Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de Mathématiques 2ème année
Printemps 2016

UE Géométrie et Calcul Différentiel
Resp.: A. Frabetti
http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/GeoL2/

COURS DE GÉOMÉTRIE ET CALCUL DIFFÉRENTIEL

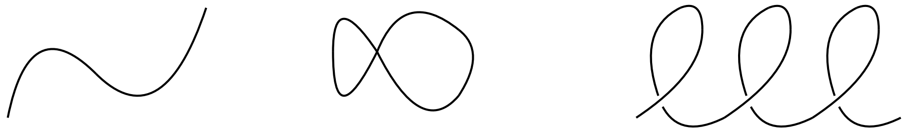
Programme du cours

Notations. Dans l'espace ambient on fixe un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ qui donne un isomorphisme d'espaces vectoriels entre l'ensemble des vecteurs de l'espace appliqués en O et $\mathbb{R}^3$. Les points P de l'espace, et les vecteurs correspondants $\vec{OP}$, sont donc identifiés à leurs coordonnées cartesiennes (x, y, z).

Sauf mention explicite, par "plan" on entend le plan avec le repère orthonormal direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, identifié à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Les points P du plan, et les vecteurs correspondants $\vec{OP}$, sont donc identifiés à leurs coordonnées cartesiennes (x, y).

1 Courbes planes et gauches

Une *courbe* est un sous-ensemble du plan ou de l'espace avec "dégré de liberté intrensèque" égal à 1, par exemple:



Pour décrire une courbe, soit on donne des contraintes aux coordonnées de ses points (*courbes définies implicitement*), par exemple

$$\text{Cercle du plan de rayon } r \text{ centré en l'origine} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\Big\},$$

soit on décrit ses points comme fonctions d'un paramètre (*courbes paramétrées*), par exemple

$$\text{Même cercle} = \Big\{(r\cos t, r\sin t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, 2\pi]\Big\}.$$

La description implicite des courbes est la plus courante, mais c'est la description paramétrique qui permet d'en définir la *longueur* et les deux *invariants* réels qui caractérisent les courbes à déplacement près: la *courbure* et la *torsion*.

Dans ce chapitre on présente d'abord les courbes paramétrées, et ensuite on montre comment trouver une paramétrisation *locale* pour toute courbe *régulière*.

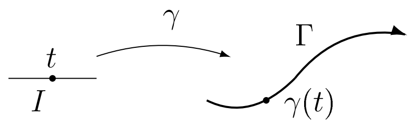
1.1 Courbes paramétrées

Définition. Une **courbe paramétrée** (ou **chemin**) de classe C^k (avec $k \geqslant 0$) est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$\Gamma = \Big\{\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in I \subset \mathbb{R}\Big\} = \gamma(I),$$

où $I \subset \mathbb{R}$ est un interval et l'application $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est de classe C^k, c'est-à-dire que les fonctions $x, y, z : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^k. Si la classe C^k n'est pas indiquée on suppose que la courbe soit lisse, c'est-à-dire de classe C^∞. On appelle:

- **paramétrisation** de la courbe Γ l'application $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$;

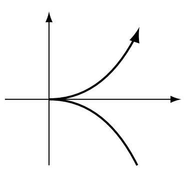


- **paramètre** la variable $t \in I$;
- **support** (**géométrique**) de la paramétrisation γ son image $\operatorname{supp}\gamma = \gamma(I) \subset \mathbb{R}^3$;
- **orientation** de la courbe Γ le sens de parcour détérminé par $t \in \mathbb{R}$ croissant.

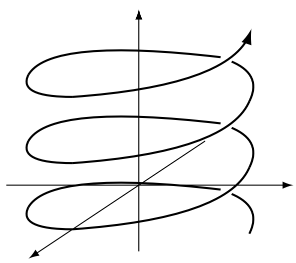
Ainsi, une courbe paramétrée est naturellement orientée.

Exemples.

- *Courbe cuspidale*
  $\gamma(t) = (t^2, t^3, 0)$
  $t \in \mathbb{R}$



- *Hélice circulaire*
  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$
  $t \in \mathbb{R}$.



Si la paramétrisation est suffisement dérivable, on appelle aussi:

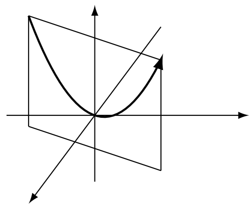
- **point**, ou **position**, de la courbe Γ à l'instant t le vecteur $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \in \mathbb{R}^3$;
- **vitesse** de la courbe Γ à l'instant t le vecteur $\gamma'(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big) \in \mathbb{R}^3$;
- **accélération** de la courbe Γ à l'instant t le vecteur $\gamma''(t) = \big(x''(t), y''(t), z''(t)\big) \in \mathbb{R}^3$.

Définition. Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée de classe C^k. On dit que

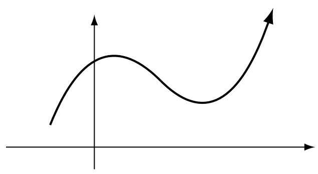
- γ est une **droite** si son support $\Gamma = \mathrm{supp}\gamma$ est contenu dans une droite de $\mathbb{R}^3$. Cela arrive si et seulement si, pour tout $t \in I$, toutes les dérivées $\gamma^{(p)}(t)$ non nulles sont des vecteurs colinéaires.
- γ est une **courbe plane** si son support $\Gamma = \mathrm{supp}\gamma$ est contenu dans un plan de $\mathbb{R}^3$. À moins d'un déplacement, on peut supposer que $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
- γ est une **courbe gauche** si elle n'est pas plane.

Exemples.

- La courbe $\gamma(t) = (t^5, 3t^5 + 1, 2t^5)$, avec $t \in \mathbb{R}$, est une droite, car son support est la droite $\Gamma = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 3x + 1,\ z = 2x\Big\}$.
- La courbe cuspidale est une courbe plane.
- L'hélice circulaire est une courbe gauche.
- La courbe $\gamma(t) = (t, t, t^2)$, avec $t \in \mathbb{R}$, est plane, car son support $\Gamma = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x,\ z = x^2\Big\}$ est une parabole contenue dans le plan d'équation $y = x$.



- Le graphe de toute fonction réelle $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une courbe plane paramétrée par $\gamma(t) = (t, f(t))$, avec $t \in I$.



Donner une paramétrisation $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est donc suffisant pour déterminer une courbe paramétrée, et en particulier son support $\Gamma = \gamma(I)$. Le contraire n'est pas vrai: donner un support Γ n'est pas suffisant pour détérminer une courbe paramétrée, car un support peut admettre plusieures paramétrisations differentes.

Exemple. Les paramétrisantions

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \alpha(t) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right),$$
$$\beta : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}^2, \theta \mapsto \beta(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

ont le même support: le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ privé du point $(-1, 0)$.

Définition. Une fonction $\varphi : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$ est un **difféomorphisme** de classe C^k si

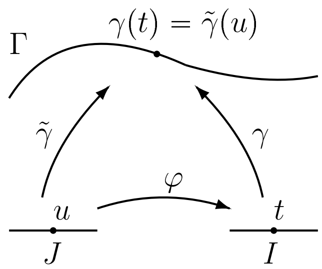
- φ est dérivable de classe C^k sur J;
- φ est inversible, c'est-à-dire qu'il admet la réciproque $\varphi^{-1} : I \longrightarrow J$;
- la réciproque φ^{-1} est dérivable de classe C^k sur I.

En particulier, une fonction φ de classe C^1 est un difféomorphisme si et seulement si $\varphi'(x) \neq 0$ pour tout x.

Exemples.

- La fonction $\varphi(x) = x^3$, avec $x \in \mathbb{R}$, n'est pas un difféomorphisme car $\varphi'(0) = 0$. Cela entraine que sa réciproque $\varphi^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ n'est pas dérivable en $y = 0$.
- Par contre, la fonction $\varphi(x) = x^3$, avec $x \in]0, +\infty[$, est bien un difféomorphisme.

Définition. Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée de classe C^k. Un **reparamétrage** (ou **reparamétrisation**) de classe C^k de γ est une nouvelle paramétrisation $\tilde{\gamma} : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ obtenue en composant γ avec un difféomorphisme $\varphi : J \longrightarrow I$ de classe C^k, i.e. telle que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$:



Le nouveau paramètre $u \in J$ est l'antécedent du vieux paramètre $t \in I$:

$$u = \varphi^{-1}(t) \qquad \text{et} \qquad t = \varphi(u).$$

En omettant φ et φ^{-1}, on note aussi

$$u = u(t) \qquad \text{et} \qquad t = t(u).$$

Exemple. Pour le cercle privé d'un point, les deux paramétrisations

$$\alpha(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$\beta(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

sont l'une un reparamétrage de l'autre, car $\beta = \alpha \circ \varphi$ où $\varphi(\theta) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est un difféomorphisme.

Le support d'une courbe γ coincide avec celui d'un reparamétrage $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, car un difféomorphisme φ est en particulier une bijection. Le contraire n'est pas vrai: si un même support admet deux paramétrisations, celles-ci ne sont pas forcement l'une un reparamétrage de l'autre.

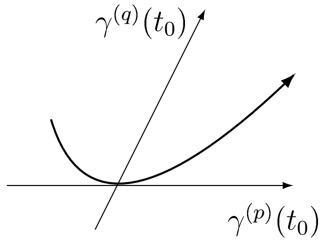
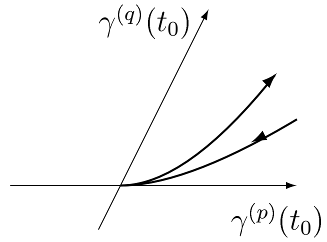
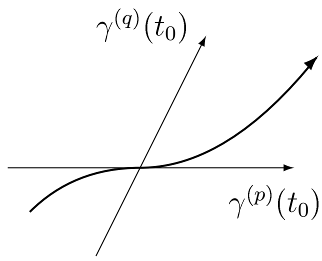
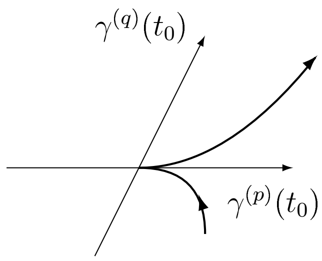
Exemple. Le support $\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\right\}$ admet les deux paramétrisations

$$\alpha(t) = (t, t^3), \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$
$$\beta(u) = (u^3, u^9), \qquad \text{avec } u \in \mathbb{R}.$$

Mais celles-ci ne sont pas l'une un reparamétrage de l'autre, car $\beta = \alpha \circ \varphi$ où $t = \varphi(u) = u^3$ n'est pas un difféomorphisme sur $\mathbb{R}$.

Proposition. **[Allure locale d'une courbe paramétrée.]**
Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbé paramétrée qui n'est pas une droite, et soit $t_0 \in I$ fixé. Soit $p \geqslant 1$ le plus petit entier tel que $\gamma^{(p)}(t_0) \neq 0$ et soit $q > p$ le plus petit entier tel que $\gamma^{(q)}(t_0)$ soit linéairement indépendant de $\gamma^{(p)}(t_0)$.

Alors localement, autour du point $\gamma(t_0)$, la courbe a l'une des formes suivantes, suivant la parité de p et q:

	p **impair**	p **pair**
q **pair**	 *point d'apparence ordinaire*	 *point de rebroussement de 2^{eme} espece*
q **impair**	 *point d'inflexion*	 *point de rebroussement de 1^{ere} espece*

Preuve. Il suffit de regarder le dévéloppement limité de $\gamma(t)$ en t_0:

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!}\Big(1 + o(t-t_0)\Big)\,\gamma^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\,\gamma^{(q)}(t_0) + o\big((t-t_0)^q\big).$$

$\square$

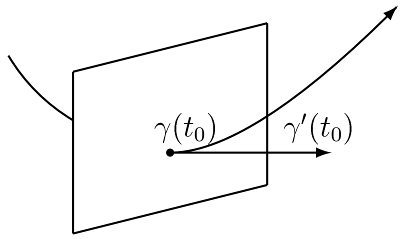
1.2 Courbes régulières et birégulières

Définition. Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée. On dit que

- γ est **régulière en** $t_0 \in I$ si $\gamma'(t_0) \neq 0$ (i.e. si et seulement si $\|\gamma'(t_0)\| \neq 0$);
- γ est **singulière en** $t_0 \in I$ si $\gamma'(t_0) = 0$ (i.e. si et seulement si $\|\gamma'(t_0)\| = 0$);
- γ est **régulière** si elle est régulière en tout point $t \in I$.

Si γ est régulière en t_0, alors il existe la **droite tangente** à son support $\Gamma = \gamma(I)$ au point $\gamma(t_0)$: c'est la droite de vecteur directeur $\gamma'(t_0)$ passant par $\gamma(t_0)$,

$$\Delta_{t_0}(\gamma) = \Big\{\gamma(t_0) + \lambda\, \gamma'(t_0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\Big\}.$$



Tous les plans contenant la droite tangente sont tangents à γ en t_0. Pour une courbe, le "plan tangent" n'est pas une notion significative. Par contre, il existe un unique **plan normal à** γ **en** t_0: le plan orthogonale à $\gamma'(t_0)$ passant par $\gamma(t_0)$.

Exemples.

- La courbe $\alpha(t) = (t, t^3)$, avec $t \in \mathbb{R}$, est régulière partout, car $\alpha'(t) = (1, 3t^2) \neq (0,0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- La courbe $\beta(u) = (u^3, u^9)$, avec $u \in \mathbb{R}$, est singulière au point $(0,0) = \beta(0)$, car $\beta'(u) = (3u^2, 9u^8) = (0,0)$ si et seulement si $u = 0$.

Proposition. *Si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée régulière, alors tout reparamétrage de γ est aussi régulier.*

Preuve. Soit $\tilde{\gamma}(u) = \gamma \circ \varphi(u) = \gamma(t)$ un reparamétrage de γ, donné par le difféomorphisme $\varphi : J \longrightarrow I$. On a toujours

$$\tilde{\gamma}'(u) = \gamma'(\varphi(u))\ \varphi'(u)$$

avec $\varphi'(u) \neq 0$ car φ est un difféomorphisme. Si γ est régulière on a aussi $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t = \varphi(u)$, donc $\tilde{\gamma}'(u) \neq 0$. $\square$

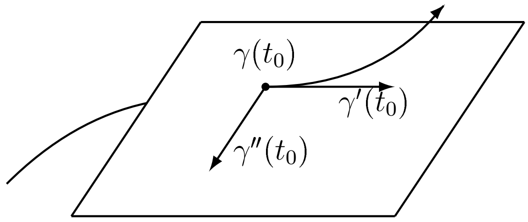
Définition. Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière. On dit que

- γ est **birégulière en** $t_0 \in I$ si $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''(t_0)$ sont linéairement independants;
- γ est **birégulière** si elle est birégulière en tout point $t \in I$.

Evidemment, une courbe birégulière ne peut être une droite.

Si γ est birégulière en t_0, alors les deux vecteurs $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''(t_0)$ engendrent un plan, qui s'appelle **plan osculateur à** γ **en** t_0

$$\pi_{t_0}(\gamma) = \Big\{\gamma(t_0) + \lambda\, \gamma'(t_0) + \mu\, \gamma''(t_0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\Big\}.$$



Le plan osculateur est le plan tangent à γ en t_0 qui approche plus la courbe quand elle n'est pas plane. En effet, c'est le seul plan tangent qui reste constant (quant t varie) pour une courbe plane quelconque. En particulier: une courbe est plane si et seulement si tous ses plans osculateurs coincident.

Exemple. La courbe $\gamma(t) = (t, t, t^2)$, avec $t \in \mathbb{R}$, est birégulière car les deux vecteurs

$$\gamma'(t) = (1, 1, 2t) \qquad \text{et} \qquad \gamma''(t) = (0, 0, 2)$$

sont linéairement indépendants (leur produit vectoriel $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (2, -2, 0)$ est non nul), et le plan osculateur en tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\pi_t(\gamma) = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x = y\Big\}$$

est indépendant de t.

1.3 Longueur et abscisse curviligne

Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe régulière, et supposons que I soit un interval fermé ou ouvert d'extrèmes a et b, i.e. $I = [a, b]$ ou $I =]a, b[$.

Définition. La **longueur** de la courbe γ est le nombre réel positif

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \; dt.$$

Exemple. Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ une paramétrisation du cercle unitaire qui continue à tourner en rond. Alors

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \quad \text{et} \quad \|\gamma'(t)\| = 1 \qquad \text{donc} \qquad L(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} dt = +\infty,$$

cette courbe paramétrée a longueur infinie. Mais si on restreint l'interval du paramètre, on peut obtenir des courbes avec longueur finie:

$$L\big(\gamma\big|_{[0,2\pi]}\big) = 2\pi \qquad \text{et} \qquad L\big(\gamma\big|_{[0,4\pi]}\big) = 4\pi.$$

Proposition. *Si $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ est un reparamétrage de γ, alors $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$.*

Preuve. Supposons que $\varphi : J \longrightarrow I$ soit un difféomorphisme strictemet croissant, i.e. que $\varphi'(u) > 0$ pour tout $u \in J$. Alors on a

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_J \|\tilde{\gamma}'(u)\| \; du = \int_J \|\gamma'(\varphi^{-1}(u))\|\varphi'(u) \; du = \int_{\varphi^{-1}(J)} \|\gamma'(t)\| \; dt = L(\gamma).$$

$\square$

Définition. On appelle **abscisse curviligne**, ou **paramètre par longueur d'arc**, tout paramètre s tel que la vitesse de la courbe ait module constant égal à 1, i.e. $\|\gamma'(s)\| = 1$ pour tout s. Dans ce cas, la longuer de la courbe sur l'interval $[a,b]$ vaut

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(s)\|\, ds = b - a.$$

Exemple. Le cercle $\gamma(s) = \big(a\cos(bs), a\sin(bs)\big)$ est paramétré par longueur d'arc si et seulement si $b = 1/a$. En effet

$$\gamma'(s) = \big(-ab\sin(bs), ab\cos(bs)\big) \qquad \text{donc} \qquad \|\gamma'(s)\|^2 = a^2b^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad b = \frac{1}{a}.$$

Théorème. *Toute courbe régulière $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ admet un reparamétrage par longueur d'arc.*

Preuve. Soit $I = [a,b]$ ou $I =]a,b[$ et posons

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto \varphi(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\|\, du.$$

L'application φ est dérivable en tout $t \in I$, car sa dérivée $\varphi'(t) = \|\gamma'(t)\|$ est bien définie partout. On a aussi $\varphi'(t) = \|\gamma'(t)\| \neq 0$, car γ est régulière, donc φ est un difféomorphisme sur son image. Puisque $\varphi'(t) > 0$, on a que φ est une fonction strictement croissante, donc son image $J = \varphi(I)$ est un interval de la forme $[\varphi(a), \varphi(b)]$ ou bien $]\varphi(a), \varphi(b)[$. Plus explicitement, si φ est strictement croissante elle est inversible, et sa réciproque $\varphi^{-1} : J \longrightarrow I$ est aussi dérivable car, pour tout $s = \varphi(t) \in J$, on a $(\varphi^{-1})'(s) = \dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))}$.

Soit $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi^{-1}$, i.e. $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi^{-1}(s))$ pour tout $s \in J$. On a alors

$$\tilde{\gamma}'(s) = \gamma'(\varphi^{-1}(s))(\varphi^{-1})'(s) = \gamma'(\varphi^{-1}(s))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} = \frac{\gamma'(\varphi^{-1}(s))}{\|\gamma'(\varphi^{-1}(s))\|},$$

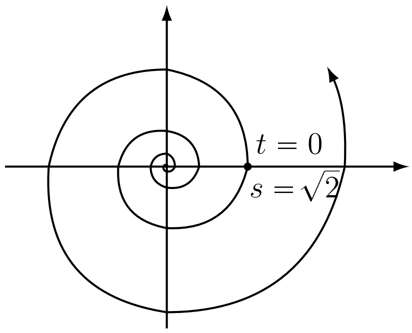
donc $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$ pour tout $s \in J$. Autrement dit, $\tilde{\gamma}$ est bien une paramétrisation par longueur d'arc.
$\square$

Le paramètre par longueur d'arc n'est pas unique: tout reparamétrage du type

$$s(t) = \pm \int_a^t \|\gamma'(u)\|\, du + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

est admis, car ces choix n'affectent pas $\|\tilde{\gamma}'(s)\|$. En variant la constante c on change le point de la courbe où le paramètre vaut zéro, et en mettand le signe $-$ on change d'orientation à la courbe.

Exemple. La *spirale logarithmique* $\gamma(t) = \big(e^t \cos t, e^t \sin t\big)$, avec $t \in \mathbb{R}$, est une courbe régulière car $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}e^t \neq 0$ pour tout t. La courbe passe par $(1,0)$ à $t = 0$, s'enroule sur l'origine pour $t \to -\infty$ et s'éloigne pour $t \to +\infty$.
Un paramètre par longueur d'arc est donné par



$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} \sqrt{2}e^u \, du = \sqrt{2}e^t \in \,]0, \infty[$$

et le reparamétrage correspondant est

$$\tilde{\gamma}(s) = \big(\sqrt{2}s \cos(\ln(s/\sqrt{2})), \sqrt{2}s \sin(\ln(s/\sqrt{2}))\big).$$

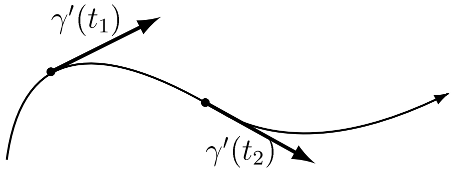
Avec ce choix, la courbe s'enroule sur l'origine pour $s \to 0$, et passe par $(1,0)$ à $s = \sqrt{2}$.

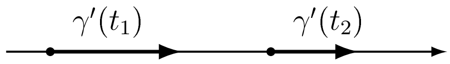
En conclusion, si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe régulière avec $I = [a, b]$ ou $I =]a, b[$, sa longuer vaut:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b ds(t) = \int_{s(a)}^{s(b)} ds(t) = s(b) - s(a).$$

1.4 Repère de Frenet, courbure et torsion

Les caractéristiques d'une courbe s'évaluent en suivant la variation d'un repère "mobile" intrinsèque (s'il existe) le long de la courbe. Par exemple, si le vecteur vitesse ne change jamais de direction, la courbe est clairement une droite.





Lemme. *Soit $V : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un vecteur de l'espace dépendant d'un paramètre $t \in I$. Si V est constant en norme (non nulle), i.e. $\|V(t)\| = c \neq 0$ pour tout $t \in I$, alors le produit scalaire de $V(t)$ avec sa dérivée $V'(t)$ est toujours nul: $\langle V(t), V'(t)\rangle = 0$ pour tout $t \in I$. Cela signifie que $V'(t)$ est orthogonal à $V(t)$ pour tout $t \in I$.*

Preuve. Si pour tout $t \in I$ on a $\|V(t)\|^2 = \langle V(t), V(t)\rangle = c^2$, alors

$$0 = \frac{d}{dt}\|V(t)\|^2 = \langle V'(t), V(t)\rangle + \langle V(t), V'(t)\rangle = 2\langle V(t), V'(t)\rangle.$$

$\square$

Définition. Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe régulière. On appelle

- **vecteur tangent à** γ **en** $t_0 \in I$ le vecteur $T_\gamma(t_0) := \dfrac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$, qui est non nul car γ est régulière.

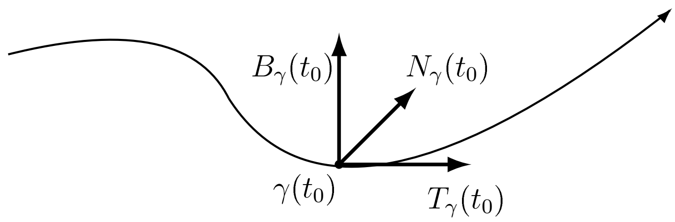
Si le support de γ est une droite, ce vecteur est suffisant pour en caractériser un repère mobile: il nous dit quelle est sa direction. Sinon, on appelle

- **vecteur normal à** γ **en** $t_0 \in I$ le vecteur $N_\gamma(t_0) := \dfrac{T'(t_0)}{\|T'(t_0)\|}$. Ce vecteur est non nul si et seulement si le support de γ n'est pas une droite.

Si γ n'est pas une droite, $N_\gamma(t_0)$ est forcement orthogonal à $T_\gamma(t_0)$, et les deux vecteurs $\Big(T_\gamma(t_0), N_\gamma(t_0)\Big)$ forment une base orthonormale du plan osculateur de γ en t_0. Si γ est une courbe plane, ces deux vecteurs sont suffisant pour en caractériser un repère mobile, car ils engendrent le plan sur lequel vit la courbe. Sinon, on appelle

- **vecteur binormal à** γ **en** $t_0 \in I$ le vecteur $B_\gamma(t_0) := T_\gamma(t_0) \wedge N_\gamma(t_0)$, où $\wedge$ indique le produit vectoriel. Ce vecteur est non nul si et seulement si le support de γ n'est pas une droite.

Si γ n'est pas une droite, $B_\gamma(t_0)$ est forcement orthogonal à $T_\gamma(t_0)$ et à $N_\gamma(t_0)$, et les trois vecteurs $\Big(T_\gamma(t_0), N_\gamma(t_0), B_\gamma(t_0)\Big)$ forment une base orthonormale directe de l'espace, centré au point $\gamma(t_0)$, qui s'appelle **système de Frenet**.



Alternative: on peut définir le système de Frenet comme suit:

$$
\begin{aligned}
T_\gamma(t_0) &:= \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}, \\
B_\gamma(t_0) &:= \frac{\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0)}{\|\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0)\|}, \\
N_\gamma(t_0) &:= B_\gamma(t_0) \wedge T_\gamma(t_0).
\end{aligned}
$$

Proposition. *Si $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ est un reparamétrage de γ, alors*

- *les systèmes de Frenet de γ et $\tilde{\gamma}$ coincident si φ preserve l'orientation (i.e. $\varphi'(u) > 0$ pour tout $u \in J = \varphi^{-1}(I)$);*

- *les vecteurs T_γ et B_γ changent de signe si φ inverse l'orientation (i.e. $\varphi'(u) < 0$ pour tout $u \in J = \varphi^{-1}(I)$).*

Preuve. Soit $t = \varphi(u)$. On a

$$T_{\tilde{\gamma}}(u) = \frac{\tilde{\gamma}'(u)}{\|\tilde{\gamma}'(u)\|} = \frac{\gamma'(t)\ \varphi'(u)}{\|\gamma'(t)\ \varphi'(u)\|} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\ \frac{\varphi'(u)}{|\varphi'(u)|} = T_\gamma(t)\ \frac{\varphi'(u)}{|\varphi'(u)|},$$

donc $T_{\tilde{\gamma}}(u) = T_\gamma(t)$ si $\varphi'(u) > 0$, et $T_{\tilde{\gamma}}(u) = -T_\gamma(t)$ si $\varphi'(u) < 0$. Le même raisonnement s'applique aux vecteurs normal et binormal. $\square$

Lemme. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière de classe C^k. Il existe deux fonctions $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k telles que, pour tout $t \in I$, on a*

$$\begin{aligned} T'_\gamma(t) &= a(t)\ N_\gamma(t), \\ N'_\gamma(t) &= -a(t)\ T_\gamma(t) + b(t)\ B_\gamma(t), \\ B'_\gamma(t) &= -b(t)\ N_\gamma(t). \end{aligned}$$

En outre, $a(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in I$.

Pour montrer ceci nous faisons appel à un petit résultat d'algèbre linéaire: Si $(P; e_1, e_2, e_3)$ est un repère orthonormal de $\mathbb{R}^3$ centré au point P, c'est-à-dire que

$$e_i \perp e_j \quad \text{si } i \neq j, \quad \text{et} \qquad \|e_i\| = 1 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

et $V = v_1\, e_1 + v_2\, e_2 + v_3\, e_3$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ appliqué à P, alors les coordonnées de V se trouvent à l'aide du produit scalaire euclidien (qui donne la projection):

$$v_1 = \langle V, e_1 \rangle, \qquad v_2 = \langle V, e_2 \rangle, \qquad v_3 = \langle V, e_3 \rangle.$$

En effet, par exemple pour la projection de V sur e_1, on a

$$\begin{aligned} \langle V, e_1 \rangle &= \langle v_1\, e_1 + v_2\, e_2 + v_3\, e_3, e_1 \rangle \\ &= v_1 \langle e_1, e_1 \rangle + v_2 \langle e_2, e_1 \rangle + v_3 \langle e_3, e_1 \rangle \\ &= v_1\ \|e_1\|^2 = v_1, \end{aligned}$$

car $\langle e_2, e_1 \rangle = \langle e_3, e_1 \rangle = 0$.

Preuve. Puisque le système de Frenet forme une base orthonormale de l'espace en chaque point de la courbe, il est clair que tout vecteur $V(t)$ appliqué en $\gamma(t)$ peut s'exprimer comme combinaison linéaires des vecteurs $T_\gamma(t)$, $N_\gamma(t)$ et $B_\gamma(t)$, et que les coéfficients sont des fonctions de t de la même régularité que γ donnés par le produit scalaire de $V(t)$ avec les vecteurs du système de Frenet.

(1) Par définition, on a $N_\gamma(t) = \dfrac{T'_\gamma(t)}{\|T'(t)\|}$, donc

$$T'_\gamma(t) = \|T'(t)\|\ N_\gamma(t) = a(t)\ N_\gamma(t),$$

avec $a(t) = \|T'(t)\| \geqslant 0$.

(2) Pour montrer que $N'_\gamma(t) = -a(t)\ T_\gamma(t) + b(t)\ B_\gamma(t)$, il suffit de montrer que $\langle N'_\gamma(t), T_\gamma(t) \rangle = -a(t)$. Puisque $\langle N_\gamma(t), T_\gamma(t) \rangle = 0$ pour tout t, en dérivant on a

$$0 = \langle N_\gamma(t), T_\gamma(t) \rangle' = \langle N'_\gamma(t), T_\gamma(t) \rangle + \langle N_\gamma(t), T'_\gamma(t) \rangle,$$

donc

$$\langle N_\gamma(t), T'_\gamma(t) \rangle = -\langle N'_\gamma(t), T_\gamma(t) \rangle = -a(t).$$

(3) Pour montrer que $B'_\gamma(t) = -b(t)\, N_\gamma(t)$, il faut montrer que $\langle B'_\gamma(t), T_\gamma(t)\rangle = 0$ et que $\langle B'_\gamma(t), N_\gamma(t)\rangle = -b(t)$. On a

$$\begin{aligned} 0 &= \langle B_\gamma(t), T_\gamma(t)\rangle' = \langle B'_\gamma(t), T_\gamma(t)\rangle + \langle B_\gamma(t), T'_\gamma(t)\rangle, \\ 0 &= \langle B_\gamma(t), N_\gamma(t)\rangle' = \langle B'_\gamma(t), N_\gamma(t)\rangle + \langle B_\gamma(t), N'_\gamma(t)\rangle, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \langle B'_\gamma(t), T_\gamma(t)\rangle &= -\langle B_\gamma(t), T'_\gamma(t)\rangle = 0, \\ \langle B'_\gamma(t), N_\gamma(t)\rangle &= -\langle B_\gamma(t), N'_\gamma(t)\rangle = -b(t). \end{aligned}$$

□

Définition. Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe régulière de classe C^k. On appelle:

- **Courbure (géométrique) de γ en $t_0 \in I$** le nombre

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma(t_0) &= \frac{a(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} = \frac{\|T'_\gamma(t_0)\|}{\|\gamma'(t_0)\|} \\ &= \frac{1}{\|\gamma'(t_0)\|} \langle T'_\gamma(t_0), N_\gamma(t_0)\rangle = -\frac{1}{\|\gamma'(t_0)\|} \langle N'_\gamma(t_0), T_\gamma(t_0)\rangle \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

La courbure mesure combient la courbe γ s'éloigne d'être une droite. En effet, si γ est une droite on a $T'_\gamma(t_0) = 0$, donc $\kappa_\gamma(t) = 0$ (car le vecteur $N_\gamma(t_0)$ est supposúnitaire).

- **Torsion de γ en $t_0 \in I$** le nombre

$$\tau_\gamma(t_0) = \frac{b(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} = \frac{1}{\|\gamma'(t_0)\|} \langle N'_\gamma(t_0), B_\gamma(t_0)\rangle = -\frac{1}{\|\gamma'(t_0)\|} \langle B'_\gamma(t_0), N_\gamma(t_0)\rangle \in \mathbb{R}.$$

La torsion mesure combient la courbe γ s'éloigne d'être plane. En effet, si γ est une courbe plane on a $B'_\gamma(t_0) = 0$, donc $\tau_\gamma(t) = 0$.

Exemple. L'hélice circulaire $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $a, b > 0$ fixés, a courbure et torsion constantes et non nulles:

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad \text{et} \qquad \tau_\gamma(t) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Conclusion. Pour toute courbe birégulière $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ on a donc les **Formules de Frenet**:

$$\begin{pmatrix} T'_\gamma \\ N'_\gamma \\ B'_\gamma \end{pmatrix} = \|\gamma'\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa_\gamma & 0 \\ -\kappa_\gamma & 0 & \tau_\gamma \\ 0 & -\tau_\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_\gamma \\ N_\gamma \\ B_\gamma \end{pmatrix}.$$

Corollaire. *Si $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ est un reparamétrage de γ, alors*

- *les courbures de γ et $\tilde{\gamma}$ coincident, i.e. $\kappa_{\tilde{\gamma}}(u) = \kappa_\gamma(t)$ si $t = \varphi(u)$;*
- *les torsions de γ et $\tilde{\gamma}$ coincident au signe près, selon l'orientation des courbes, i.e., pour $t = \varphi(u)$, on a $\tau_{\tilde{\gamma}}(u) = \tau_\gamma(t)$ si φ preserve l'orientation et $\tau_{\tilde{\gamma}}(u) = -\tau_\gamma(t)$ si φ inverse l'orientation.*

Preuve. Suit directement de la modification du système de Frenet par reparamétrage. □

Théorème. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe régulière de classe au moins C^3. Pour tout $t \in I$ on a:*

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3},$$
$$\tau_\gamma(t) = \frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t)\rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}$$

Si γ est paramétrée par longueur d'arc, i.e. $\|\gamma'(s)\| = 1$ pour tout $s \in I$, on a

$$\kappa_\gamma(s) = \|\gamma''(s)\|,$$
$$\tau_\gamma(t) = \frac{1}{\kappa_\gamma(s)^2}\,\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t)\rangle.$$

Preuve. i) Pour montrer la formule sur la courbure, on peut employer deux methodes différentes, toutes les deux intéressantes.

Methode 1. Pour simplifier les formules, on omet l'indice et la valeur du paramètre $t \in I$. Par définition, on a $\kappa = \frac{\|T'\|}{\|\gamma'\|}$. Calculons donc T' et $\|T'\|$ à partir de la définition de $T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$. On a besoin de connaitre

$$\Big(\|\gamma'\|\Big)' = \sqrt{\langle \gamma', \gamma'\rangle}' = \frac{2\langle \gamma'', \gamma'\rangle}{2\sqrt{\langle \gamma', \gamma'\rangle}} = \frac{\langle \gamma'', \gamma'\rangle}{\|\gamma'\|},$$

et alors:

$$T' = \frac{\gamma''\|\gamma'\| - \gamma'\Big(\|\gamma'\|\Big)'}{\|\gamma'\|^2} = \frac{\|\gamma'\|^2\gamma'' - \langle \gamma'', \gamma'\rangle\gamma'}{\|\gamma'\|^3}.$$

Pour calculer $\|T'\|$, observons d'abord que si on appelle θ l'angle formé par les vecteurs γ' et γ'', alors

$$\langle \gamma', \gamma''\rangle = \|\gamma'\|\|\gamma''\|\cos\theta \qquad \text{et} \qquad \|\gamma' \wedge \gamma''\| = \|\gamma'\|\|\gamma''\|\sin\theta.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\|T'\|^2 &= \frac{\|\gamma'\|^4\|\gamma''\|^2 - 2\|\gamma'\|^2\langle \gamma'', \gamma'\rangle^2 + \langle \gamma'', \gamma'\rangle^2\|\gamma'\|^2}{\|\gamma'\|^6} \\ &= \frac{\|\gamma'\|^4\|\gamma''\|^2 - \|\gamma'\|^2\langle \gamma'', \gamma'\rangle^2}{\|\gamma'\|^6} \\ &= \frac{\|\gamma'\|^2\|\gamma''\|^2(1 - \cos^2\theta)}{\|\gamma'\|^4} = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}{\|\gamma'\|^4},\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\kappa = \frac{\|T'\|}{\|\gamma'\|} = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}.$$

En particulier, si γ est paramétrée par longuer d'arc, on a $\|\gamma'\| = 1$ et $\gamma' \perp \gamma''$, donc $\|\gamma' \wedge \gamma''\| = \|\gamma'\|\|\gamma''\| = \|\gamma''\|$, et par conséquent $\kappa = \|\gamma''\|$.

Methode 2. Supposons d'abord que $\tilde{\gamma} : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ soit une courbe paramétrée par longueur d'arc, et montrons que $\kappa_{\tilde{\gamma}}(s) = \|\tilde{\gamma}''(s)\|$. Puisque $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$, on a

$$T_{\tilde{\gamma}}(s) = \tilde{\gamma}'(s) \qquad \text{et} \qquad T'_{\tilde{\gamma}}(s) = \tilde{\gamma}''(s) = \kappa_{\tilde{\gamma}}(s) N_{\tilde{\gamma}}(s),$$

donc $\kappa_{\tilde{\gamma}}(s) = \|T'_{\tilde{\gamma}}(s)\| = \|\tilde{\gamma}''(s)\|$.

Soit maintenant $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée de façon quelconque. Soit $\varphi : J \longrightarrow I$ le difféomorphisme tel que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ soit un reparamétrage par longueur d'arc de γ, et appellons $\psi = \varphi^{-1} : I \longrightarrow J$ la réciproque de φ. Puisque la courbure est invariante par reparamétrage, pour tout $t \in I$ on a

$$\kappa_\gamma(t) = \kappa_{\tilde{\gamma}}(s) = \|\tilde{\gamma}''(s)\|, \qquad \text{où } s = \psi(t) \in J.$$

Calculons le terme $\dfrac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$ à partir de $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(s)$ avec $s = \psi(t)$:

$$\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(s)\psi'(t) \qquad \text{donc} \qquad \|\gamma'(t)\| = \|\tilde{\gamma}'(s)\|\|\psi'(t)\| = \|\psi'(t)\|,$$

alors

$$\begin{aligned} \gamma''(t) &= \tilde{\gamma}''(s)\ \psi'(t)^2 + \tilde{\gamma}'(s)\ \psi''(t) \\ \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) &= \psi'(t)\ \psi''(t)\ \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}'(s) + \psi'(t)^3\ \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s) \\ \|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| &= \|\psi'(t)^3\|\ \|\tilde{\gamma}'(s)\|\ \|\tilde{\gamma}''(s)\| = \|\gamma'(t)\|^3\ \kappa_\gamma(t), \end{aligned}$$

d'où suit que $\dfrac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \kappa_\gamma(t)$.

ii) Pour montrer la formule sur la torsion, la première methode est possible mais les calculs sont horrible (à esseyer comme exercice!). La deuxième methode, bien qu'elle ne simplifie pas les formules, simplifie comme même les calculs, adoptons-la.

Supposons alors d'abord que $\tilde{\gamma} : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ soit une courbe paramétrée par longueur d'arc. On a alors que $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$, $\tilde{\gamma}'(s) \perp \tilde{\gamma}''(s)$, $\kappa_{\tilde{\gamma}}(s) = \|\tilde{\gamma}''(s)\|$. On sait aussi que

$$T_{\tilde{\gamma}}(s) = \tilde{\gamma}'(s), \qquad N_{\tilde{\gamma}}(s) = \frac{1}{\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)}\ \tilde{\gamma}''(s) \quad \text{et} \quad B_{\tilde{\gamma}}(s) = \frac{1}{\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)}\ \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s).$$

Montrons maintenant que $\tau_{\tilde{\gamma}}(s) = \dfrac{1}{\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)^2}\ \langle \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s), \tilde{\gamma}'''(s)\rangle$. Par définition, on a $\tau_{\tilde{\gamma}}(s) = \langle N'_{\tilde{\gamma}}(s), B_{\tilde{\gamma}}(s)\rangle$, où

$$N'_{\tilde{\gamma}}(s) = \frac{\tilde{\gamma}'''(t)}{\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)} - \frac{\tilde{\gamma}''(t)\ \kappa'_{\tilde{\gamma}}(s)}{\kappa^2_{\tilde{\gamma}}(s)},$$

donc

$$\tau_{\tilde{\gamma}}(t) = \frac{1}{\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)}\ \langle \tilde{\gamma}'''(t), B_{\tilde{\gamma}}(s)\rangle - \frac{\kappa'_{\tilde{\gamma}}(s)}{\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)^2}\ \langle \tilde{\gamma}''(t), B_{\tilde{\gamma}}(s)\rangle = \frac{1}{\kappa_{\tilde{\gamma}}(s)^2}\ \langle \tilde{\gamma}'''(s), \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s)\rangle$$

car $\langle \tilde{\gamma}''(t), B_{\tilde{\gamma}}(s)\rangle = \kappa_{\tilde{\gamma}}(s)\ \langle N_{\tilde{\gamma}}(s), B_{\tilde{\gamma}}(s)\rangle = 0$.

Enfin, considerons une courbe $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ paramétrée de façon quelconque. Soit $\varphi : J \longrightarrow I$ le difféomorphisme tel que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ soit un reparamétrage par longueur d'arc de γ qui preserve l'orientation (i.e. $\varphi' > 0$), et appellons $\psi = \varphi^{-1} : I \longrightarrow J$ la réciproque de φ. Puisque la torsion est invariante par reparamétrage qui preserve l'orientation, pour tout $t \in I$ on a

$$\tau_\gamma(t) = \tau_{\tilde{\gamma}}(s) = \frac{1}{\|\tilde{\gamma}''(s)\|^2}\ \langle \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s), \tilde{\gamma}'''(s)\rangle, \qquad \text{où } s = \psi(t) \in J.$$

Calculons $\dfrac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t)\rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}$: on a

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \tilde{\gamma}'(s)\ \psi'(t) \qquad \text{et} \qquad \|\gamma'(t)\| = \psi'(t) \\ \gamma''(t) &= \tilde{\gamma}''(s)\ \psi'(t)^2 + \tilde{\gamma}'(s)\ \psi''(t) \\ \gamma'''(t) &= \tilde{\gamma}'''(s)\ \psi'(t)^3 + 3\tilde{\gamma}''(s)\ \psi''(t)\ \psi'(t)^2 + \tilde{\gamma}'(s)\ \psi'''(t), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) &= \psi'(t)^3\ \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s) \\ \|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| &= \psi'(t)^3\ \|\tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s)\| = \psi'(t)^3\ \|\tilde{\gamma}''(s)\| \\ \langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t)\rangle &= \langle \psi'(t)^3\ \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s), \psi'(t)^3\ \tilde{\gamma}'''(s)\rangle = \psi'(t)^6\ \langle \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s), \tilde{\gamma}'''(s)\rangle, \end{aligned}$$

d'où suit

$$\frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t)\rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} = \frac{\psi'(t)^6\ \langle \tilde{\gamma}'(s) \wedge \tilde{\gamma}''(s), \tilde{\gamma}'''(s)\rangle}{\psi'(t)^6\ \|\tilde{\gamma}''(s)\|^2} = \tau_\gamma(t).$$

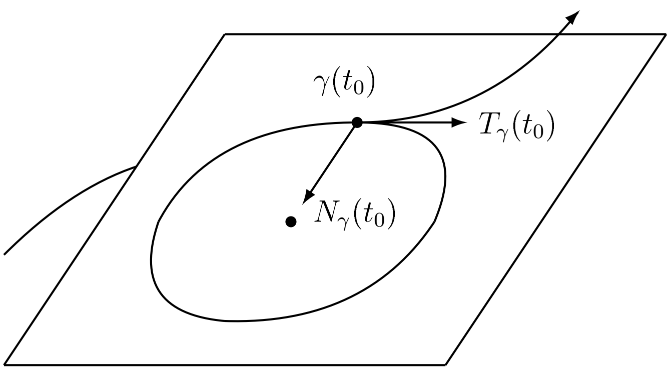
□

Théorème. *À déplacement près, il existe une unique courbe régulière $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, paramétrée par longueur d'arc, ayant une courbure $\kappa : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^1 et une torsion $\tau : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^0 données.*

Définition. Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière de courbure κ_γ et torsion τ_γ. On appelle

- **rayon de courbure de γ en $t_0 \in I$** le nombre $R_\gamma(t_0) := \dfrac{1}{\kappa_\gamma(t_0)} > 0$;
- **cercle osculateur de γ en $t_0 \in I$** le cercle tangent à γ en $\gamma(t_0)$, de rayon $R_\gamma(t_0)$ et placé du coté de la concavité de γ. Le centre du cercle osculateur est donc le point $\gamma(t_0) + R_\gamma(t_0)\ N_\gamma(t_0)$.

Le cercle osculateur est la meilleure approximation de la courbe à l'ordre 2, et se trouve sur le plan osculateur.



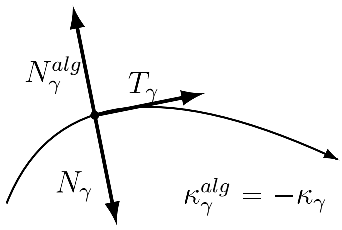
Remarque. Pour une courbe plane $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, le système de Frénet $(T_\gamma(t), N_\gamma(t))$ centré en tout point $\gamma(t)$ est orthonormal mais pas forcement <u>direct</u>, car $N_\gamma(t)$ pointe toujours dans le demi-plan contenant $\gamma''(t)$ et, des deux vecteurs unitaires orthogonaux à $T_\gamma(t)$, $N_\gamma(t)$ n'est pas forcement celui obtenu comme rotation d'angle $\pi/2$ en sense antihoraire à partir de $T_\gamma(t)$.

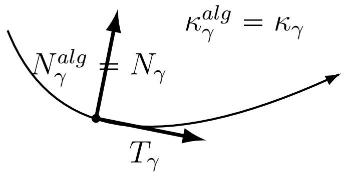
Pour les courbes planes il y a donc un autre repère naturel, dit **algébrique**, ou l'on définit

- le **vecteur normal algébrique** $N_\gamma^{alg}(t)$ tel que le repère $(T_\gamma(t), N_\gamma^{alg}(t))$ soit orthonormal direct (évidemment $N_\gamma^{alg}(t) = \pm N_\gamma(t)$),
- la **courbure algébrique** $\kappa_\gamma^{alg}(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \langle T_\gamma'(t), N_\gamma^{alg}(t)\rangle$ (donc $\kappa_\gamma^{alg}(t) = \pm\kappa_\gamma(t)$).

Contrairement à la courbure κ_γ, la courbure algébrique κ_γ^{alg} détecte, en tout point, dans quel demi-plan se trouve la courbe par rapport à sa droite tangente:

- si la courbe vire à gauche, la courbure algébrique est positive;
- si la courbe vire à droite, la courbure algébrique est négative.





1.5 Courbes définies implicitement

Une courbe (définie implicitement) est le *lieu des zéros* d'une fonction $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dans le plan, ou bien de deux fonctions $F, G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dans l'espace ambient. C'est la notion de courbe comme *sous-variété* de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$. Plus précisement:

Définition. Une **courbe plane** est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$\Gamma = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0,\ x \in A,\ y \in B\big\},$$

où $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction. La courbe est **régulière en un point** (x_0, y_0) si F est différentiable en (x_0, y_0) et le gradient de F en (x_0, y_0) est non nul, i.e. $\nabla F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq (0, 0)$. Dans ce cas, $\nabla F(x_0, y_0)$ est un vecteur normale à Γ en (x_0, y_0).

Exemples.

- Le cercle
$$\Gamma = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\big\}$$
est une courbe régulière partout, car le point $(0, 0)$ qui annulle le gradient de la fonction $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$ n'appartient pas à la courbe.

L'arc de cercle contenu dans le premier quadrant est la courbe

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2,\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 1]\}.$$

- Le graphe d'une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la courbe

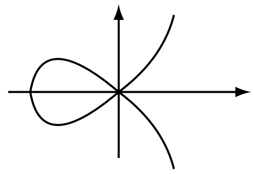
  $$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x),\ x \in I\},$$

  régulière partout où f est dérivable.

- La courbe

  $$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 + x^2\}$$

  est singulière en l'origine.



Définition. Une **courbe gauche** est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0,\ G(x, y, z) = 0,\ x \in A,\ y \in B,\ z \in C\},$$

où $F, G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions. La courbe est **régulière en un point** (x_0, y_0, z_0) si F et G sont différentiable en (x_0, y_0, z_0) et les deux gradients $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ et $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$ sont linéairement indépendants, ce qui arrive si et seulement si

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \wedge \nabla G(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0).$$

Dans ce cas, ils engendrent le plan normal à Γ en (x_0, y_0, z_0).

Exemples.

- Le cercle

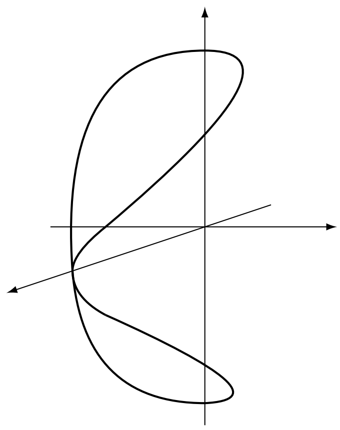
  $$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ 2x + y - z = 0\}$$

  est une courbe régulière partout.

- La *fenêtre de Viviani*

  $$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + z^2 = 1\}$$

  est singulière au point $(1, 0, 0)$, car ce point annulle le produit vectoriel des gradients des fonctions $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ et $G(x, y, z) = x + z^2 - 1$.



Une courbe est **algébrique** si les fonctions F et G qui la definissent sont des polynômes. La *géométrie algébrique* moderne est l'évolution de la *géométrie analytique* ou *cartésienne* (Réné Descartes 1596-1650), après le théorème des zéros, *nullstellensatz* (David Hilbert 1862-1943), les travaux de Zariski et Mumford (années '30) et la théorie des *faiseaux* et des *schemas* (Alexander Grothendieck 1928-2014).

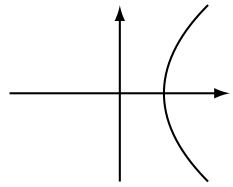
Le support d'une courbe paramétrée peut toujours être décrit de façon implicite, il suffit de trouver l'équation cartesienne qui contraint les coordonnées de ses points. Le contraire est faux: il existe des courbes définies implicitement qui n'admettent pas une paramétrisation globale.

Exemples.

- La branche d'hyperbole

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1,\ x > 0\}$$

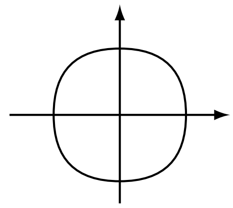
admet la paramétrisation $\gamma(t) = (\mathrm{ch}t, \mathrm{sh}t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.



- La courbe

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^6 = 1\}$$

n'admet pas de paramétrisation globale.



Théorème. *Toute courbe peut être paramétrée* <u>*localement*</u> *autour d'un point régulier, c'est-à-dire dans un voisinage ouvert du point.*

Preuve. Ceci est une conséquence du théorème des fonctions implicites. Pour donner l'idée du raisonnement, considerons le cas des courbes planes. Soit $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$ une courbe régulière en (x_0, y_0), i.e. telle que $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0,0)$, et supposons que $\frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0) \neq 0$. Alors il existe un ouvert U contenant x_0, un ouvert V contenant y_0 et une fonction différentiable $\varphi : U \longrightarrow V$ telle que $\varphi(x_0) = y_0$ avec la propriété suivante:

$$\text{pour tout } (x,y) \in U \times V \text{ on a} \qquad F(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \varphi(x).$$

De plus, on a

$$\varphi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0))}.$$

Par conséquent, l'application

$$\gamma(t) = (t, \varphi(t)) \in \mathbb{R}^2, \qquad \text{pour tout } t \in U,$$

est une paramétrisation de Γ au voisinage de (x_0, y_0), régulière dans ce point. $\square$

Exemple. La courbe $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^6 = 1\}$, autour du point $(0,1)$, admet la paramétrisation

$$\gamma(t) = (t, \sqrt[6]{1 - t^4}), \qquad t \in]-1,1[.$$

Ce résultat permet de trouver la courbure et la torsion d'une courbe définie implicitement en tout point régulier.

Par exemple, on peut ainsi montrer que la courbure de la courbe plane d'équation cartésienne $x^4 + y^6 = 1$ au point $(0, 1)$ vaut 0!

Remarque. Si γ est une courbe paramétrée régulière, son support Γ est une courbe régulière. Le contraire est faux, on peut paramétrer un support régulier de façon non régulière.

Exemple. L'axe des abscisse

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\}$$

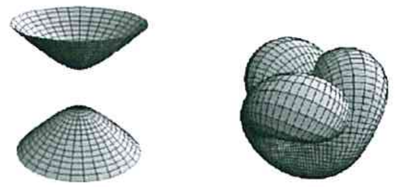
est évidemment une courbe implicite régulière, car le gradient de la fonction $F(x, y) = y$ est le vecteur $\nabla F(x, y) = (0, 1)$ constant et non nul. Cependant cet axe peut être paramétré de façon non régulière, par exemple par

$$\gamma(t) = (t^3, 0), \qquad t \in \mathbb{R},$$

qui n'est pas régulier en $t = 0$.

2 Surfaces

Une *surface* est un sous-ensemble de l'espace avec "dégré de liberté intrensèque" égal à 2, par exemple:



Pour décrire une surface, comme pour les courbes aux chapitre 1, soit on donne des contraintes aux coordonnées de ses points (*surfaces définies implicitement*), par exemple

$$\text{Sphère de rayon } r \text{ centrée en l'origine} = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = r^2\Big\},$$

soit on décrit ses points comme fonctions de deux paramètres (*surfaces paramétrées*), par exemple

$$\text{Même sphère} = \Big\{(r\cos u\cos v, r\sin u\cos v, r\sin v) \in \mathbb{R}^3 \mid u \in [0,2\pi],\ v \in \Big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big]\Big\},$$

Comme pour les courbes, la description paramétrique des surfaces permet d'en définir l'*aire* et toutes les courbures qui caractérisent les surfaces à déplacement près (la *courbure de Gauss* et la *courbure moyenne*, qui ne sont pas traités dans ce cours).

Dans ce chapitre on présente d'abord les surfaces paramétrées et ensuite celles défineis implicitement.

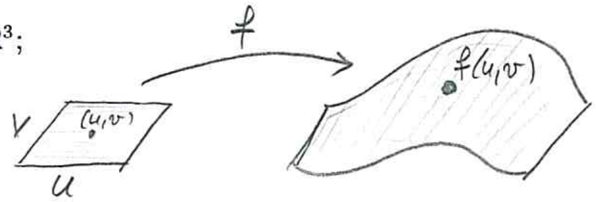
2.1 Surfaces paramétrées

Définition. Une **surface paramétrée** de classe C^k (avec $k \geq 0$) est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$S = \Big\{f(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \in \mathbb{R}^3 \mid u \in U \subset \mathbb{R},\ v \in V \subset \mathbb{R}\Big\} = f(U\times V),$$

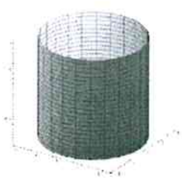
où $U, V \subset \mathbb{R}$ sont deux intervals et l'application $f : U\times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est de classe C^k, c'est-à-dire que les fonctions $x,y,z : U\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^k. Si la classe C^k n'est pas indiquée on suppose que la surface soit lisse, c'est-à-dire de classe C^∞. On appelle:

- **paramétrisation** l'application $f : U\times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$;
- **paramètres** les variables $u \in U$ et $v \in V$;
- **support (géométrique)** de f son image $\operatorname{supp} f = f(U\times V) \subset \mathbb{R}^3$.

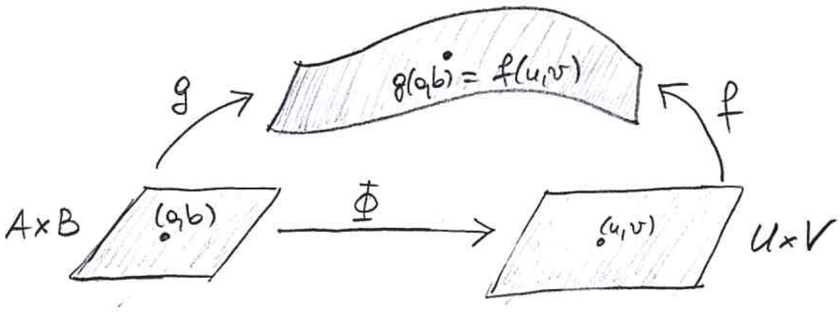


Exemples.

- *Cylindre* $f(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v) \in \mathbb{R}^3$, avec $u, v \in \mathbb{R}$.
- *Hélicoïde* $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v) \in \mathbb{R}^3$, avec $u, v \in \mathbb{R}$.



Définition. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Un **reparamétrage** de S est une nouvelle paramétrisation $g : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de S obtenue en composant f avec un difféomorphisme $\Phi : A \times B \longrightarrow U \times V$, i.e. telle que $g = f \circ \Phi$



Les nouveaux paramètres sont $(a, b) = \Phi^{-1}(u, v)$.

Exemples.

- L'application $\Phi(a, b) = (a^2, b)$ n'est pas inversible.

  L'application $\Phi(a, b) = (a^3, b)$ est inversible, mais sa réciproque $\Phi^{-1}(u, v) = (\sqrt[3]{u}, v)$ n'est pas différentiable en $u = 0$.

  L'application $\Phi(a, b) = (e^{a+b}, a - b)$ est un difféomorphisme, avec réciproque $\Phi^{-1}(u, v) = \left(\frac{1}{2}(\ln u + v), \frac{1}{2}(\ln u - v)\right)$.

- Soit S la surface paramétrée par

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ (u, v) \mapsto f(u, v) = (e^v, (u - v)\, e^{-v}, u - v).$$

  L'application

$$\Phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \ (u, v) \mapsto \Phi^{-1}(u, v) = \big(u - v, e^v\big) =: (a, b)$$

  est un difféomorphisme avec réciproque

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ (a, b) \mapsto \Phi(a, b) = (a + \ln b, \ln b),$$

  donc l'application

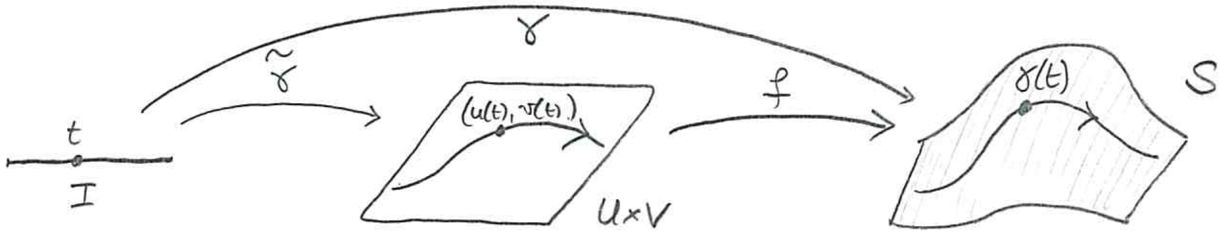
$$g = f \circ \Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ (a, b) \mapsto g(a, b) = f(a + \ln b, \ln b) = \left(b, \frac{a}{b}, a\right)$$

  est un reparamétrage de S.

2.2 Courbes sur une surface

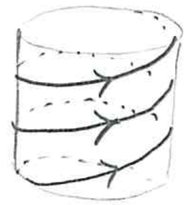
Définition. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Une **courbe paramétrée sur** S est une courbe paramétrée $\gamma : I \longrightarrow S$ obtenue en composant f avec une paramétrisation $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow U \times V$ des paramètres, que l'on indique $\tilde{\gamma}(t) = \big(u(t), v(t)\big)$:

$$\gamma(t) = f\big(u(t), v(t)\big), \qquad \text{pour tout } t \in I.$$



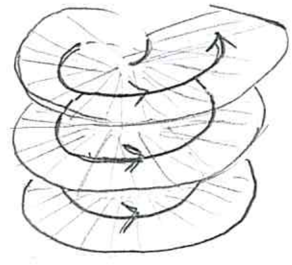
Exemple. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'hélice $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, t)$ est une courbe gauche qui peut être vu comme

- courbe contenue dans le cylindre paramétrée par $f(u,v) = (a\cos u, a\sin u, v) \in \mathbb{R}^3$: les paramètres u et v sont à leur tour paramétrés par



$$u(t) = t \qquad \text{et} \qquad v(t) = t.$$

- courbe contenue dans l'hélicoïde paramétrée par $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v) \in \mathbb{R}^3$: les paramètres u et v sont à leur tour paramétrés par



$$u(t) = a \qquad \text{et} \qquad v(t) = t.$$

2.3 Surfaces régulières

Définition. On dit que la surface S paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est

- **régulière en** $(u_0, v_0) \in U \times V$ si les vecteurs dérivées partielles de f en (u_0, v_0), qu'on note

$$\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u} = \partial_u f(u_0,v_0) = f_u(u_0,v_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v} = \partial_v f(u_0,v_0) = f_v(u_0,v_0),$$

  sont linéairement independants (et donc non nuls), i.e. si leur produit vectoriel est non nul:

$$\partial_u f(u_0,v_0) \wedge \partial_v f(u_0,v_0) \neq 0;$$

- **singulière en** $(u_0, v_0) \in U \times V$ si les vecteurs $\partial_u f(u_0,v_0)$ et $\partial_v f(u_0,v_0)$ sont linéaitrement dépendants, i.e. si

$$\partial_u f(u_0,v_0) \wedge \partial_v f(u_0,v_0) = 0.$$

Exemples.

- La surface paramétré par $f(u,v) = (u^2, v^2, uv) \in \mathbb{R}^3$, avec $u, v \in \mathbb{R}$, est singulière en $(0,0)$, car

$$\begin{cases} \partial_u f(u,v) = (2u, 0, v) \\ \partial_v f(u,v) = (0, 2v, u) \end{cases} \Longrightarrow \quad \big(\partial_u f \wedge \partial_v f\big)(u,v) = (-2v^2, -2u^2, 4uv),$$

  donc le vecteur $\big(\partial_u f \wedge \partial_v f\big)(u,v)$ s'annulle en $(0,0)$.

- Le graphe d'une fonction $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donne une surface S paramétrée par $f(u,v) = \big(u, v, h(u,v)\big)$, avec $(u,v) \in D_h \subset \mathbb{R}^2$. Si h est de classe C^1, la surface S est régulière partout:

$$\begin{cases} \partial_u f(u,v) = \big(1, 0, \partial_u h(u,v)\big) \\ \partial_v f(u,v) = \big(0, 1, \partial_v h(u,v)\big) \end{cases} \Longrightarrow \quad \big(\partial_u f \wedge \partial_v f\big)(u,v) = (-\partial_u h(u,v), -\partial_v h(u,v), 1) \neq \vec{0}.$$

Définition. Soit S une surface paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$, et soit $P_0 = f(u_0, v_0)$ un point régulier de S. On appelle:

- **plan tangent** à S au point P_0 le plan engendré par les vecteurs $\partial_u f(u_0,v_0)$ et $\partial_v f(u_0,v_0)$ et passant par P_0,

$$\begin{aligned} T_{P_0}S &= P_0 + \mathrm{Vect}\Big(\partial_u f(u_0,v_0), \partial_v f(u_0,v_0)\Big) \\ &= \Big\{ f(u_0,v_0) + \lambda\, \partial_u f(u_0,v_0) + \mu\, \partial_v f(u_0,v_0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Big\}; \end{aligned}$$

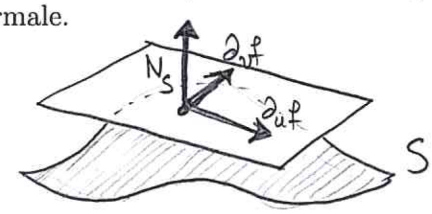
- **vecteur normale (unitaire)** de S en P_0 le vecteur

$$N_S(u_0,v_0) = \frac{\partial_u f(u_0,v_0) \wedge \partial_v f(u_0,v_0)}{\|\partial_u f(u_0,v_0) \wedge \partial_v f(u_0,v_0)\|}.$$

Le plan tangent à S en (u_0,v_0) contient la droite tangente à toutes les courbes régulières sur S passant par $f(u_0,v_0)$. En effet, si $\gamma(t) = f\big(u(t), v(t)\big)$ est une telle courbe, et $(u_0,v_0) = \big(u(t_0), v(t_0)\big)$, on a

$$\gamma'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(u_0,v_0)\; u'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(u_0,v_0)\; v'(t_0) \in \mathrm{Vect}\Big(\partial_u f(u_0,v_0), \partial_v f(u_0,v_0)\Big).$$

Par définition, les trois vecteurs $\Big(\partial_u f(u_0,v_0), \partial_v f(u_0,v_0), N_S(u_0,v_0)\Big)$ forment une base directe de l'espace au-dessus du point $f(u_0,v_0)$ de la surface (c'est-à-dire un repère mobile). Mais attention: cette base n'est ni orthogonale ni normale.



La "courbure" d'une surface, c'est-à-dire combien elle s'éloigne d'être une portion de plan, est perçue de façon intrensèque par le mouvement du repère mobile $\big(\partial_u f, \partial_v f, N_S\big)$. Pour cela, il faut étudier la variation du vecteur normale N_S, i.e. la différentielle $-dN_S$, qui s'appelle *application de Weingarten.* Suite et détails en Master Général de Math!

2.4 Surfaces de révolution et surfaces réglées

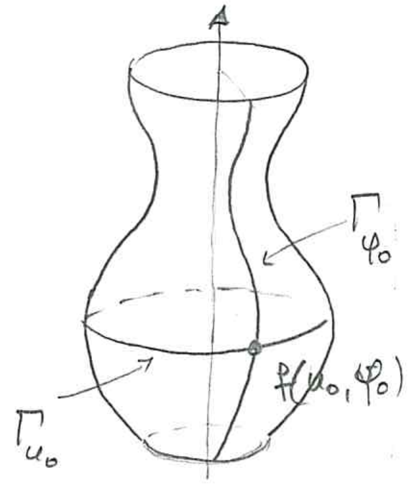
Définition. Une **surface de révolution** est une surface S pour laquelle il existe une paramétrisation de la forme

$$f : U \times [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3, \ (u, \varphi) \mapsto f(u, \varphi) = R_\varphi^{\vec{\ell}}(\alpha(u)),$$

où:

- $\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe plane de classe C^1 qui s'appelle **méridien** de S;
- $R_\varphi^{\vec{\ell}}$ est la rotation d'angle φ autour d'une droite de direction $\vec{\ell}$ contenue dans le plan du meridien α, qui s'appelle **axe de révolution** de S.

On a alors $S = \bigcup_{\varphi \in [0,2\pi[} R_\varphi^{\vec{\ell}}\, \Gamma$, où $\Gamma = \alpha(U)$ est le support de α.



On appelle:

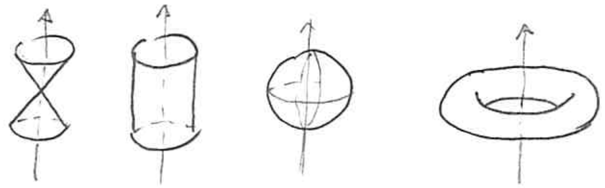
- **méridiens** de S les courbes Γ_{φ_0} sur S à angle φ_0 fixé:

$$\Gamma_{\varphi_0} = \Big\{\alpha(u) = f(u, \varphi_0) \mid u \in U\Big\};$$

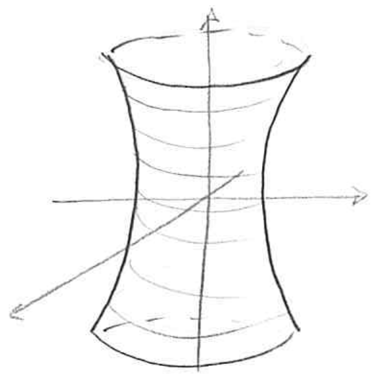
- **parallèles** de S les courbes Γ_{u_0} sur S à hauteur u_0 fixée:

$$\Gamma_{u_0} = \Big\{\beta(\varphi) = f(u_0, \varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi[\Big\} = \text{ cercle;}$$

Exemples.



- Le *cône* $x^2 + y^2 = z^2$,
  le *cylindre* $x^2 + y^2 = r^2$,
  la *sphère* $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$,
  le *tore* = donut, etc.
- L'*hyperboloïde à une nappe* $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
  En effet, si on appelle S l'hyperboloïde, son intersection avec le plan $\pi = \{y = 0\}$ donne deux possibles méridiens:



$$S \cap \pi = \Big\{(x, 0, z) \mid x^2 - z^2 = 1\Big\} = \alpha(\mathbb{R}) \ \cup \ \tilde{\alpha}(\mathbb{R}),$$

où $\alpha(u) = (\operatorname{ch} u, 0, \operatorname{sh} u)$ et $\tilde{\alpha}(u) = (-\operatorname{ch} u, 0, \operatorname{sh} u)$. L'un d'eux est suffisant pour couvrir S par rotation: si

$$R_\varphi^{\vec{z}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$S = \bigcup_{\varphi \in [0,2\pi[} R_\varphi^{\vec{z}}\, \alpha(\mathbb{R}) = \Big\{f(u, \varphi) = \big(\cos\varphi \operatorname{ch} u, \sin\varphi \operatorname{ch} u, \operatorname{sh} u\big) \mid u \in \mathbb{R}, \ \varphi \in [0, 2\pi[\Big\}.$$

Définition. Une **surface réglé** est une surface S pour laquelle il existe une paramétrisation de la forme

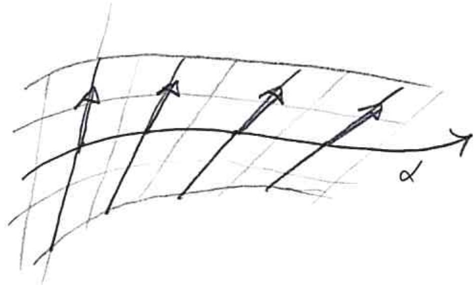
$$f : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ (u,v) \mapsto f(u,v) = \alpha(u) + v\ \beta(u),$$

où:

- $\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe de classe C^1 qui s'appelle **diréctrice** de S;
- $\beta : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une famille de vecteurs non nuls, i.e. $\beta(u) \neq 0$ pour tout $u \in U$.

Pour tout $u \in U$, on appelle **génératrice** de S la droite

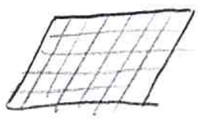
$$\Delta_u = \Big\{ v \mapsto f(u,v) = \alpha(u) + v\ \beta(u) \Big\},$$

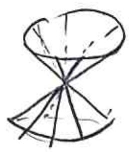


de direction $\beta(u)$ et passant par le point $\alpha(u)$.
On a alors $S = \bigcup_{u \in U} \Delta_u$. En somme, une surface réglée est l'union de ses droites génératrices le long de la courbe directrice.

Exemples.

- Les plans.
  Les cônes.
  Les cylindres.





- L'*hyperboloïde à une nappe* $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.
  En effet, si on appelle S l'hyperboloïde, son intersection avec le plan $\pi = \{x = 1\}$ donne deux droites:

$$S \cap \pi = \ \big\{ (1,y,z) \mid y^2 - z^2 = 0 \big\} \ = \ \Delta^+ \ \cup \ \Delta^-,$$

  où $\Delta^+ = \big\{ (1,y,z) \mid z = y \big\}$ et $\Delta^- = \big\{ (1,y,z) \mid z = -y \big\}$ sont les droites de direction respectivement $\beta^+ = (0,1,1)$ et $\beta^- = (0,1,-1)$. Puisque S est une surface de révolution, on a

$$S = \bigcup_{\varphi \in [0,2\pi[} R^{\vec{z}}_{\varphi}(\Delta^+) \cup R^{\vec{z}}_{\varphi}(\Delta^-).$$

  Mais une droite est suffisante pour remplir S, car pour tout $P \in R^{\vec{z}}_{\varphi}(\Delta^-)$ il existe un $\psi \in [0, 2\pi]$ tel que $P \in R^{\vec{z}}_{\psi}(\Delta^+)$.
  En conclusion on a

$$\Delta^+ = \big\{ (1,0,0) + v\ (0,1,1) \mid v \in \mathbb{R} \big\},$$

  donc

$$\begin{aligned} S &= \bigcup_{\varphi \in [0,2\pi[} R^{\vec{z}}_{\varphi}(\Delta^+) = \big\{ R^{\vec{z}}_{\varphi}\ (1,0,0) + v\ R^{\vec{z}}_{\varphi}\ (0,1,1) \mid \varphi \in [0,2\pi[, \ v \in \mathbb{R} \big\} \\ &= \Big\{ f(\varphi, v) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) + v\ (-\sin\varphi, \cos\varphi, 1) \mid \varphi \in [0,2\pi[, \ v \in \mathbb{R} \Big\}. \end{aligned}$$

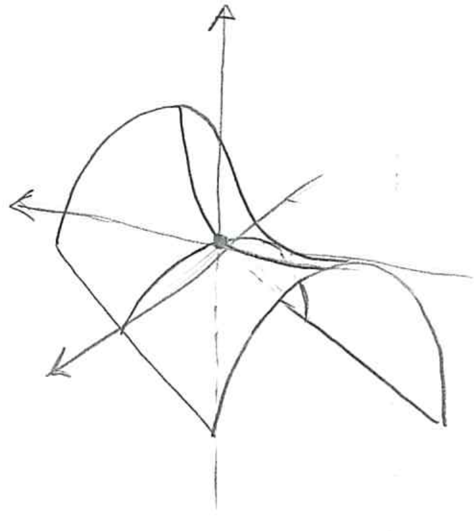
- Le *paraboloïde hyperbolique* $x^2 - y^2 - z = 0$.
  En effet, si on l'appelle S, son intersection avec les plans

  $$\pi_u^\pm = \Big\{(x,y,z) \mid x \pm y = u\Big\}$$

  donne deux droites

  $$S \cap \pi_u^+ = \Big\{(x,y,z) \mid x+y=u,\ z=-2uy+u^2\Big\} = \Delta_u^+$$
  $$S \cap \pi_u^- = \Big\{(x,y,z) \mid x-y=u,\ z=2uy+u^2\Big\} = \Delta_u^-$$

  et on montre facilement que $S = \bigcup_{u\in\mathbb{R}} \Delta_u^+ = \bigcup_{u\in\mathbb{R}} \Delta_u^-$.



2.5 Aire des surfaces [à voir après Ch. 3]

Définition. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface régulière de classe C^1 paramétrée par $f : U\times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Si f est bijective sur son image S, on appelle **aire de** S le nombre réel positif

$$\mathrm{Aire}\,(S) = \iint_{U\times V} \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\| \, du\, dv.$$

Lemme. *Le nombre* Aire (S) *ne dépend pas de la paramétrisation (bijective) choisie.*

Preuve. Soit $g : A\times B \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une autre paramétrisation régulière et bijective de S, et soit $\Phi = g^{-1}\circ f : U\times V \longrightarrow A\times B$ le difféomorphisme qui donne le changement de paramètres, $\Phi(u,v) = (a,b)$. Puisque $f = g\circ\Phi$, on a $df = dg \circ d\Phi$, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} df_{(u,v)} &= dg_{(a,b)} \circ d\Phi_{(u,v)} \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial a}(a,b)\, \frac{\partial a}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial b}(a,b)\, \frac{\partial b}{\partial u}(u,v) \right) du + \left(\frac{\partial g}{\partial a}(a,b)\, \frac{\partial a}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial b}(a,b)\, \frac{\partial b}{\partial v}(u,v) \right) dv, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial g}{\partial a}(a,b)\, \frac{\partial a}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial b}(a,b)\, \frac{\partial b}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial g}{\partial a}(a,b)\, \frac{\partial a}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial b}(a,b)\, \frac{\partial b}{\partial v}(u,v) \end{aligned}$$

d'où suit que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \left(\frac{\partial a}{\partial u}(u,v)\, \frac{\partial b}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial a}{\partial v}(u,v)\, \frac{\partial b}{\partial u}(u,v) \right) \frac{\partial g}{\partial a}(a,b) \wedge \frac{\partial g}{\partial b}(a,b),$$

et donc que

$$\begin{aligned} \iint_{U\times V} \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv &= \iint_{U\times V} \left\| \det d\Phi_{(u,v)} \right\| \left\| \frac{\partial g}{\partial a}(\Phi(u,v)) \wedge \frac{\partial g}{\partial b}(\Phi(u,v)) \right\| du\, dv \\ &= \iint_{A\times B} \left\| \frac{\partial g}{\partial a}(a,b) \wedge \frac{\partial g}{\partial b}(a,b) \right\| da\, db. \end{aligned}$$

$\square$

2.6 Surfaces définies implicitement

Définition. Une **surface (définie implicitement)** est le *lieu des zéros* d'une fonction $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire un ensemble de la forme

$$S = \big\{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0,\ x \in A,\ y \in B,\ z \in C\big\}.$$

La surface est **algébrique** si F est un polynôme.

La surface est **régulière** au point (x_0, y_0, z_0) si F est différentiable en (x_0, y_0, z_0) et le gradient $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ est non-nul. Dans ce cas, il engendre une droite normale à S en (x_0, y_0, z_0), et le plan tangent se trouve comme plan orthogonal à $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ passant par (x_0, y_0, z_0).

Exemples.

- La surface $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = e^z\big\}$ est régulière partout.
- La surface $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 + 1\big\}$ est algébrique, et régulière partout.
- La surface $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\big\}$ est singulière en $(0, 0, 0)$. En effet, il s'agit du cône circulaire.
- Le graphe d'une fonction $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une surface

  $$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_g,\ z = g(x, y)\big\}$$

  régulière si g est différentiable. En effet:

  $$F(x, y, z) = g(x, y) - z \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y), -1\right) \neq (0, 0, 0)$$

  pour tout $(x, y, z) \in S$.