بناء نموذج المدخلات و المخرجات

انطلاقا من جدول الإطار أو الهيكل الوصفي السابق يمكن استخراج بعض العلاقات الرياضية التي تستخدم في تحليل هيكل الاقتصاد الوطني وتشابكاته ولأغراض التنبؤ الاقتصادي في شكل معادلات رياضية تشتمل على الموارد والاستخدامات الخاصة بكل قطاع تعرف بنماذج المدخلات والمخرجات التي يمكن صياغتها انطلاقا من القراءة الأفقية أو العمودية لجدول المدخلات و المخرجات أي من زاوية العرض أو من زاوية الطلب.

1- الصياغة الرياضية لنموذج توازن المدخلات و المخرجات:

انطلاقا من الشكل العام لجدول المدخلات و المخرجات و بالاعتماد على الفرضيات التي بني عليها هذا الأخير و بافتراض إمكانية تقسيم الاقتصاد الوطني إلى n قطاع إنتاجي يمكن التعبير عن تدفقات الإنتاج لهذه القطاعات في صيغة معادلات رياضية كما يلي:

1-1- صياغة النموذج من زاوية العرض: تتم صياغة المعادلات من خلال القراءة الأفقية للجدول و التي توضح توزيع الإنتاج الإجمالي للقطاع i باعتباره قطاعا منتجا على الاستخدام الوسيط للقطاعات الأخرى j و الاستهلاك النهائي على شكل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = X_{11} + X_{12} + X_{13} + \dots\dots\dots + X_{1n} + Y_1 \\ X_2 = X_{21} + X_{22} + X_{23} + \dots\dots\dots + X_{2n} + Y_2 \\ X_3 = X_{31} + X_{32} + X_{33} + \dots\dots\dots + X_{3n} + Y_3 \\ . \quad . \quad . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \quad . \quad . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \quad . \quad . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ X_n = X_{n1} + X_{n2} + X_{n3} + \dots\dots\dots + X_{nn} + Y_n \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.1)$$

و منه فإن إجمالي إنتاج القطاع i يمكن كتابته على الشكل:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_i \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.2)$$

توضح هذه المعادلة التوازن بين العرض الكلي و الطلب الكلي لكل قطاع إنتاجي, حيث:

X_i : إجمالي إنتاج القطاع i

X_{ij} : قيمة إنتاج القطاع i المستخدم كمدخلات وسيطية في القطاع j

Y_i : قيمة إنتاج القطاع i الموجه لتلبية الطلب النهائي

و وفقا لفرض التناسب فإن الاستهلاك الوسيط في كل قطاع يتناسب مع إجمالي إنتاج هذا القطاع كما أن القيمة المطلوبة X_{ij} من إنتاج القطاع i لإنتاج ما قيمته X_j في القطاعj تمثل قيمة ثابتة من هذا الأخير يرمز لها بالرمز a_{ij} وتعرف بالمعامل الفني، و نعبر عن ذلك بالمعادلة التالية:

$$a_{ij}=\frac{Xij}{Xj} \text{ .... } (2.3)$$

ومنه:

$$X_{ij} = a_{ij} * X_j \text{ .... } (2.4)$$

حيث:

a_{ij} : المعامل الفني الذي يعبر عن قيمة المدخلات الوسيطية المنتجة في القطاع i و اللازمة لإنتاج ما قيمته وحدة نقدية واحدة في القطاع j

و بالتعويض عن X_{ij} من المعادلة (2.4) في جملة المعادلات الخطية (2.1) نحصل على جملة المعادلات التالية:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}X_n + Y_1\\
X_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \dots\dots\dots + a_{2n}X_n + Y_2\\
X_3 &= a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \dots\dots\dots + a_{3n}X_n + Y_3\\
&\vdots\\
X_n &= a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_3 + \dots\dots\dots + a_{nn}X_n + Y_n
\end{aligned}\right\} \text{ .... } (2.5)$$

و منه يمكن إعادة كتابة المعادلة (2.2) على الشكل:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * X_j + Y_i \text{ .... } (2.6)$$

تمثل هذه المعادلة شرط التوازن الاقتصادي في النموذج الساكن المفتوح.

1-2- صياغة النموذج من زاوية الطلب: تتم صياغة المعادلات من خلال القراءة العمودية للجدول و التي توضح متطلبات الإنتاج الوسيطية للقطاع **j** باعتباره قطاعا مستهلكا من إنتاج القطاعات الأخرى **i** و المدخلات من عوامل الإنتاج على شكل جملة المعادلات الخطية التالية:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= X_{11} + X_{21} + X_{31} + \dots\dots\dots + X_{n1} + V_1\\
X_2 &= X_{12} + X_{22} + X_{32} + \dots\dots\dots + X_{n2} + V_2\\
X_3 &= X_{13} + X_{23} + X_{33} + \dots\dots\dots + X_{n3} + V_3\\
&\vdots\\
X_n &= X_{1n} + X_{2n} + X_{3n} + \dots\dots\dots + X_{nn} + V_n
\end{aligned}\right\} \text{ .... } (2.7)$$

و منه فإن إجمالي إنتاج القطاع j يمكن كتابته على الشكل:

$X_j = \sum_{i=1}^{n} X_{ij} + V_j$ ………………….(2.8)

حيث:

X_j : إجمالي إنتاج القطاع j

X_{ij} : قيمة المدخلات الوسيطية للقطاع j من إنتاج القطاع i

V_j : القيمة المضافة و تمثل قيمة عوامل الإنتاج المستخدمة في القطاع j

و وفقا لفرض التناسب و بالتعويض عن x_{ij} من المعادلة (2.4) في جملة المعادلات الخطية (2.7) نحصل على جملة المعادلات التالية:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + a_{31}X_3 + \ldots\ldots + a_{n1}X_n + V_1 \\ X_2 = a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + a_{32}X_3 + \ldots\ldots + a_{n2}X_n + V_2 \\ X_3 = a_{13}X_1 + a_{23}X_2 + a_{33}X_3 + \ldots\ldots + a_{n3}X_n + V_3 \\ \vdots \\ X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_3 + \ldots\ldots + a_{nn}X_n + V_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2.9)$$

و منه يمكن إعادة كتابة المعادلة (2.8) على الشكل:

$X_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} * X_j + V_j$ ……………………….(2.10)

تبين هذه المعادلة هيكل تكاليف الإنتاج لكل قطاع و كيفية تكوين هذا الإنتاج.

1-3- التوازن الكلي لجدول المدخلات و المخرجات: بأخذ مجموع الأسطر و مجموع الأعمدة للمعادلتين (2.6) و (2.10) على التوالي نحصل على المعادلتين التاليتين:

- مجموع الأسطر:

$\sum_{i=1}^{n} Xi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * X_j + \sum_{i=1}^{n} Y_i$ …………………..(2.11)

- مجموع الأعمدة:

$\sum_{j=1}^{n} Xj = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} * X_j + \sum_{j=1}^{n} V_j$ ……………………(2.12)

بمقارنة المعادلتين (2.11) و (2.12) نجد أن $\sum_{j=1}^{n} Xj = \sum_{i=1}^{n} Xi$ أي أن إجمالي إنتاج القطاعات من زاوية العرض يساوي نظيره من زاوية الطلب,

كما أن $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} * X_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * X_j$ أي أن إجمالي الإنتاج الوسيط لجميع القطاعات الإنتاجية متساو من جانبي العرض و الطلب.

و منه يكون $\sum_{i=1}^{n} Yi = \sum_{j=1}^{n} Vj$ أي أن مجموع القيمة المضافة المحققة في جميع القطاعات يساوي إجمالي الطلب النهائي على إنتاج هذه القطاعات.

2- النموذج الاقتصادي الرياضي للمدخلات و المخرجات

2-1- الصياغة الرياضية للنموذج: ننطلق في صياغة هذا النموذج من معادلة توازن المدخلات و المخرجات من زاوية العرض التي تعبر عن شرط التوازن الاقتصادي، و نعيد كتابة جملة المعادلات الخطية (2.5) بصيغة المصفوفات كما يلي:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

و باستخدام جبر المصفوفات نكتب المعادلة (2.6) على الشكل:

$$X = A\,X + Y \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2.13)$$

حيث:

X: شعاع الإنتاج الإجمالي للقطاعات الإنتاجية

A: مصفوفة المعاملات الفنية

Y: شعاع الطلب النهائي

توضح المعادلة (2.13) أن إجمالي إنتاج كل قطاع يتم توزيعه إلى قسمين أساسين هما: مخرجات تستخدم كمدخلات وسيطة للقطاع نفسه والقطاعات الإنتاجية الأخرى، ومخرجات تستخدم كمنتج نهائي للاستهلاك المحلي و/أو التصدير. وانطلاقا من هذه المعادلة يمكن تقدير حجم الإنتاج الإجمالي (المخرجات) لكل قطاع اللازم لتلبية احتياجات الطلب الوسيط للقطاعات الإنتاجية، واحتياجات الطلب النهائي, و بما أن هذا الأخير يعتبر متغيرا خارجيا في هذا النموذج فإنه يمكن تقدير إجمالي إنتاج كل قطاع كمايلي:

$$\begin{aligned} X = AX + Y &\Rightarrow X - AX = Y \\ &\Rightarrow (I - A)X = Y \\ &\Rightarrow X = (I - A)^{-1}\,Y \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2.14) \end{aligned}$$

تمثل المعادلة (2.14) تقدير إجمالي الإنتاج في كل قطاع لتلبية الطلب النهائي المحدد مسبقا, حيث:

$(I - A)^{-1}$: تمثل مقلوب مصفوفة ليونتيف و تسمى مصفوفة المعاملات الفنية المباشرة و غير المباشرة أو المصفوفة التقنية للإنتاج.

2-2- قابلية النموذج للحل: يمثل النموذج الرياضي للمدخلات و المخرجات جملة معادلات خطية غير متجانسة مكون من n معادلة بـ n متغير, أي عبارة عن جملة كرامر, حيث يقبل هذا النظام حلا وحيدا إذا وفقط إذا كانت رتبة المصفوفة المرافقة لهذا النظام أي مصفوفة ليونتيف (I-A) تساوي عدد المتغيرات n لتكون هذه المصفوفة قابلة للقلب أي أن تكون مصفوفة مربعة و محددها غير معدوم (غير شاذة).

2-3- شروط هوكينز – سيمون (Hawkins-Simon Conditions): يتطلب توافق حل نموذج المدخلات والمخرجات مع المنطق الاقتصادي أن تكون جميع عناصر شعاع الإنتاج الإجمالي موجبة؛ بمعنى أنه لا يمكن إنتاج كميات سالبة في أي قطاع. و للحصول على الحلول غير السالبة لنموذج المدخلات و المخرجات يجب توفر بعض الشروط في هذا النموذج تعرف بشروط هوكينز- سيمون التي تتعلق بخصائص مصفوفة ليونتيف التي تعتمد أساسا على مصفوفة المعاملات الفنية A التي يجب أن تكون مصفوفة إنتاجية جميع عناصرها موجبة لضمان وجود مقلوب لمصفوفة ليونتيف.

و تكون مصفوفة المعاملات الفنية A مصفوفة إنتاجية إذا وفقط إذا وجد شعاع إنتاج $X \geq 0$ بحيث يكون $X > CX$

و ليكون حل النموذج اقتصاديا يجب أن يكون مقلوب مصفوفة ليونتيف موجودا و موجبا حسب شروط هوكينز- سيمون كما يلي:

(1) محدد مصفوفة ليونتيف موجب $\det(I - A) > 0$

(2) جميع المحددات الصغرى الرئيسية لمصفوفة ليونتيف موجبة أي:

$$M_1 = L_{11} > 0 , M_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} > 0 \ldots\ldots\ldots M_n = \begin{vmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \cdots & L_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

حيث:

M_i: المحددات الصغرى الرئيسية لمصفوفة ليونتيف من الدرجة الأولى إلى الدرجة n

L_{ij} : عناصر مصفوفة ليونتيف

تشير هذه الشروط إلى أن نظام ليونتيف هو نظام إنتاجي فعال و كل نظام جزئي منه هو نظام إنتاجي فعال أيضا, و معنى ذلك أن كل قطاع إنتاجي يستخدم مدخلات من القطاعات الأخرى المكونة للنظام الاقتصادي أقل من المخرجات التي يقدمها إلى هذا النظام.

مثال(1): ليكن لديك جدول المدخلات و المخرجات لاقتصاد معين مكون من ثلاث قطاعات إنتاجية كما يلي:

	S_1	S_2	S_3	CI	CF	X_i
S_1	150	800	400			3000
S_2	450	400	200			4000
S_3	300	500	100			2000
CI						
VA						
X_j	3000	4000	2000			

1- أكمل الجدول

2- جد مصفوفة المعاملات الفنية المباشرة

3- إذا تقرر رفع الطلب النهائي في القطاعات الثلاث في السنة المقبلة على التوالي بـ 350, 550 و 400 وحدة نقدية، أحسب قيمة الإنتاج اللازم في كل قطاع لتلبية الطلب النهائي الجديد.

4 - أعد تشكيل الجدول للفترة المقبلة بافتراض ثبات المعاملات الفنية.

الحل:

- **إتمام الجدول**:

حساب الاستهلاك الوسيط CI

- **أفقيا**: يمثل الطلب الوسيط مجموع إنتاج القطاع i المستخدم في القطاعات المستهلكة j أي:

$CI_{\mathrm{i}} = \sum_{j=1}^{\mathrm{n}} X_{\mathrm{ij}}$

و منه:

$CI_1 = 150 + 800 + 400 = 1350$
$CI_2 = 450 + 400 + 200 = 1050$
$CI_3 = 300 + 500 + 100 = 900$

- **عموديا**: يمثل الاستخدام الوسيط مجموع المدخلات الوسيطية للقطاع j المنتجة في القطاعات i أي:

$CI_j = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} X_{\mathrm{ij}}$

و منه:

$CI_1 = 150 + 450 + 300 = 900$
$CI_2 = 800 + 400 + 500 = 1700$
$CI_3 = 400 + 200 + 100 = 700$

حساب الاستهلاك النهائي CF:

يمثل الاستهلاك النهائي الفرق بين إجمالي إنتاج القطاع i و مجموع الاستخدام الوسيط لإنتاج هذا القطاع

$$CF_i = X_i - CI_i$$

ومنه:

$CF_1 = 3000 - 1350 = 1650$
$CF_2 = 4000 - 1050 = 2950$
$CF_3 = 2000 - 900 = 1100$

حساب القيمة المضافة VA:

تمثل القيمة المضافة الفرق بين إجمالي إنتاج القطاع j و مجموع استهلاكاته الوسيطية

$$VA_j = X_j - CI_j$$

ومنه:

$VA_1 = 3000 - 900 = 2100$
$VA_2 = 4000 - 1700 = 2300$
$VA_3 = 2000 - 700 = 1300$

تشكيل الجدول:

	S_1	S_2	S_3	CI	CF	X_i
S_1	150	800	400	**1350**	**1650**	3000
S_2	450	400	200	**1050**	**2950**	4000
S_3	300	500	100	**900**	**1100**	2000
CI	**900**	**1500**	**800**	**3300**		
VA	**1400**	**1200**	**800**		**5700**	
X_j	3000	4000	2000			**9000**

يظهر الجدول بعض العلاقات التوازنية للمدخلات و المخرجات

- إجمالي الإنتاج الوسيط للقطاعات الإنتاجية متساو من جانبي العرض و الطلب

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 3300$$

- مجموع الطلب النهائي = مجموع القيمة المضافة

$$\sum_{j=1}^{n} VA = \sum_{i=1}^{n} CF = 5700$$

- إجمالي الموارد (إجمالي الناتج من منظور الطلب) = إجمالي الاستخدامات (إجمالي الناتج من منظور العرض)

$$\sum_{j=1}^{n} Xj = \sum_{i=1}^{n} Xi = 9000$$

- إجمالي الاستخدامات (إجمالي الناتج من منظور العرض) = مجموع الاستهلاك النهائي + مجموع الاستهلاك الوسيط

$$\sum_{i=1}^{n} Xi = \sum_{i=1}^{n} CF + \sum_{i=1}^{n} CI = 5700 + 3300 = 9000$$

- إجمالي الموارد (إجمالي الناتج من منظور الطلب) = مجموع القيمة المضافة + مجموع الاستهلاك الوسيط

$$\sum_{j=1}^{n} Xj = \sum_{j=1}^{n} VA + \sum_{j=1}^{n} CI = 5700 + 3300 = 9000$$

إيجاد مصفوفة المعاملات الفنية المباشرة:

$$A = (a_{ij}) \ / \ a_{ij} = \frac{Xij}{Xj}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.2 & 0.2 \\ 0.15 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.125 & 0.05 \end{pmatrix}$$

حساب قيمة الإنتاج اللازم في كل قطاع لتلبية الطلب النهائي الجديد:

- **إيجاد مصفوفة ليونتيف:** نطرح مصفوفة المعاملات الفنية المباشرة من مصفوفة الوحدة

$$(I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.05 & 0.2 & 0.2 \\ 0.15 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.125 & 0.05 \end{pmatrix}$$

$$(I - A) = \begin{pmatrix} 0.95 & -0.2 & -0.2 \\ -0.15 & 0.9 & -0.1 \\ -0.1 & -0.125 & 0.95 \end{pmatrix}$$

- **حساب مقلوب مصفوفة ليونتيف $(I - A)^{-1}$:** نحسب مقلوب مصفوفة ليونتيف بطريقة المصفوفة المساعدة وفقا للعلاقة التالية: $(I - A)^{-1} = \frac{1}{\det(I-A)} adj(I - A)$ حيث:

* $adj(I - A)$ هي المصفوفة المساعدة لمصفوفة ليونتيف

* $det(I - A)$ محدد مصفوفة ليونتيف

- حساب المصفوفة المساعدة: هي عبارة عن منقول مصفوفة المحددات الصغرى لمصفوفة ليونتيف

$$adj(I - A) = \begin{pmatrix} 0.8425 & 0.215 & 0.16 \\ 0.1525 & 0.8825 & 0.125 \\ 0.1087 & 0.1387 & 0.825 \end{pmatrix}$$

- **حساب المحدد:**

$$det(I-A) = 0.748$$

مصفوفة المعاملات الفنية المباشرة وغير المباشرة

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.126 & 0.287 & 0.267 \\ 0.204 & 1.180 & 0.167 \\ 0.145 & 0.185 & 1.103 \end{pmatrix}$$

حساب قيمة الإنتاج:

يتم تقدير قيمة الإنتاج بالعلاقة: $X = (I - A)^{-1}\, Y$

- شعاع الطلب النهائي الجديد بعد ارتفاع الطلب النهائي في القطاعات الثلاث التوالي بـ 350, 550 و 400 وحدة نقدية

$$Y = \begin{pmatrix} 2000 \\ 3500 \\ 1500 \end{pmatrix}$$

- قيمة الإنتاج:

$$X = \begin{pmatrix} 1.126 & 0.287 & 0.267 \\ 0.204 & 1.180 & 0.167 \\ 0.145 & 0.185 & 1.103 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2000 \\ 3500 \\ 1500 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3657 \\ 4788.5 \\ 2592 \end{pmatrix}$$

لتلبية الطلب النهائي الجديد يجب إنتاج ما قيمته 3657وحدة نقدية في القطاع الأول, وإنتاج ما قيمته 4788.5 وحدة نقدية في القطاع الثاني, و إنتاج ما قيمته 2592 وحدة نقدية في القطاع الثالث.

- **إعادة تشكيل الجدول:**

- حساب مصفوفة الاستهلاك الوسيط الجديد بافتراض ثبات المعاملات الفنية

$a_{ij}=\frac{Xij}{Xj}$ $X_{ij} = a_{ij} * X_j$

$X_{11} = 0.05 * 3657= 182$

$X_{12} = 0.2 * 4788.5= 957$

$X_{13} = 0.2 * 2592= 518$

$X_{21} = 0.15 * 3657= 549.5$

$X_{22} = 0.10 * 4788.5= 479$

$X_{23} = 0.10 * 2592= 260$

$X_{31} = 0.10 * 3657= 365$

$X_{32} = 0.125 * 4788.5= 598$

$X_{33} = 0.05 * 2592= 129$

- الجدول الجديد: نعيد تشكيل الجدول بعد حساب إجمالي الاستهلاك الوسيط و القيمة المضافة بنفس الطريقة المبينة في السؤال الأول.

	S_1	S_2	S_3	CI	CF	X_i
S_1	182	957	518	**1657**	**2000**	3657
S_2	549	479	260.5	**1288.5**	**3500**	4788.5
S_3	365	598	129	**1092**	**1500**	2592
CI	**1096**	**2034**	**907.5**	**4037.5**		
VA	2561	2754.5	1684.5		**7000**	
X_j	3657	4788.5	2592			**11037.5**

بمقارنة الجدول الجديد مع الجدول السابق نلاحظ أن ارتفاع الطلب النهائي على منتجات القطاعات الثلاث أدى إلى ارتفاع الإنتاج الإجمالي لهذه القطاعات مقارنة بالفترة السابقة (ΔX_i) على التوالي بـ657 وحدة نقدية في القطاع الأول, و788.5 وحدة نقدية في القطاع الثاني و592 وحدة نقدية في القطاع الثالث؛ و يعود هذا الارتفاع إلى تغير المتطلبات المباشرة و غير المباشرة لتلبية الطلب النهائي, حيث ارتفعت المتطلبات المباشرة التي تمثل قيمة الإنتاج الموجه مباشرة لإشباع الطلب النهائي (ΔY_i) على منتجات كل قطاع بالقيم المحددة مسبقا (350, 550 و 400 وحدة نقدية) على اعتبار أن الطلب النهائي متغير خارجي يتحدد خارج النموذج, كما ارتفعت المتطلبات غير المباشرة التي تمثل قيمة الإنتاج الموجه للاستخدام الوسيط في كل قطاع مقارنة بالفترة السابقة ($\sum_{j=1}^{n} \Delta Xij$) على التوالي بـ307 وحدة نقدية في القطاع الأول, و238.5 وحدة نقدية في القطاع الثاني و192 وحدة نقدية في القطاع الثالث.

3- الأسعار و التكاليف في نموذج المدخلات و المخرجات

3-1- صياغة نموذج أسعار ليونتيف: في الواقع العملي لا تظهر جداول المدخلات و المخرجات كميات الإنتاج بالوحدات الفيزيائية لعدم توفر هذه البيانات في غالب الأحيان، لذلك تعتمد هذه الجداول على المعطيات المحاسبية و تعبر عن المبادلات القطاعية بالقيم النقدية، و بالتالي لا تظهر المعاملات الفنية الفعلية التي يتم حسابها كما يلي:

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{p_i X_{ij}}{p_j X_j} = \left(\frac{p_i}{p_j}\right) a_{ij} \text{ ....(2.15)}$$

حيث: pi تمثل أسعار المدخلات i المستخدمة لإنتاج المخرجات j ، و pj تمثل أسعار المخرجات.

من العلاقة السابقة نلاحظ أن المعاملات الفنية تتأثر بتغيرات الأسعار النسبية، و عليه يمكن إعادة صياغة جدول المدخلات و المخرجات بسعر السوق كما يلي:

	S1	S2	…….	Sn	DF	X_i
S1	$P_1 X_{11}$	$P_1 X_{12}$	…….	$P_1 X_{1n}$	$P_1 Y_1$	$P_1 X_1$
S2	$P_2 X_{21}$	$P_2 X_{22}$	…….	$P_2 X_{2n}$	$P_2 Y_2$	$P_2 X_2$
…….	…….	…….	…….	…….	…….	…….
Sn	$P_n X_{n1}$	$P_n X_{n2}$	…….	$P_n X_{nn}$	$P_n Y_n$	$P_n X_n$
∑CI	$\sum P_i X_{i1}$	$\sum P_i X_{i2}$	…….	$\sum P_i X_{in}$		
VA	V_1	V_2	…….	V_n		
X_j	$P_1 X_1$	$P_2 X_2$	…….	$P_n X_n$		

انطلاقا من الجدول يمكن كتابة البرنامج الخطي لتكلفة الإنتاج في كل قطاع على النحو التالي:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = p_1 X_{11} + p_2 X_{21} + p_3 X_{31} + \ldots\ldots\ldots + p_n X_{n1} + V_1 \\ X_2 = p_1 X_{12} + p_2 X_{22} + p_3 X_{32} + \ldots\ldots\ldots + p_n X_{n2} + V_2 \\ X_3 = p_1 X_{13} + p_2 X_{23} + p_3 X_{33} + \ldots\ldots\ldots + p_n X_{n3} + V_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ X_n = p_1 X_{1n} + p_2 X_{2n} + p_3 X_{3n} + \ldots\ldots\ldots + p_n X_{nn} + V_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.16)$$

و منه فإن إجمالي إنتاج القطاع j يمكن كتابته على الشكل:

$$p_j X_j = \sum_{i=1}^{n} p_i X_{ij} + V_j \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.17)$$

بقسمة الطرفين على X_j نجد:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} + v_j \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.18)$$

حيث: $v_j = \frac{V_j}{X_j}$ تمثل القيمة المضافة لوحدة واحدة من مخرجات القطاع j

و منه تكون أسعار إنتاج المخرجات في كل قطاع على شكل برنامج خطي كما يلي:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + a_{31} p_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{n1} p_n + v_1 \\ p_2 = a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + a_{32} p_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{n2} p_n + v_2 \\ p_3 = a_{13} p_1 + a_{23} p_2 + a_{33} p_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{n3} p_n + v_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ p_n = a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + a_{3n} p_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{nn} p_n + v_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.19)$$

نعيد كتابة البرنامج الخطي بصيغة المصفوفات على الشكل التالي:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{13} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \\ v_n \end{pmatrix}$$

و باستخدام جبر المصفوفات نكتب البرنامج الخطي على الشكل:

$P = A^t P + V$ …………….. (2.20)

حيث:

X: شعاع أسعار المخرجات للقطاعات الإنتاجية

A^t: منقول مصفوفة المعاملات الفنية

V: شعاع معاملات القيمة المضافة

يقبل هذا البرنامج حلا وحيدا موجبا - حسب شروط هوكينز- سيمون المشار إليها سابقا – وفق العلاقة التالية:

$P = [(I - A)^{-1}]^t \; V$ …………….. (2.21)

تعرف هذه العلاقة **بمعادلة أسعار ليونتيف** التي تعبر عن تكلفة المدخلات الأولية من عوامل الإنتاج المستلمة من القطاعات i لإنتاج ما قيمته وحدة نقدية واحدة من مخرجات القطاع j. و اعتمادا على ذلك فإن أسعار كل القطاعات تساوي الواحد[1] و تعبر بذلك عن مؤشرات الأسعار القطاعية في سنة الأساس (سنة إعداد الجدول).

3-2- دراسة تغيرات الأسعار القطاعية: انطلاقا من معادلة أسعار ليونتيف نلاحظ أن التغير في أسعار عوامل الإنتاج أي تغير القيمة المضافة أو أحد مكوناتها سيؤدي إلى تغير تكلفة إنتاج الوحدة في كل قطاع؛ و استنادا إلى فرضية ثبات المعاملات الفنية فإن ارتفاع تكاليف عوامل الإنتاج سيدفع القطاعات الإنتاجية إلى رفع أسعار مخرجاتها تبعا لذلك و ليس التخفيض من كمية المدخلات.

فإذا كانت أسعار المخرجات القطاعية في سنة الأساس في سنة الأساس p_0 حيث:

$P_0 = [(I - A)^{-1}]^t \; V_0$

[1] يمكن الحصول على الأسعار الفعلية للمخرجات في كل قطاع انطلاقا من نموذج أسعار على أساس بيانات كمية من جداول المدخلات و المخرجات المتضمنة للكميات, للمزيد أنظر:

Roland E.Miller & Peter D. Blair, Input –Output analysis : Foundations and Extensions

وإذا كانت أسعار المخرجات القطاعية في السنة الموالية (t=1) p_1 حيث:

$$P_1 = [(I-A)^{-1}]^t \; V_1$$

فإن تغير الأسعار (Δp) نتيجة لتغير القيمة المضافة أو أحد مكوناتها (ΔV) يكون كما يلي:

$$P_1 - P_0 = [(I-A)^{-1}]^t \; V_1 - [(I-A)^{-1}]^t \; V_0 \Rightarrow P_1 - P_0 = [(I-A)^{-1}]^t \; (V_1 - V_0)$$

$$\Rightarrow \Delta P = [(I-A)-1]t \; \Delta V \quad ......(2.22)$$

3-3- أثر تغيرات الأسعار على الطلب النهائي: ينعكس أثر التغير في تركيبة أسعار المدخلات و المخرجات القطاعية على أسعار المستهلك النهائي ممثلا بالمستوى العام للأسعار الذي يتم حسابه عن طريق ترجيح تغيرات الأسعار القطاعية بحجم الطلب النهائي, و هنا يمكن أن نميز بين المستوى العام للأسعار في السوق المحلي و أسعار الصادرات. و يتم حساب أثر التغير في أسعار المدخلات و المخرجات القطاعية على المستوى العام للأسعار باستخدام الرقم القياسي المرجح للأسعار وفق صيغة لاسبير كمايلي:

$$P = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_{1j} q_{0j}}{\sum_{j=1}^{n} p_{0j} q_{0j}}$$

حيث:

P: الرقم القياسي للأسعار المحلية أو أسعار الصادرات.

p_{0j} و p_{1j}: أسعار مخرجات القطاعات j في سنة الأساس و سنة المقارنة على التوالي.

q_{0j}: الكميات المطلوبة من إنتاج القطاعات j لتلبية الطلب النهائي المحلي أو الصادرات في سنة الأساس.

مثال (2): لتكن لديك المعطيات المستخرجة من جدول المدخلات و المخرجات لاقتصاد معين مكون من ثلاث قطاعات إنتاجية و المتمثلة في مصفوفة المعاملات الفنية المباشرة وإجمالي إنتاج كل قطاع كما يلي:

	I	II	III	Xi
I	0.043	0.296	0.25	2300
II	0.217	0.074	0.187	2700
III	0.130	0.185	0.062	1600

1- أحسب القيمة المضافة المحققة في كل قطاع

إذا ارتفعت القيمة المضافة في القطاع الثالث بـ 25 % وانخفضت في القطاع الثاني بـ 200 ون

2- ما تأثير ذلك على الهيكل السعري القطاعي؟

3- ما هو الأثر على المستوى العام للأسعار إذا علمت أن حجم مبيعات كل قطاع في السوق المحلى على الترتيب 800, 1500 و 600 وحدة, بينما بلغت الصادرات 100، 200 و 200 وحدة على التوالي، حيث تمثل قيمة الصادرات 20% من إجمالي الطلب النهائي.

الحل:

- إعادة تشكيل جدول المدخلات و المخرجات لحساب القيمة المضافة المحققة في كل قطاع:

	I	II	III	CI	CF	X_i
I	100	800	400	1300	1000	2300
II	500	200	300	1000	1700	2700
III	300	500	100	900	700	1600
VA	**1400**	**1200**	**800**			
X_j	2300	2700	1600			

- أثر تغير القيمة المضافة في في القطاع الثاني و القطاع الثالث على الهيكل السعري القطاعي والمستوى العام للأسعار

الأثر على الهيكل السعري القطاعي:

- حساب القيمة المضافة الجديدة في كل قطاع:

في القطاع الأول: بقيت القيمة المضافة دون تغيير أي: $V_1 = 1400$

في القطاع الثاني: انخفضت القيمة المضافة بـ 200 ون أي: $V_2 = 1200 - 200 = 1000$

في القطاع الثالث: ارتفعت القيمة المضافة بـ 25 % أي: $V_3 = (800) * 1.25 = 1000$

- حساب معاملات القيمة المضافة: $V_n = \frac{Vj}{Xj}$

$V_n = (0.608 \quad 0.370 \quad 0.625)$

- حساب مصفوفة المعاملات الفنية المباشرة وغير المباشرة $(I-A)^{-1}$:

$$(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.209 & 0.470 & 0.416 \\ 0.331 & 1.254 & 0.339 \\ 0.234 & 0.313 & 1.192 \end{pmatrix}$$

- حساب مؤشرات الأسعار القطاعية كما يلي: $P_n = [(I - A)^{-1}]^t V_n$

$$P_n = \begin{pmatrix} 1.209 & 0.331 & 0.234 \\ 0.470 & 1.254 & 0.313 \\ 0.416 & 0.339 & 1.192 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.608 \\ 0.370 \\ 0.625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.945 \\ 1.123 \end{pmatrix}$$

انطلاقا من ذلك يكون تغير مستوى الأسعار في كل قطاع هو ($P_n - 1 = \Delta P$) كما يلي:

في القطاع الأول: $\Delta P_1 = 1 - 1 = 0$

في القطاع الثاني: $\Delta P_2 = 0.945 - 1 = -0.055$

في القطاع الثالث: $\Delta P_3 = 1.123 - 1 = 0.123$

أي أن تغير القيمة المضافة في القطاعين الثاني والثالث أدى إلى ارتفاع مستوى أسعار منتجات القطاع الثالث بـ 12.3% و انخفاض الأسعار في القطاع الثاني بـ 5.5 % فيما بقيت دون تغيير في القطاع الأول.

الأثر على المستوى العام للأسعار في السوق المحلية: باستخدام مؤشر لاسبير نجد

$$IP = \frac{800+0.945(1500)+1.123(600)}{2900} = 1$$

ومنه: $\Delta IP = IP - 1 = 0$

أي أن تغير القيمة المضافة في القطاعين الثاني و الثالث لم يؤثر على المستوى العام للأسعار في السوق المحلية.

الأثر على المستوى العام لأسعار الصادرات: باستخدام مؤشر لاسبير نجد

$$IP = \frac{100+0.945(200)+1.123(200)}{500} = 1.0272$$

ومنه: $\Delta IP = IP - 1 = 0.0272$

أي أن تغير القيمة المضافة في القطاعين الثاني و الثالث أدى إلى ارتفاع المستوى العام لأسعار الصادرات بـ 2.72% تمثل زيادة في حصيلة الصادرات بقيمة 18.5 و ن:

$$\Delta X = 3400 * 0.2 * 0.0272 = 18.5$$