Univ. OEB
Dpt. MI
Maths L3
Géom Diff

Série de TD N° 1

Ex1 Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Calculer les dérivées partielles des fns. suivantes : ① $g(x,y) = f(y,x)$, ② $g(x) = f(x,x)$.
③ $g(x,y) = f(y, f(x,x))$, ④ $g(x) = f(x, f(x,x))$.

Ex2 Soit $f : E := M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow E$, définie par $f(M) = M^3$. * justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et déterminer $d_M f$ en tout $M \in E$.

Ex3 Soit $E := M_n(\mathbb{R})$ structuré en espace euclidien grâce au produit scalaire $\langle\langle A, B \rangle\rangle = tr(A^T B)$. Soit $\Omega = GL_n(\mathbb{R})$ l'ouvert de E constitué des matrices inversibles. On considère les applications suivantes :
① $tr : A \in E \longmapsto tr(A) \in \mathbb{R}$, ② $\det : A \in E \longmapsto \det(A) \in \mathbb{R}$
③ $f_{-1} : A \in \Omega \longmapsto f_{-1}(A) = A^{-1} \in \Omega$.
* Déterminer en tout pt. de leurs domaines de déf. le gradient pour les deux premières, et la différentielle pour la dernière.

Ex4 Déterminer $\nabla f(x)$, $\nabla^2 f(x)$ en tout pt. $x \in \mathbb{R}^n$ pour :
① $f : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \langle c, x \rangle + b \in \mathbb{R}$ ② $f : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \langle c, x \rangle + b \in \mathbb{R}$

Ex5 On muni $E = \mathbb{R}_n[x]$ de la norme $\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$. Soit $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$; $\phi(f) = \int_0^1 f^3(t)\,dt$. * Démontrer que ϕ est diff. sur E et calculer $d_f \phi$.

Ex6 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$, on a : $|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2$
* Démontrer que f est constante.

Ex7 Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable, on suppose que pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$:
$f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
* Démontrer que f est linéaire.

Solution des Ex. TD N°01

Ex1 Soit f une fn. définie sur $\mathbb{R}^2$.

① $g(x,y)=f(y,x)$, $\frac{\partial g}{\partial x}=\,?$

on a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\partial_1 f+\frac{\partial x}{\partial x}\partial_2 f\right)\Big|_{(y,x)}=\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\left(\frac{\partial y}{\partial y}\partial_1 f+\frac{\partial x}{\partial y}\partial_2 f\right)\Big|_{(y,x)}=\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$

② $g(x)=f(x,x)$, $g'(x)=\,?$

on a $g'(x)=\left(\frac{\partial x}{\partial x}\partial_1 f+\frac{\partial x}{\partial x}\partial_2 f\right)\Big|_{(x,x)}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,x)$

③ $g(x,y)=f(y,f(x,x))$; $\frac{\partial g}{\partial x}=\,?$

Notons, pour simplifier, $h(x)=f(x,x)$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\partial_1 f+\frac{\partial h}{\partial x}\partial_2 f\right)\Big|_{(y,h(x))}=h'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(y,h(x))$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,x)\right)\frac{\partial f}{\partial y}(y,f(x,x))$$

De même, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\left(\frac{\partial y}{\partial y}\partial_1 f+\frac{\partial h(x)}{\partial y}\partial_2 f\right)\Big|_{(y,h(x))}=\frac{\partial f}{\partial x}(y,f(x,x)).$$

Ex2 , Voir le cours.

Ex3. L'espace $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n, muni d'un produit scalaire : $\langle\langle A,B\rangle\rangle=Tr(A^TB)$. $GL_n(\mathbb{R})=\{M\in M_n(\mathbb{R}),\ det(M)\neq 0\}$.

Le det est une fn. polynomiale des coefficients de la matrice, c'est donc une fn. de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

• L'application $det: M_n(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$ est continue et $\Omega=GL_n(\mathbb{R})=det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, donc la partie Ω est ouverte dans $M_n(\mathbb{R})$. (car $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$).

① $Tr : A \mapsto Tr(A)$ est linéaire et continue (car $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) < \infty$), donc sa diff. en tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est elle-même : $d_A Tr(H) = Tr(H)$.

comme $d_A Tr(H) = \langle\langle \nabla Tr(A), H \rangle\rangle$ et $Tr(H) = \langle\langle I_n, H \rangle\rangle$, on obtient :

$\nabla Tr(A) = I_n$; pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

② $\det : A \mapsto \det(A)$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En développant le det. selon la i-ème ligne : $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot cof(a_{ij})$

avec $cof(a_{ij})$ est le cofacteur d'indice (i,j).

On en déduit que $\partial_{ij} \det(A) := \dfrac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A) = cof(a_{ij})$.

Les applications $(a_{ij}) \mapsto cof(a_{ij})$ sont continues car polynomiales, donc $A \mapsto \det(A)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$d_A \det(H) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{ij} \det(A) h_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} cof(a_{ij}) h_{ij}$$

$$= Tr(com(A)^T H) \quad \text{où } com(A) \text{ est la comatrice de } A.$$

Par conséquent : $\nabla \det(A) = com(A)$ en tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

③ $f_{-1} : A \in \Omega \longmapsto A^{-1} \in \Omega$.

L'application $A \mapsto com(A)$ est diff. car chacune de ses app. composantes (qui sont des déterminants) est diff. ; il s'ensuit que l'app. $f_{-1} : A \mapsto A^{-1}$ t.q. $A^{-1} = \dfrac{com(A)^T}{\det(A)}$ est diff.

D'après la relation $f_1(A) f_{-1}(A) = I_n$ où $f_1(A) = A$; $\forall A \in \Omega$, on trouve :

$$d_A(f_1 f_{-1})(H) = f_1(A)\, d_A f_{-1}(H) + d_A f_1(H)\, f_{-1}(A) = 0 \quad \text{(F. Leibniz généralisé)}$$

$$\Rightarrow A\, d_A f_{-1}(H) + H A^{-1} = 0 \Rightarrow d_A f_{-1}(H) = -A^{-1} H A^{-1} \ ; \ \forall A \in \Omega.$$

Ex4

① $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \langle c, x\rangle + b$

on a $d_x f(h) = \langle c, h\rangle \Rightarrow \nabla f(x) = c$ et $\nabla^2 f(x) = 0$,

② $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle c, x\rangle + d$

1ère Méthode : Notons $g(x) = \langle Ax, x\rangle$, on décompose g en deux applications ϕ et ψ t.q $\phi(x) = (x, x)$, $\psi(x,y) = \langle Ax, y\rangle$

(i.e. $g(x) = (\psi \circ \phi)(x)$)

on a $d_x \phi(h) = (h, h)$

et $d_x(\psi \circ \phi) = d_{(x,x)}\psi \circ d_x\phi \Rightarrow d_x(\psi\circ\phi)(h) = \psi(h, x) + \psi(x, h)$

d'où $d_x g(h) = \langle Ah, x\rangle + \langle Ax, h\rangle$

$= \langle h, A^T x\rangle + \langle Ax, h\rangle$

$= \langle (A + A^T)x, h\rangle$

$\Rightarrow \nabla g(x) = (A + A^T)x$ et $\nabla^2 g(x) = (A + A^T)$

Ainsi, $\frac{1}{2}(A + A^T)x + c = \nabla f(x)$

et $\nabla^2 f(x) = \frac{1}{2}(A + A^T)$

2ème Méthode : on a $d_x g(h) = \lim \dfrac{g(x+th) - g(x)}{t}$

Or, $\dfrac{g(x+th) - g(x)}{t} = \dfrac{\langle A(x+th), x+th\rangle - \langle Ax, x\rangle}{t}$

$= \dfrac{\langle Ax + A(th), x\rangle + \langle Ax + A(th), th\rangle - \langle Ax, x\rangle}{t}$

$= \dfrac{\langle A(th), x\rangle}{t} + \dfrac{\langle Ax + A(th), th\rangle}{t}$

$$\Rightarrow \quad \frac{g(x+th)-g(x)}{t} = \langle Ah, x\rangle + \langle Ax + A(th), h\rangle$$

on fait tendre t vers 0, on trouve :

$$d_x g(h) = \langle Ah, x\rangle + \langle Ax, h\rangle$$
$$= \langle (A + A^T)x, h\rangle$$
$$\Rightarrow \quad \nabla g(x) = (A + A^T)x \quad \text{et} \quad \nabla^2 g(x) = (A + A^T)$$

Ainsi, $\quad \nabla f(x) = \frac{1}{2}(A + A^T)x + C \quad$ et $\quad \nabla^2 f(x) = \frac{1}{2}(A + A^T)$

Ex5 soit $P, H \in E = \mathbb{R}_n[X]$; on a :

$$f(P+H) = \int_0^1 (P(t) + H(t))^3 dt = \int_0^1 P^3(t)\,dt + 3\int_0^1 P^2(t)H(t)\,dt + 3\int_0^1 P(t)H^2(t)\,dt + \int_0^1 H^3(t)\,dt.$$

Notons $\phi(H) = 3\int_0^1 P(t)H^2(t)\,dt + \int_0^1 H^3(t)\,dt$

$$\Rightarrow \quad |\phi(H)| \leq 3\,\|H\|^2 \int_0^1 |P(t)|\,dt + \|H\|^3$$

$$\Rightarrow \quad \phi(H) = o(\|H\|)$$

puisque $H \longmapsto 3\int_0^1 P^2(t)H(t)\,dt$ est linéaire et continue, on a prouvé que f est diff en P et que $d_P f(H) = 3\int_0^1 P^2(t)H(t)\,dt$.

Ex6.

Fixons $x \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour $h \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \|h\|^2 \quad , \text{ donc } f(x+h) = f(x) + o(h)$$

cela signifie que f est diff. en x et que $d_x f = 0$. En particulier, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

comme $\mathbb{R}^2$ est convexe (donc connexe par arc), ceci implique

que f est constante sur $\mathbb{R}^2$.

Ex7 $\quad f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$; $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ $\forall$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

on a $\quad f(0) = f(0x) = 0 f(x) = 0$

on fixe $x \in \mathbb{R}^n$ et on écrit que f est diff. en 0, on a donc :

$$f(\lambda x) = f(0) + d_0 f(\lambda x) + o(\lambda) \quad (q^d\ \lambda \to 0)$$

$\Rightarrow \quad \lambda f(x) = \lambda d_0 f(x) + o(\lambda)$, on simplifie par λ :

$\Rightarrow \quad f(x) = d_0 f(x) + o(1) \quad (q^d\ \lambda \to 0)$

on fait tendre λ vers 0 et on a donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = d_0 f(x)$$

Ainsi f est linéaire.