

Série de TD **2

Ex1 Soit
$$\begin{cases} f(u, v, w, x, y, z) = 0 ; \\ g(u, v, w, x, y, z) = 0 ; \\ h(u, v, w, x, y, z) = 0 . \end{cases}$$

Les éqns. étant supposées servir à définir trois fns u, v, w des variables x, y, z .

* Montrer que :
$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, v, w)} / \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, w)} \neq \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \end{vmatrix}$$

Ex2 Si $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, $x = \phi(r, s)$, $y = \psi(r, s)$

* Montrer que :
$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)} \neq \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix}$$

- Ex3 ① Montrer que la relation : $x^4 + x^3 y^2 - y + y^2 + y^3 = 1$, définit y comme fn. de x au voisinage de pt $(-1, 1)$.
② Calculer alors $\frac{dy}{dx}$ en ce pt.

- Ex4 ① Vérifier que la relation : $e^{xy} + y^2 - xy - 3y + 2x + 1 = 0$ définit y comme fn. de x sur un voisinage de $(0, 1)$.
② Montrer que cette fn. admet un développement limité à tout ordre au voisinage de $x = 0$.
③ Calculer ce développement limité à l'ordre 2.

Ex5 En considérant l'application $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) : M \mapsto M^2$
* Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\|A - I_n\|_K \leq \alpha$ possède une racine carrée.

- Ex6 Les fns. suivantes sont-elles des immersions? des submersions?
① $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto (x, y, 0)$ ② $f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y, z) \mapsto (y, z)$
③ $f_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y, z) \mapsto xy + 2yz + 3xz$ ④ $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; t \mapsto (\sin 2t, \sin 3t)$
⑤ $f_5: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto (e^x, \cos y, \sin y)$.