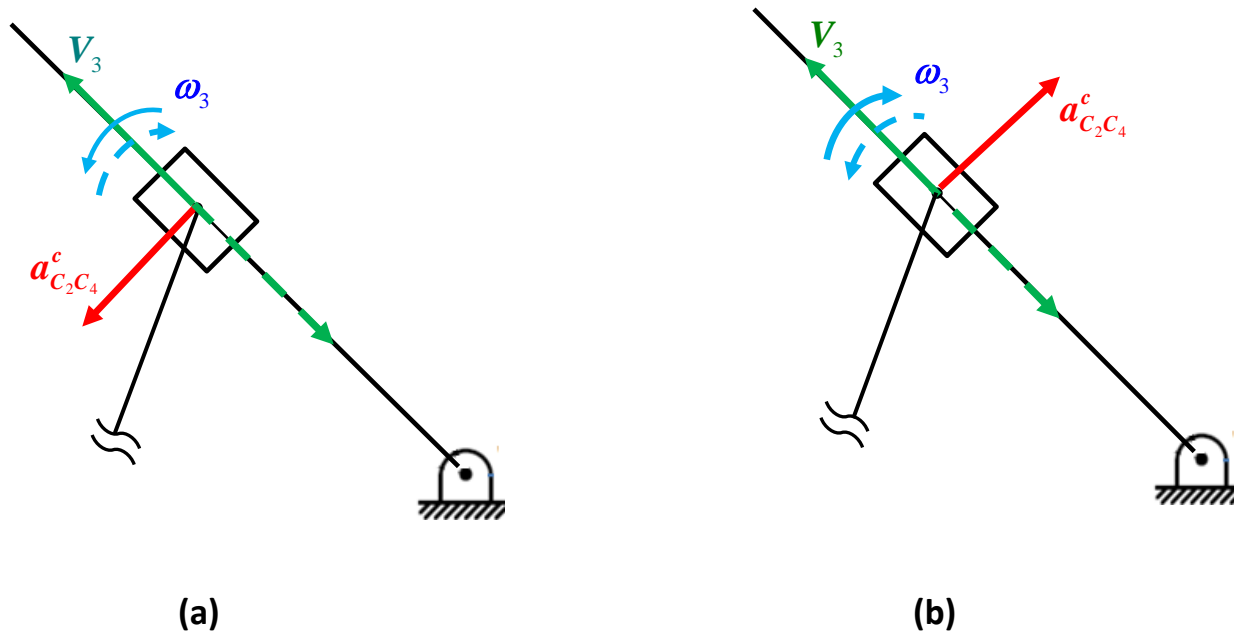


Figure 25 : Sens et direction de l'accélération de Coriolis

4. Avantage mécanique. Coefficient de retour rapide

4.1 Avantage mécanique d'un mécanisme

L'un des critères le plus important dans la conception des mécanismes est la capacité de celui-ci de transmettre un effort (couple ou force). Si dans certains mécanismes, comme le train d'engrenage, le rapport entre couple d'entrée et couple de sortie est constant, pour les mécanismes articulés ceci n'est pas toujours vrai.

On cherche à déterminer ce rapport entre l'effort d'entrée et l'effort de sortie pour une position donnée du mécanisme.

Si on néglige toute forme de dissipation dans un mécanisme on obtient un système conservatif. On peut alors écrire :

$$P = \Gamma_e \omega_e = \Gamma_s \omega_s \quad (19)$$

Cette équation peut encore s'écrire :

$$P = F_e V_e = F_s V_s$$

On définit l'avantage mécanique du mécanisme par :

$$\lambda = \frac{F_s}{F_e} \quad (20)$$

avec:

P la puissance transmise

Γ_e le couple d'entrée

Γ_s le couple de sortie

ω_e la vitesse de rotation d'entrée

ω_s la vitesse de rotation de sortie

Et en utilisant la loi de conservation de la puissance :

$$\lambda = \frac{V_e}{V_s} = \frac{r_e \omega_e}{r_s \omega_s} \quad (21)$$

4.2 Coefficient de retour rapide

Le mouvement rectiligne répété est couramment obtenu à l'aide de vérins pneumatiques et hydrauliques, d'une vis stationnaire et d'un écrou mobile, d'entraînements rectilignes utilisant des moteurs réversibles ou des engrenages réversibles, ainsi que des mécanismes à came et suiveur. Une variété de liaisons typiques pour obtenir un mouvement alternatif sont montrées sur les Figures 26 a, b et c .

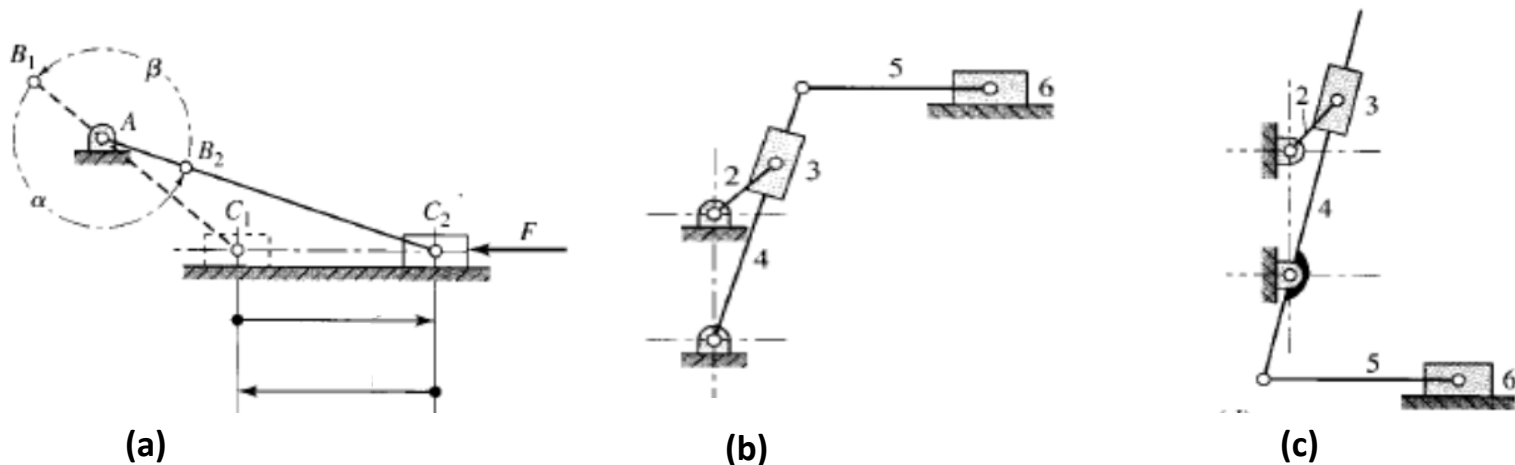


Figure 26

Lors des opérations répétitives exécutées par ce genre de machines, il y a généralement une partie du cycle lorsque le mécanisme est en charge, appelé course d'avance ou de travail, et une partie du cycle, appelée course de retour, lorsque le mécanisme ne fonctionne pas mais revient simplement pour pouvoir répéter l'opération.

Dans le mécanisme de la figure 26 a, il peut être nécessaire de travailler pour vaincre la charge F alors que le piston se déplace vers la droite de C_1 à C_2 mais pas pendant son retour à la position C_1 car la charge peut avoir été enlevé. Dans de telles situations, afin de minimiser les exigences de puissance du moteur et d'éviter de perdre un temps précieux, il est souhaitable de concevoir le mécanisme de manière à ce que le piston se déplace beaucoup plus vite que pendant la course de travail c'est-à-dire, utiliser une fraction plus élevée du temps de cycle pour faire le travail que pour revenir.

Pour de tel mécanisme, on définit le coefficient de retour rapide par la formule :

$$Q = \frac{\text{temps de la course d'avance}}{\text{temps de la course de retour}} \quad (22)$$

Pour le mécanisme de la figure 26 (a) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Temps de la course d'avance} = \frac{\alpha}{2\pi} T \\ \text{Temps de la course de retour} = \frac{\beta}{2\pi} T \end{array} \right\} \Rightarrow Q = \frac{\alpha}{\beta} \quad (23)$$

Exercice

La figure 27 montre un mécanisme de retour rapide à manivelle et balancier. A l'instant où l'angle OAB vaut 110° , utiliser la méthode graphique pour :

- déterminer la vitesse et l'accélération du piston C ;
- calculer le coefficient de retour rapide et l'avantage mécanique du mécanisme.

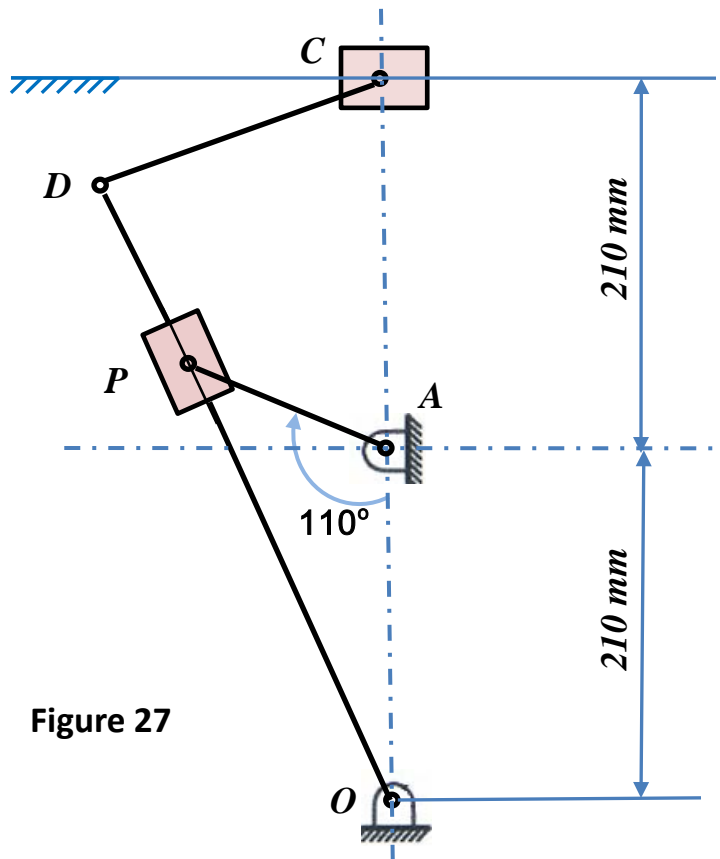


Figure 27

Données :

Position à l'échelle : $1\text{ cm} = 100\text{ mm}$

Longueur de la manivelle : $CP = 105\text{ mm}$

Vitesse de rotation de la manivelle : $\omega = 9.42\text{ rad/s}$

Longueur du balancier : $OD = 420\text{ mm}$

Pièce intermédiaire : $DE = 165\text{ mm}$