نموذج المدخلات و المخرجات الديناميكي

اعتمدنا في الفصول السابقة على التحليل الساكن باستخدام مصفوفة المعاملات الفنية التي تعبر عن تدفقات المنتجات بين القطاعات الإنتاجية لتلبية متطلباتها خلال دورة الإنتاج (السنة) الجارية, غير أن هناك بعض المدخلات تختلف عن المدخلات الوسيطية و يتم استخدامها في عملية الإنتاج لأكثر من دورة إنتاجية واحدة، كالآلات و المباني و المخزونات من المواد للاستخدام في الدورات الإنتاجية اللاحقة و غيرها و التي تعرف بالمدخلات الرأسمالية؛ يظهر من النوع المدخلات أخذ عنصر الزمن بعين الاعتبار، أي أننا ننتقل من التحليل الساكن إلى التحليل الديناميكي.

إن أهم ما يميز النموذج الديناميكي أنه يأخذ بعين الاعتبار عنصر الزمن و التغيرات الحاصلة في المتغيرات الاقتصادية المكونة للنموذج، حيث يعالج الاستثمار كمتغير داخلي يتحدد داخل النظام بربطه بالزيادة المطلوبة في إنتاج مختلف القطاعات، فإنتاج وحدة واحدة في القطاع j لا يحتاج فقط إلى مدخلات وسيطية و إنما يحتاج أيضا إلى مدخلات رأسمالية من القطاعات الأخرى يعبر عنها بمصفوفة المعاملات الرأسمالية ضمن النموذج الديناميكي الذي يوضح تطور الطاقة الإنتاجية في القطاعات بفعل الاستثمار.

1- مصفوفة المعاملات الرأسمالية: ليكن اقتصاد مكون من n قطاع إنتاجي, وبافتراض أن كل قطاع ينتج إضافة إلى السلع الوسيطية سلعا رأسمالية موجهة لزيادة التراكم الرأسمالي في القطاعات الأخرى بمقدار K_{ij} التي تعبر عن مقدار إنتاج القطاع i الموجه لتلبية احتياجات التراكم الرأسمالي في القطاع j؛ نعرف مصفوفة المعاملات الرأسمالية B من الرتبة n عناصرها b_{ij} تسمى المعاملات الرأسمالية حيث $b_{ij} = \frac{K_{ij}}{X_j}$ و نكتب $B=[\ b_{ij}\ ]$

تمثل المعاملات الرأسمالية b_{ij} عدد الوحدات المطلوبة من إنتاج القطاع i لزيادة الطاقة الإنتاجية في القطاع j بوحدة واحدة، و تشكل هذه المعاملات مصفوفة مربعة لـ n قطاع على الشكل التالي:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

2- فرضيات النموذج الديناميكي: تقوم صياغة نموذج المدخلات والمخرجات الديناميكي على الفرضيات التالية:

- المعاملات الفنية و معاملات المدخلات الأولية (القيمة المضافة) معطاة
- المعاملات الرأسمالية معلومة

- تستخدم السلع الرأسمالية لفترة غير محدودة زمنيا
- تستغل جميع القطاعات طاقتها الإنتاجية الكاملة
- الإستثمار عبارة عن دالة للنمو المتوقع

3- النموذج الديناميكي المغلق:

يدرس النموذج الديناميكي عملية إعادة الإنتاج أو ظاهرة النمو الاقتصادي الذي يظهر من خلال الاستثمار المعبر عنه بالتراكم الرأسمالي, فإذا كان X_j شعاع الإنتاج الإجمالي و B مصفوفة المعاملات الرأسمالية و A مصفوفة المعاملات الفنية، فإن حجم الإنتاج الإجمالي الذي يسمح بإعادة الإنتاج في الفترة اللاحقة يكون كما يلي:

$$X_t = AX_t + B(X_{t+1} - X_t) \Rightarrow X_t - AX_t = B(X_{t+1} - X_t)$$

$$\Rightarrow (I - A)\, X_t = B(X_{t+1} - X_t)$$

نضع $\Delta X_t = X_{t+1} - X_t$

$$(I - A)X_t = B(\Delta X_t) \Rightarrow \mathbf{X_t} = \mathbf{(I - A)^{-1}\, B(\Delta\, X_t)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.\ 1)$$

حيث أن ΔX_t تمثل التغير في حجم الإنتاج بين الفترتين الزمنيتين t و $t+1$ و تشير أيضا إلى الطاقة الإنتاجية الإضافية المطلوبة لتحقيق الإنتاج التوازني، أما $B(\Delta X_t)$ فتمثل حجم الاستثمار المطلوب لزيادة الطاقة الإنتاجية لمواجهة الزيادة في الإنتاج أو التراكم الرأسمالي المطلوب لعملية الإنتاج في الفترة اللاحقة.

4- النموذج الديناميكي المفتوح: في ظل النموذج الديناميكي المفتوح يمثل الاستثمار متغيرا داخليا يعكس نمو الإنتاج، و بالتالي يتم فصل التراكم الرأسمالي عن مكونات الطلب النهائي الأخرى التي تعتبر متغيرات خارجية, وتتم صياغة النموذج الديناميكي المفتوح انطلاقا من مبدأ المضاعف و المعجل في النظرية الاقتصادية الكلية حيث يكون الاستثمار مستحثا إذا كان هناك توقع لنمو الطلب النهائي و عليه يكون النموذج على الشكل التالي:

$$X_t = AX_t + B(X_{t+1} - X_t) + Y_t \Rightarrow X_t = AX_t + B(\Delta\, X_t) + Y_t$$

$$\Rightarrow X_t - AX_t - B(\Delta\, X_t) = Y_t$$

$$\Rightarrow (I - A)\, X_t - B(\Delta\, X_t) = Y_t$$

بقسمة الطرفين على X_t نجد:

$$(I-A) - B\left(\frac{\Delta X_t}{X_t}\right) = \frac{Y_t}{X_t}$$

نضع $\frac{\Delta X_t}{X_t} = r$

$$(I-A) - (r)B = \frac{Y_t}{X_t} \Rightarrow [(I-A) - (r)B]X_t = Y_t$$

$$\Rightarrow \mathbf{X_t = [(I-A) - (r)B]^{-1}\, Y_t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5.2)$$

تعرف المعادلة الأخيرة (5.2) بـ **نموذج ليونتيف الديناميكي** حيث r مصفوفة قطرية تمثل معدلات نمو الإنتاج القطاعية. و توضح هذه المعادلة بالمقارنة مع النموذج الساكن أن إنتاج الفترة الجارية X_t يغطي إضافة إلى المتطلبات المباشرة و غير المباشرة من المدخلات الوسيطية, أيضا المتطلبات من الرأسمالية للإنتاج في الفترة القادمة لمواجهة تغير الطلب النهائي, و يعتمد التراكم الرأسمالي على معدل النمو r و هيكل رأس المال القطاعي ممثلا في المصفوفة B.

نلاحظ أن نموذج ليونتيف يبين عملية إعادة الإنتاج اعتمادا على متغيرات الفترة الجارية، ولتوضيح التأثير الديناميكي لنمو الاستثمار يمكن إعادة صياغة النموذج على النحو التالي:

$$X_t = AX_t + B(X_{t+1} - X_t) + Y_t \Rightarrow X_t - AX_t + BX_t - BX_{t+1} = Y_t$$

$$\Rightarrow (I-A+B)\, X_t - BX_{t+1} = Y_t$$

$$\Rightarrow (I-A+B)\, X_t = BX_{t+1} + Y_t$$

$$\Rightarrow \mathbf{X_t = (I-A+B)^{-1}\,(BX_{t+1} + Y_t)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5.3)$$

توضح المعادلة (5.3) إنتاج الفترة الجارية بدلالة إنتاج الفترة القادمة، و بصورة مماثلة يمكن التعبير عن إنتاج الفترة القادمة بدلالة إنتاج الفترة الجارية كما يلي:

$$(I-A+B)\, X_t = BX_{t+1} + Y_t \Rightarrow BX_{t+1} = (I-A+B)\, X_t - Y_t$$

$$\Rightarrow \mathbf{X_{t+1} = B^{-1}\,[(I-A+B)\, X_t - Y_t]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5.4)$$

حيث:

X_t و X_{t+1} : تمثلان على التوالي إجمالي إنتاج القطاع j خلال الفترة الجارية و الفترة اللاحقة.

$(I-A+B)^{-1}$: المتطلبات المباشرة و غير المباشرة من المدخلات الوسيطية و الرأسمالية.

Y_t : الطلب النهائي للفترة الجارية

t : الزمن

المعادلتان (5.3) و (5.4) عبارة عن نظام معادلات خطية تفاضلية، حيث ترتبط قيم المتغيرات X_j بفترات زمنية مختلفة من خلال المعاملات الفنية و المعاملات الرأسمالية و الطلب النهائي، فإذا كان النموذج الديناميكي يكتب على الشكل:

$$(I - A + B)\,X_t - BX_{t+1} = Y_t$$

بوضع $G = (I - A + B)$ نكتب النموذج على شكل جملة معادلات خطية تفاضلية لـ n فترة كما يلي:

$$\begin{aligned} GX_0 - BX_1 &= Y_0 \\ GX_1 - BX_2 &= Y_1 \\ GX_2 - BX_3 &= Y_2 \\ GX_3 - BX_4 &= Y_3 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ GX_n - BX_{n+1} &= Y_n \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.5)$$

- الشكل المصفوفي: نكتب النموذج باستخدام المصفوفات كما يلي:

$$\begin{pmatrix} G & -B & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G & -B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & G & -B & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & G & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.6)$$

تهمل بعض النماذج الديناميكية النظر إلى ما بعد الفترة t كما هو الحال بالنسبة لنموذج ليونتيف الديناميكي، وعليه يمكن اعتبار $X_{t+1} = 0$ و بالتالي يكون $X_{n+1} = 0$، و يكون النموذج على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} GX_0 - BX_1 &= Y_0 \\ GX_1 - BX_2 &= Y_1 \\ GX_2 - BX_3 &= Y_2 \\ GX_3 - BX_4 &= Y_3 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ GX_n \quad\quad &= Y_n \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.7)$$

و نعيد كتابة الشكل المصفوفي للنموذج كما يلي:

$$\begin{pmatrix} G & -B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G & -B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & G & -B & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.8)$$

5- حل النموذج الديناميكي: تفترض أنظمة المعادلات الخطية التفاضلية عموما أن القيم الابتدائية (t=0) لمتغيرات النظام تكون معلومة, و يعتمد حل نموذج المدخلات و المخرجات الديناميكي على كون مصفوفة المعاملات الرأسمالية B غير شاذة أي تقبل مقلوبا.

فإذا كانت قيم الاستهلاك النهائي لـ n فترة معلومة يمكن إيجاد قيم الإنتاج الإجمالي لكل قطاع تراجعيا بطريقة خلفية أو أمامية كما يلي:

5-1- العلاقة التراجعية الخلفية: يسير الحل وفق هذه الطريقة بصورة عكسية عبر الزمن، حيث يبدأ الحل بحساب القيمة الأخيرة X_n و ينتهي بحساب القيمة الأولى X_0 كما يلي:

$$GX_t - BX_{t+1} = Y_t \Rightarrow GX_t = BX_{t+1} + Y_t$$
$$\Rightarrow X_t = G^{-1}(BX_{t+1} + Y_t) \qquad \text{.......................................} \quad (5.9)$$

انطلاقا من أن $X_{n+1} = 0$ في هذه العلاقة يكون الحل كما يلي:

$$\begin{aligned} X_n &= G^{-1} Y_n \\ X_{n-1} &= G^{-1}(BX_n + Y_{n-1}) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \\ X_2 &= G^{-1}(BX_3 + Y_2) \\ X_1 &= G^{-1}(BX_2 + Y_1) \\ X_0 &= G^{-1}(BX_1 + Y_0) \end{aligned} \qquad \text{....................................} \quad (5.10)$$

- الشكل المصفوفي للعلاقة التراجعية الخلفية: يمكن حل البرنامج مباشرة بصيغة المصفوفات لتحديد شعاع الإنتاج، و لغرض التبسيط نضع T=3

$$X_3 = G^{-1} Y_3$$

بتعويض X_3 بما يساويها في X_2 نجد:

$$X_2 = G^{-1}(BX_3 + Y_2) \Rightarrow X_2 = G^{-1}(BG^{-1} Y_3 + Y_2)$$

وبوضع $R = G^{-1}B$ نحصل على:

$$X_2 = RG^{-1} Y_3 + G^{-1} Y_2$$

و بتعويض X_2 بما يساويها في X_1 نجد:

$$X_1 = G^{-1}(BX_2 + Y_1) \Rightarrow X_1 = G^{-1}(B(RG^{-1} Y_3 + G^{-1} Y_2) + Y_1)$$
$$\Rightarrow X_1 = R^2G^{-1} Y_3 + RG^{-1} Y_2 + G^{-1}Y_1$$

و بتعويض X_1 بما يساويها في X_0 نجد:

$$X_0 = G^{-1}(BX_1 + Y_0) \Rightarrow X_0 = G^{-1}(B(R^2G^{-1} Y_3 + RG^{-1} Y_2 + G^{-1}Y_1) + Y_0)$$
$$\Rightarrow X_0 = R^3G^{-1} Y_3 + R^2G^{-1} Y_2 + RG^{-1}Y_1 + G^{-1}Y_0$$

مما سبق و بإعادة ترتيب الحدود نحصل على البرنامج التالي:

$$
\begin{aligned}
X_0 &= G^{-1}Y_0 + RG^{-1}Y_1 + R^2G^{-1}Y_2 + R^3G^{-1}Y_3 \\
X_1 &= G^{-1}Y_1 + RG^{-1}Y_2 + R^2G^{-1}Y_3 \\
X_2 &= G^{-1}Y_2 + RG^{-1}Y_3 \\
X_3 &= G^{-1}Y_3
\end{aligned}
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5.11)
$$

و منه يكون الشكل المصفوفي للبرنامج على الشكل التالي:

$$
\begin{pmatrix} G^{-1} & RG^{-1} & R^2G^{-1} & R^3G^{-1} \\ 0 & G^{-1} & RG^{-1} & R^2G^{-1} \\ 0 & 0 & G^{-1} & RG^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & G^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots (5.12)
$$

مصفوفة المعاملات (5.12) عبارة عن مقلوب مصفوفة المعاملات (5.8) أي:

$$
\begin{pmatrix} G & -B & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G & -B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & G & -B & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} G^{-1} & RG^{-1} & R^2G^{-1} & R^3G^{-1} \\ 0 & G^{-1} & RG^{-1} & R^2G^{-1} \\ 0 & 0 & G^{-1} & RG^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & G^{-1} \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots (5.13)
$$

5-2- العلاقة التراجعية الأمامية: لدراسة الآثار المستقبلية للأحداث الجارية نفترض غالبا أن القيم الابتدائية للمتغيرات في العلاقة التراجعية معروفة، و تظهر أهمية النموذج في تحديد القيم التي تأخذها المتغيرات في الفترات الموالية، و بافتراض أن القيم الابتدائية للطلب النهائي Y_0 و إجمالي الإنتاج X_0 معلومة يكون الحل بالسير مباشرة عبر الزمن وفقا للعلاقة التراجعية كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&GX_t - BX_{t+1} = Y_t \Rightarrow BX_{t+1} = GX_t - Y_t \\
&\Rightarrow X_{t+1} = B^{-1}(GX_t - Y_t) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5.14)
\end{aligned}
$$

و تكون الحلول المتوالية كما يلي:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= B^{-1}(GX_0 - Y_0) \\
X_2 &= B^{-1}(GX_1 - Y_1) \\
X_3 &= B^{-1}(GX_2 - Y_2) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5.15) \\
&\vdots \\
X_n &= B^{-1}(GX_{n-1} - Y_{n-1})
\end{aligned}
$$

من الواضح أن الحل يعتمد على قابلية المصفوفة B للقلب.

تجدر الإشارة إلى أن حل النموذج وفق العلاقة التراجعية الأمامية شديد الحساسية لاختيار القيم الابتدائية و قيم أسطر المصفوفة B [2]

- **الشكل المصفوفي للعلاقة التراجعية الأمامية:** بوضع T = 4 يكون البرنامج على الشكل التالي:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= B^{-1}(GX_0 - Y_0)\\
X_2 &= B^{-1}(GX_1 - Y_1)\\
X_3 &= B^{-1}(GX_2 - Y_2)\\
X_4 &= B^{-1}(GX_3 - Y_3)
\end{aligned}
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.16)
$$

الشكل المصفوفي للبرنامج يكون على الشكل التالي:

$$
\begin{pmatrix} -B^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -SB^{-1} & -B^{-1} & 0 & 0 \\ -S^2B^{-1} & -SB^{-1} & -B^{-1} & 0 \\ -S^3B^{-1} & -S^2B^{-1} & -SB^{-1} & -B^{-1} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} Y_0 - GX_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}
\qquad \ldots\ldots\ldots \quad (5.17)
$$

مثال (1): لتكن لديك المعطيات التالية لاقتصاد مكون من ثلاث قطاعات

مصفوفة المعاملات الفنية:

$$
A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.0909 & 0.25 \\ 0.05 & 0.3636 & 0.1166 \\ 0.15 & 0.1818 & 0.1666 \end{pmatrix}
$$

مصفوفة المعاملات الرأسمالية:

$$
B = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.015 & 0.01 \\ 0.085 & 0.12 & 0.03 \\ 0.03 & 0.08 & 0.02 \end{pmatrix}
$$

و بافتراض أن الطلب النهائي للسنوات القادمة يعطى كما يلي:

$$
Y_1 = \begin{pmatrix} 650 \\ 250 \\ 300 \end{pmatrix} \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 680 \\ 280 \\ 350 \end{pmatrix} \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 700 \\ 350 \\ 400 \end{pmatrix}
$$

- أحسب حجم الإنتاج القطاعي للسنوات الثلاث القادمة

[2] أنظر: Roland E. Miller & Peter D. Blair, Input Output analysis Foundations and extensions, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2009, PP 648-650

الحل:

باستخدام العلاقة التراجعية الخلفية: يمكن حساب حجم الإنتاج القطاعي للسنوات الثلاث القادمة بمعرفة قيم الاستهلاك النهائي كما يلي:

$X_3 = G^{-1} Y_3$
$X_2 = G^{-1} (Y_2 + B X_3)$
$X_1 = G^{-1} (Y_1 + B X_2)$

- إيجاد المصفوفة G^{-1}:

$G^{-1} = (I – A + B)^{-1}$

- حساب المصفوفة G:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2 & 0.0909 & 0.25 \\ 0.05 & 0.3636 & 0.1166 \\ 0.15 & 0.1818 & 0.1666 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.02 & 0.015 & 0.01 \\ 0.085 & 0.12 & 0.03 \\ 0.03 & 0.08 & 0.02 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0.82 & -0.0759 & -0.24 \\ 0.035 & 0.7563 & -0.0866 \\ -0.120 & -0.1018 & 0.8533 \end{pmatrix}$$

- مقلوب المصفوفة G:

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1.26671 & 0.17751 & 0.37429 \\ -0.03873 & 1.33501 & 0.12469 \\ 0.17351 & 0.18425 & 1.23939 \end{pmatrix}$$

- حجم الإنتاج المتوقع في السنة T_3:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1.26671 & 0.17751 & 0.37429 \\ -0.03873 & 1.33501 & 0.12469 \\ 0.17351 & 0.18425 & 1.23939 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 700 \\ 350 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1098.54 \\ 490.02 \\ 681.70 \end{pmatrix}$$

- حجم الإنتاج المتوقع في السنة T_2:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1.26671 & 0.17751 & 0.37429 \\ -0.03873 & 1.33501 & 0.12469 \\ 0.17351 & 0.18425 & 1.23939 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 680 \\ 280 \\ 350 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.02 & 0.015 & 0.01 \\ 0.085 & 0.12 & 0.03 \\ 0.03 & 0.08 & 0.02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1098.54 \\ 490.02 \\ 681.70 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1150.60 \\ 630.87 \\ 747.77 \end{pmatrix}$$

- حجم الإنتاج المتوقع في السنة T_1:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1.26671 & 0.17751 & 0.37429 \\ -0.03873 & 1.33501 & 0.12469 \\ 0.17351 & 0.18425 & 1.23939 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 650 \\ 250 \\ 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.02 & 0.015 & 0.01 \\ 0.085 & 0.12 & 0.03 \\ 0.03 & 0.08 & 0.02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1150.60 \\ 630.87 \\ 747.77 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1059.91 \\ 524.51 \\ 641.02 \end{pmatrix}$$

باستخدام الشكل المصفوفي: نحسب مقلوب مصفوفة معاملات البرنامج بالتجزئة و باستخدام العلاقة (5. 12) نحصل مباشرة على شعاع إجمالي الإنتاج للفترات الثلاث كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1.2667 & 0.1775 & 0.3743 & 0.0671 & 0.1076 & 0.0597 & 0.0040 & 0.0070 & 0.0033 \\ -0.0387 & 1.3350 & 0.1247 & 0.1482 & 0.2548 & 0.1170 & 0.0090 & 0.0159 & 0.0075 \\ 0.1735 & 0.1843 & 1.2394 & 0.0721 & 0.1813 & 0.0762 & 0.0061 & 0.0108 & 0.0051 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.2667 & 0.1775 & 0.3743 & 0.0671 & 0.1076 & 0.0597 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0387 & 1.3350 & 0.1247 & 0.1482 & 0.2548 & 0.1170 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1735 & 0.1843 & 1.2394 & 0.0721 & 0.1813 & 0.0762 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.2667 & 0.1775 & 0.3743 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0387 & 1.3350 & 0.1247 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1735 & 0.1843 & 1.2394 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 650 \\ 250 \\ 300 \\ 680 \\ 280 \\ 350 \\ 700 \\ 350 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1083.2475 \\ 573.9101 \\ 667.2485 \\ 1150.5980 \\ 630.8674 \\ 747.7700 \\ 1098.5415 \\ 490.0185 \\ 681.7005 \end{pmatrix}$$

شعاع إجمالي الإنتاج المكون من الأشعة الثلاثة X_1 و X_2 و X_3 يعطي تقريبا قيم مساوية للقيم المحسوبة بالعلاقة التراجعية

6- النموذج الديناميكي و معدل النمو الاقتصادي:

6-1- مؤشر النمو المتوازن: انطلاقا من صياغة النموذج الديناميكي المغلق لدينا

$$X_t = AX_t + B(X_{t+1} - X_t)$$

بافتراض أن جميع القطاعات الاقتصادية تنمو بنفس المعدل يمكن أن نعبر عن إنتاج الفترة t+1 بدلالة إنتاج الفترة t كما يلي:

$$X_{t+1} = \lambda X_t \qquad \text{.............................. (5. 18)}$$

تمثل λ الرقم القياسي لنمو الإنتاج بين الفترتين و تعرف في هذه الحالة بمؤشر النمو الرئيسي الذي تحققه جميع القطاعات الاقتصادية, و الذي يعكس النمو المتوازن لقطاعات النشاط الاقتصادي.

بالتعويض في العلاقة نجد

$$X_t = AX_t + B(\lambda X_t - X_t) \Rightarrow X_t = AX_t + B\lambda X_t - BX_t$$
$$\Rightarrow X_t - AX_t + BX_t = B\lambda X_t$$
$$\Rightarrow (I - A + B)X_t = B\lambda X_t$$
$$\Rightarrow B^{-1}(I - A + B)X_t = \lambda X_t \quad \text{.............................} \quad (5.19)$$

نضع $Q = B^{-1}(I - A + B)$ فينتج لدينا معادلة تبين أن جداء المصفوفتين Q و Xt يساوي جداء العدد السلمي λ و الشعاع Xt كما يلي:

$$QX_t = \lambda X_t \Rightarrow QX_t - \lambda X_t = 0$$
$$\Rightarrow (Q - \lambda I)X_t = 0 \quad \text{..............................} \quad (5.20)$$

تمثل العلاقة الأخيرة (5.20) مسألة القيمة الذاتية، وتمثل λ قيمة ذاتية للمصفوفة Q, ولتحديد قيم λ يجب أن يكون النظام الخطي المعرف بالمعادلة قابلا للحل و يقبل هذا النظام حلا غير الحل الصفري إذا و فقط إذا كان محدد مصفوفة معاملات النظام معدوما أي: $|Q - \lambda I| = 0$