د. شيروف فضيلة

سلسلة تمارين: نظرية التقدير

تمارين محلولة – نظرية التقدير–

التمرين الأول: سحبت عينة عشوائية مكونة من 9 مصابيح كهربائية بمتوسط عمر 300 ساعة وانحراف معياري 45 ساعة، من شحنة كبيرة من المصابيح الكهربائية موزعة طبيعيا . أوجد 95% فترة الثقة لمتوسط عمر التشغيل غير المعلوم للشحنة كلها.

الحل: المجتمع موزع طبيعيا

$n = 9$	$\text{U}_{\overline{X}} = 300$
$N = ?$	$S = 45$
$V = n - 1 = 8$	

$$c = 95\% \rightarrow \alpha = 5\%$$

- **إيجاد قيمة t عند معنوية $\propto = 5\%$:**

$$t_{\left(v.\frac{\propto}{2}\right)} = t_{\left(24.\frac{0,05}{2}\right)} = 2,064$$

حسب نظرية التقدير للمتوسطات: مادام المجتمع موزع طبيعيا، وتباينه غير معلوم، و $(n < 30)$ ، فإن توزيع المعاينة يتبع توزيع ستيودنت.

- **تقدير المجتمع باحتمال 0,95:**

$$\hat{\text{U}}_X = \text{U}_{\overline{X}} \mp t_{\left(v-\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \delta_{\overline{X}}$$

من جداول ستيودنت:

$$t_{\left(9.\frac{0,05}{2}\right)} = 2,282$$

حسب نظرية المعاينة للمتوسطات: نفرض النسبة $\frac{n}{N} < 0,05$

$$\delta_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{45}{\sqrt{9}} = 15$$

$$\hat{\text{U}}_X = \text{U}_{\overline{X}} \mp d$$

$$\hat{U}_X = 300 \mp (2{,}282)(15)$$

$$\hat{U}_X = 300 \mp 34{,}23$$

$$P(300 - 34{,}23 < \hat{U}_X < 300 + 34{,}23) = 0{,}95$$

$$P(265{,}77 < \hat{U}_X < 334{,}23) = 0{,}95$$

التمرين الثاني: أخذت عينة مكونة من 400 من بين 100000 طالب بجامعة ما بإحدى السنوات، وجد أن متوسط طول الطالب في العينة هو 170 cm، وكان الانحراف المعياري لمجتمع الطلبة هو cm40.

–أوجد 90%فترة الثقة لمتوسط الطول في مجتمع الطلبة.

الحل:

$$\boxed{\begin{array}{cc} n = 400 & U_{\overline{X}} = 170 \\ N = 100000 & \delta = 45 \\ \multicolumn{2}{c}{V = n - 1 = 8} \end{array}}$$

$$c = 90\% \rightarrow \alpha = 10\%$$

بما أن المجتمع معلوم التوزيع ومعلوم التباين، وحجم المجتمع $(n > 30)$ فإن توزيع المعاينة يتبع توزيع طبيعي.

- **تقدير متوسط المجتمع:**

$$\hat{U}_X = U_{\overline{X}} \mp d$$

$$\hat{U}_X = U_{\overline{X}} \mp Z_{\frac{\alpha}{2}} . \delta_{\overline{X}}$$

حسب نظرية المعاينة للمتوسطات: $\frac{n}{N} = \frac{400}{100000} = 0{,}004$

$\frac{n}{N} < 0{,}05$ لا نستخدم معامل التصحيح

$$\delta_{\overline{X}} = \frac{\delta x}{\sqrt{n}} = \frac{40}{\sqrt{400}} = 2$$

من جداول التوزيع الطبيعي نجد:

$$Z_{95\%} = Z_{1-\frac{0,10}{2}} = Z_{0,95} = 1,64$$

$$\hat{U}_X = U_{\overline{X}} \mp Z_{\frac{\alpha}{2}} . \delta_{\overline{X}}$$

$$\hat{U}_X = 170 \mp (1,64 * 2)$$

$$\hat{U}_X = 300 \mp 3,28$$

$$P(170 - 3,28 < \hat{U}_X < 170 + 3,28) = 0,90$$

$$P(166,72 < \hat{U}_X < 173,28) = 0,90$$

التمرين الثالث: في عينة مكونة من 36طالب دراسات عليا في الاقتصاد من بين 400 طالبا في نفس البرنامج، وجد أن 8 طلاب يحملون درجة جامعية في الرياضيات. أوجد النسبة بين كل طلاب الدراسات العليا بالجامعات للطلاب الذين يحملون درجة جامعية في الرياضيات بدرجة ثقة 95%؟

الحل:

$$P = \frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}} \qquad P = \frac{8}{36} = 0,22$$

$$q = 1 - 0,22 = 0,78$$

$$N = 400 \qquad n = 36$$

تقدير متوسط المجتمع:

$$\hat{\boldsymbol{P}} = U_{\boldsymbol{P'}} \mp \boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{Z}_{\frac{\alpha}{2}} . \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{P'}}$$

حسب نظرية المعاينة للنسب نجد: $U_{P'} = \mathbf{0.22}$

$\frac{n}{N} = \frac{36}{400} = 0,09$ (نستخدم معامل التصحيح)

سلسلة تمارين: نظرية التقدير

$$\delta_{P'}=\sqrt{\frac{Pq}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}=\sqrt{\frac{0,22*0,78}{36}}\sqrt{\frac{400-36}{400-1}}$$

$$\delta_{P'}=0,065$$

$$\hat{P}=0,22\mp1,96*0,065$$

$$\hat{P}=0,22\mp0,067$$

$$P(0,153\leq\hat{P}\leq0,287)=0,95$$

التمرين الرابع: في دراسة لعينة مكونة من 150 شخص في أحد المصايف لمعرفة رأيهم عن تفضيلهم هذا المصيف عن غيره، وقد أجاب عدد قدره 108شخص أن سبب التفضيل هو دفء هذا المصيف.

أحسب المقدار أو القيمة العظمى للخطأ في التقديرات عند 99%.

الحل: $\alpha=0.01\sim Z=2.58$

$$P=\frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}\qquad P=\frac{108}{150}=0,72$$

$$q=1-0,72=0,28$$

$$n=150$$

$$\delta_{P'}=\sqrt{\frac{Pq}{n}}=\sqrt{\frac{0,72*0,28}{150}}$$

$$\delta_{P'}=0,037$$

$$\hat{P}=0,72\mp2,58*0,037$$

$$\hat{P}=0,72\mp0,095$$

$$P(0,625\leq\hat{P}\leq0,815)=0,99$$

سلسلة تمارين: نظرية التقدير

التمرين الخامس: عند سحب عينتين مستقلتين من مجتمعين طبيعيين كانت النتائج التالية: حجم العينة الأولى 10 بمتوسط 200 وتباين 16,4، وحجم العينة الثانية 14 بمتوسط 180 وتباين 22,5، إيجاد مجال الثقة للفرق بين المتوسطية عند α=5%؟.

الحل: معطيات المثال

A (المجتمع الأول)	B(المجتمع الثاني)
$n_A = 10$ $U_{\overline{X}_A} = 200$ $S^2{}_A = 16{,}4$	$n_B = 14$ $U_{\overline{X}_B} = 180$ $S^2{}_B = 22{,}5$

$$c = 95\% \rightarrow \alpha = 5\%$$

حسب نظرية التقدير ما دام:

- ✓ الانحراف المعياري للمجتمعين δ_{X_1} و δ_{X_2} مجهولين يعوضان ب S_1 و S_2
- ✓ المجتمع موزع طبيعيا، وحجم العينتين n_1 و n_2 أقل من 30

فإن تقدير متوسط الفرق بين المجتمعين يخضع للتوزيع ستيودنت. ومنه:

$$\hat{U}_{X_A - X_B} = U_{\overline{X}_A - \overline{X}_B} \mp d$$

$$d = t_{(V.\alpha)} . \delta_{\overline{X}_A - \overline{X}_B}$$

$$V = n_1 + n_2 - k$$

حسب نظرية المعاينة للفروق بين المتوسطات:

$$U_{\overline{X}_A - \overline{X}_B} = U_{\overline{X}_A} - U_{\overline{X}_B} = 200 - 180 = 20$$

$$\delta_{\overline{X}_A - \overline{X}_B} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1){S_1}^2 + (n_2 - 1){S_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$\delta_{\overline{X}_A - \overline{X}_B} = \sqrt{\frac{(10 - 1)16{,}4 \quad + (14 - 1)22{,}5}{10 + 14 - 2}} = 4.47$$

من جداول توزيع ستيودنت:

$$V = n_1 + n_2 - k$$

$$V = 10 + 14 - 2 = 22$$

$$t_{(V,\propto)} = t_{(22;0.95)} = \mathbf{2.074}$$

$$\boldsymbol{d} = (\mathbf{2.074})(\mathbf{4.47}) = \mathbf{9.27}$$

تقدير متوسط الفرق بين مجتمعين:

$$\hat{U}_{X_A - X_B} = \mathbf{20 \mp 9.27}$$

$$p\left(20 - \mathbf{9.27} \leq \hat{U}_{X_A - X_B} \leq 20 + \mathbf{9.27}\right) = 0.95$$

$$P\left(10.73 \leq \hat{U}_{X_A - X_B} \leq 29.27\right) = 0,95$$