

UCBL – L1 PCSI – UE TMB

Techniques Mathématiques de Base

Alessandra Frabetti et Léon Matar Tine

Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques

<http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/TMB/>

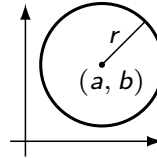
Coniques: cercle, ellipse

Définition: Une conique est une courbe plane obtenue en prenant l'intersection entre un cône de révolution et un plan. Analytiquement, on définit une conique comme l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

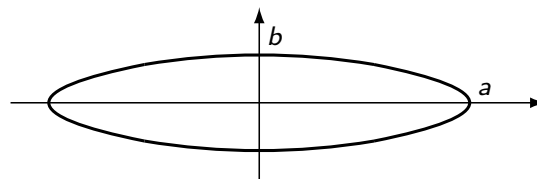
• **Cercle:** $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

centre (a, b) , rayon r



• **Ellipse:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

centre $(0, 0)$, axes $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



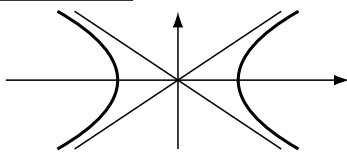
Coniques: hyperbole, parabole

• **Hyperbole:**

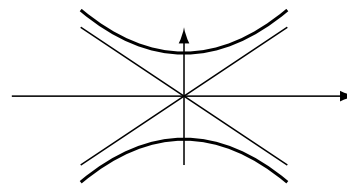
centre $(0, 0)$, axes $\vec{i}$ et $\vec{j}$, asymptotes $y = \pm \frac{b}{a}x$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

cas **+1**:



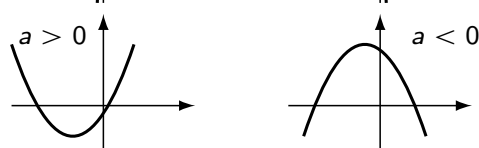
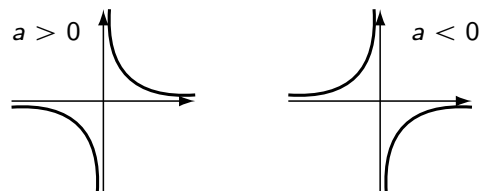
cas **-1**:



ou bien:

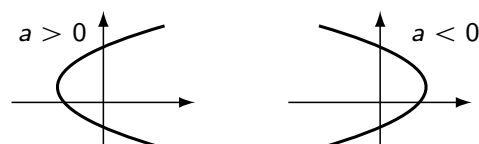
$$y = \frac{a}{x}$$

centre $(0, 0)$, asymptotes $\vec{i}$ et $\vec{j}$



• **Parabole:** $y = ax^2 + bx + c$

axe parallèle à $\vec{j}$



ou bien:

$$x = ay^2 + by + c$$

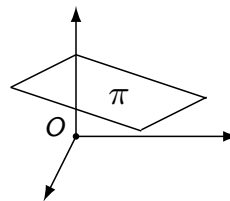
axe parallèle à $\vec{i}$

Plans

Plan (affine):

$$\pi = \left\{ P(x, y, z) \mid ax + by + cz + d = 0 \right\}$$

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$



Attention: un plan est un espace vectoriel de dimension 2 si et seulement si il passe par O , i.e. $d = 0$.

- **Vecteur orthogonal ou normal** à $\pi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exemple:

$x - 5y - 2z = 0$ est un plan vectoriel, de vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$x + 3 = 5y + 2z$ est un plan affine de vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Plans particuliers

- **Plan passant par** $A = (a_1, a_2, a_3)$ **et** $\perp \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$:

condition: $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$

équation:
$$u_1(x - a_1) + u_2(y - a_2) + u_3(z - a_3) = 0$$

- **Plan passant par** $A = (a_1, a_2, a_3)$ **et** $\parallel$ à $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ **et** $\vec{v}' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}$:

condition: $[\overrightarrow{AP}, \vec{v}, \vec{v}'] = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t\vec{v} + t'\vec{v}'$

équation paramétrique:
$$\begin{cases} x - a_1 = tv_1 + t'v'_1 \\ y - a_2 = tv_2 + t'v'_2 \\ z - a_3 = tv_3 + t'v'_3 \end{cases}$$

équation cartésienne:

$$(x - a_1)(v_2v'_3 - v_3v'_2) - (y - a_2)(v_1v'_3 - v_3v'_1) + (z - a_3)(v_1v'_2 - v_2v'_1) = 0$$

- **Plan passant par** $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ **et** $C = (c_1, c_2, c_3)$:

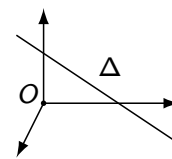
condition: $[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$

équations: comme le cas précédent.

Droites

Droite (affine): $\Delta = \pi \cap \pi'$

$$\Delta = \left\{ P(x, y, z) \mid \begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array} \right\}$$



avec $(0, 0, 0) \neq (a, b, c) \nparallel (a', b', c') \neq (0, 0, 0)$.

Attention: une droite est un espace vectoriel de dimension 1 si et seulement si elle passe par O , i.e. $d = 0$ et $d' = 0$.

Exemple:

La droite d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ est l'axe Oz (vectoriel).

La droite d'équations $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ est parallèle à l'axe Oz (affine).

Droites particulières

- **Droite passant par $A = (a_1, a_2, a_3)$ et $\parallel$ à $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$:**

condition: $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t\vec{v}$

équation paramétrique:
$$\begin{cases} x - a_1 = tv_1 \\ y - a_2 = tv_2 \\ z - a_3 = tv_3 \end{cases}$$

équation cartésienne:
$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

- **Droite passant par $A = (a_1, a_2, a_3)$ et $B = (b_1, b_2, b_3)$:**

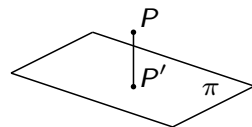
condition: $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

équation: comme le cas précédent.

Distance et volume

Distance:

- d'un point $P(x, y, z)$ à un point $P'(x', y', z')$:



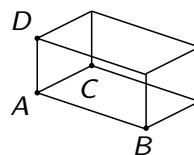
$$\text{dist}(P, P') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

- d'un point $P(x, y, z)$ à un plan π d'éq. $ax + by + cz + d = 0$: on appelle P' la projection orthogonale de P sur le plan π , alors

$$\text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, P') = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Volume du parallélépipède de sommets A, B, C, D , etc:

$$\text{Vol} = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \right|.$$



Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$, alors

$$\text{Vol} = |x(y'z'' - z'y'') - y(x'z'' - z'x'') + z(x'y'' - y'x'')|.$$

Surfaces Quadriques

Les surfaces quadriques sont des surfaces de l'espace euclidien de dimension 3 qui sont définies comme suit:

Quadrique: $\mathcal{Q} = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0\}$,

où $f(x, y, z)$ est un polynôme de degré 2.

Les quadriques plus connues:

- Cylindre:** $x^2 + y^2 = r^2$

- Cône:** $x^2 + y^2 = z^2$

- Sphère:** $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

- Ellipsoïde:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

- Hyperboloïde à une nappe:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- Hyperboloïde à deux nappes:**

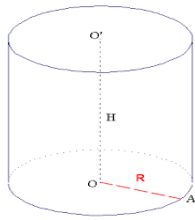
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- Paraboloïde:** $z = xy$

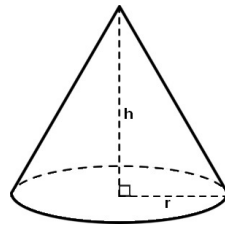
ou bien: $z = x^2 + y^2$

Quelques images de surfaces quadriques

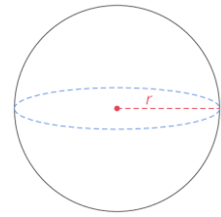
Cylindre



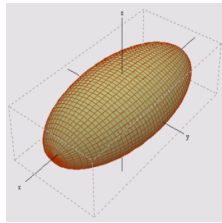
Cône



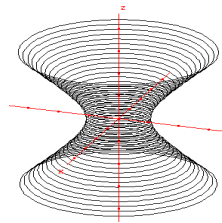
Sphère



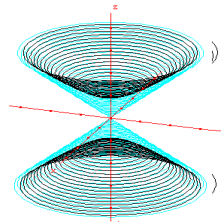
Ellipsoïde



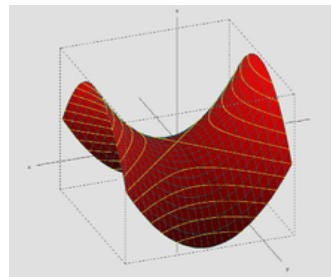
Hyper 1



Hyper 2



Paraboloïde hyp.



Paraboloïde ellip.

