تمهيد

تطرقنا في الفصول السابقة الى طريقتين لحل البرامج الخطية بصفة مباشرة، وهما: طريقة الحل البياني وطريقة السمبلكس، وذكرنا بأنهما طريقتان للحل مباشرة، لأنها تقدم حل للبرنامج الخطي حسب الصيغة الأصلية له، دون احداث أي تغييرات على تلك الصيغة. الى جانب الطرق السابقة، هناك طريقة إضافية لحل البرنامج الخطي، لكن هذه الطريقة تتطلب احداث تغييرات على صياغة البرنامج الخطي، حتى يتم التوصل الى الحل الأمثل له، وتتمثل هذه الطريقة بطريقة الحل بالنموذج الثنائي (أو النموذج المرافق Dual LP)

I. مراحل الحل بطريقة النموذج الثنائي

يمر حل أي برنامج خطي وفق طريقة النموذج الثنائي على ثلاث مراحل أساسية وهي: كتابة البرنامج الخطي الأصلي وفق الصيغة الثنائية، حل البرنامج الخطي المرافق الجديد وفق طريقة السمبلكس، استخراج حلول البرنامج الخطي الأصلي من جدول السمبلكس الأخير للبرنامج الخطي المرافق. وفيما يلي شرح مفصل لكل مرحلة من تلك المراحل.

1. كتابة البرنامج الخطي الأصلي وفق الصيغة الثنائية

يقصد بالصيغة الثنائية لأي برنامج خطي تحويله من صيغة تعظيم الى صيغة تدنية او العكس (أي من صيغة تدنية الى صيغة تعظيم)، والجدول التالي يلخص كل خطوات صياغة النموذج الثنائي لبرنامج الخطي، حيث قسمنا الجدول الى عمودين، في العمود الأول سنضع خصائص برنامج خطي من نوع التعظيم، وفي العمود الآخر سنضع خصائص برنامج خطي من نوع التدنية، ولم يتم الإشارة الى ايهما النموذج الأصلي، لأن كل برنامج منهما يمكن ان يكون هو النموذج الأصلي، والنموذج الآخر هو المرافق له، ولهذا السبب أيضا استخدمنا سهم باتجاهين، للتعبير على انه يمكن الانتقال من برنامج التعظيم الى برنامج التدنية أو العكس

جدول 04−01

برنامج من نوع التعظيم (Max)	⟷	برنامج من نوع التدنية (Max)
نوع الهدف (Max)	⟷	نوع الهدف (Min)
معاملات دالة الهدف	⟷	الطرف الأيمن للقيود
الطرف الأيمن للقيود	⟷	معاملات دالة الهدف
إشارة القيود		إشارة المتغيرات
$\sum a_{mn}X_n \leq b_m$	⟷	$Y_i \geq 0$
$\sum a_{mn}X_n \geq b_m$	⟷	$Y_i \leq 0$
$\sum a_{mn}X_n = b_m$	⟷	Y_i: غ م إ (غير محدد الإشارة)
إشارة المتغيرات		إشارة القيود
$X_i \geq 0$	⟷	$\sum a_{mn}Y_n \geq b_m$
$X_i \leq 0$	⟷	$\sum a_{mn}Y_n \leq b_m$
X_i: غ م إ (غير محدد الإشارة)	⟷	$\sum a_{mn}Y_n = b_m$

حتى نتمكن من فهم كيفية تحويل البرنامج الخطي الى صـــيغته الثنائية، ســـنحاول تطبيق الخطوات السابقة على المثال التالي:

مثال 04−01:

حول البرنامج الخطي التالي الى صيغته الثنائية

$$\text{Max}: Z = 100X_1 + 50X_2 + 30X_3$$

$$S/c \begin{cases} 3X_1 + 4X_2 \leq 1000 \\ 6X_1 + 5X_2 + 3X_3 \geq 1200 \\ X_1 \geq 0;\quad X_2 \leq 0;\quad X_3: \text{غ م إ} \end{cases}$$

حل المثال 04-01

لتحويل البرنامج الخطي السابق الى صيغته الثنائية سنحاول تطبيق الخطوات السابقة

- تحويل نوع الهدف من تعظيم الى تدنية؛
- الأعداد الموجودة في الطرف الأيمن لقيود البرنامج الخطي الأصلي b_i تصبح هي معاملات دالة الهدف للنموذج المرافق وبنفس الترتيب، حيث تصبح دالة الهدف الجديدة كما يلي:

Min: $W = 1000\,Y_1 + 1200\,Y_2$

- معاملات دالة الهدف في النموذج الأصلي تصبح هي الاعداد الموجودة في الطرف الأيمن لقيود النموذج المرافق b_i.
- معاملات المتغيرات لقيود النموذج الأصلي يتم استخراجها في شكل مصفوفة، ثم يتم اعداد منقول لتلك المصفوفة من اجل الحصول على معاملات القيود في النموذج المرافق، حيث أن معاملات القيود في النموذج الأصلي يمكن كتابتها وفق المصفوفة التالية:

$$\begin{matrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{matrix}$$

ومنقول المصفوفة السابقة، يتم الحصول عليه من خلال تحويل الاسطر الى أعمدة وفق نفس الترتيب، ولهذا فان منقول المصفوفة السابقة يكون وفق الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

وعليه تصبح قيود النموذج الثنائي الجديد وفق الشكل التالي:

$$S/c \begin{cases} 3Y_1 + 6Y_2 & 100 \\ 4Y_1 + 5Y_2 & 50 \\ 0Y_1 + 3X_3 & 30 \end{cases}$$

▪ إشـــارة القيود في النموذج المرافق يتم تحديدها من إشـــارة المتغيرات المقابلة لها في النموذج الأصـلي، حيث ان إشـارة أي قيد تتحدد من خلال إشـارة المتغير المرتبط به، بالنسـبة للقيد الأول من النموذج المرافق، تطرقنا سـابقا الى انه مرتبط بمعاملات المتغير X_1، وبالتالي فان اشـارته تتحدد من خلال إشـــارة هذا المتغير والتي هي ($X_1 \geq 0$)، ومن خلال الرجوع الى الجدول 04-01، وانطلاقا من جهة نموذج التعظيم (الجهة اليمنى منه)، نبحث عن المتغير الذي يحمل الإشـــارة الموجبة، وفي نفس ذلك السـطر، ننتقل افقيا باتجاه البرنامج الخطي من نوع التدنية، فنجد أن نوع القيد الذي يقابله هو من نوع ($\sum a_{mn}Y_n \geq b_m$). ولهذا يمكن كتابـة القيد الأول من النموذج المرافق وفق الشـــكـل التـالي: $3Y_1 + 6Y_2 \geq 100$.

بنفس الشكل يتم إيجاد إشارة القيد الثاني، والذي يكون مرتبط بإشـارة المتغير X_2، وبما أن إشارة هذا الأخير هي ($X \leq 0$)، وبالرجوع الى الجانب الأيمن من الجدول، فان إشـــارة القيد المقابل لها تكون من النوع ($\sum a_{mn}Y_n \leq b_m$)، ولهذا يمكن كتابة القيد الثاني من النموذج المرافق وفق الشـــكل التالي: $4Y_1 + 5Y_2 \leq 50$.

وكذلك الحال بالنسـبة للقيد الثالث، حي انه مرتبط بإشـــارة المتغير X_3، وبما أن هذا الأخير هو غير محدد الإشـــارة، وبالرجوع الى الجانب الأيمن من الجدول، فان إشـــارة القيد المقابل له تكون من النوع ($\sum a_{mn}Y_n = b_m$)، ولهذا يمكن كتابة القيد الثالث من النموذج المرافق وفق الشـــكل التالي: $0Y_1 + 3Y_2 = 30$.

▪ إشـــارة المتغيرات في النموذج المرافق يتم تحديدها بناء على إشـــارة القيود المرتبطة بها في النموذج الأصـــلي؛ حيث نجد ان المتغير الأول (Y_1) في النموذج المرافق هو مرتبط بالقيد الأول في النموذج الأصـلي، وبما أن هذا الأخير هو من نوع ($a_{mn}X_n \leq b_m$)، ومن اجل إيجاد إشـارة المتغير المقابـل لـه، فإننـا نبحـث في الجـانـب الأيمن من الجـدول الســـابق على إشـــارة القيد من نوع ($a_{mn}X_n \leq b_m$)، ثم ننتقل افقيا في نفس السطر باتجاه الجانب الأيسر من الجدول، فنجد أن إشارة المتغير المقابل له هي ($Y_1 \geq 0$).

بنفس الطريقة نبحث عن إشـارة المتغير الثاني (Y_2)، والذي يقابل القيد الثاني للنموذج الأصـلي، وبما أن هذا القيد هو من النوع ($a_{mn}X_n \geq b_m$)، فان إشـــارة المتغير المقابل له في الجدول تكون من النوع ($Y_1 \leq 0$). وفي الأخير نستنتج الشكل النهائي للبرنامج المرافق (الثنائي) كما يلي:

Min: W= 1000 Y_1 + 1200 Y_2

$$S/c \begin{cases} 3Y_1 + 6Y_2 \geq 100 \\ 4Y_1 + 5Y_2 \leq 50 \\ 0Y_1 + 3Y_2 = 30 \end{cases}$$

$Y_1 \geq 0$; $Y_1 \leq 0$

2. استخراج حلول البرنامج الخطي الأصلي من جدول السمبلكس الأخير للبرنامج الخطي المرافق

ان الهدف الرئيسي لطريقة الحل بالبرنامج الثنائي، تعتمد أساسا على استخراج حلول النموذج الأصلي من جدول السمبلكس الأمثل للنموذج المرافق، أي انه بعد استخراج النموذج المرافق، يتم حله بالاعتماد على طريقة السمبلكس، وبعد التوصل الى الحل الأمثل، يتم استخراج حلول البرنامج الأصلي من جدول السمبلكس الأخير للبرنامج المرافق، حيث نعلم ان كل متغير في النموذج الأصلي له قيد مرافق له في النموذج المرافق، وعليه فان قيم متغيرات النموذج الأصلي يتم الحصول عليها من القيم الموجودة في السطر ما قبل الأخير لجدول السمبلكس الأخير للنموذج المرافق، وهذا مقابل متغير الفرق او المتغير الاصطناعي للقيد المقابل لذلك المتغير. ومن اجل تبسيط الفكرة أكثر سنتطرق في المثال التالي لكيفية استخراج حلول النموذج الأصلي من حلول النموذج المرافق.

مثال 04-02:

ترغب شركة لإنتاج العطور في انتاج نوعين من العطور هما A وB ، يحتاج كل نوع منهما الى خلط ثلاثة انواع من المواد الاولية هي (M_1,M_2, M_3)؛ فاذا علمت ان الوحدة الواحدة من المنتج A تحتاج الى خلط 5 وحدات من المادة الأولية M_1 و 2 وحدات من المادة الأولية M_2 و وحدة واحدة من المادة الأولية M_3، و تحتاج الوحدة الواحدة من المنتج B الى خلط 3 وحدات من المادة الأولية M_1 و 4 وحدات من المادة الأولية M_2 و وحدة واحدة من المادة الأولية M_3، فاذا علمت ان تكلفة العطور تتمثل اساسا في تكلفة المواد المستخدمة في اعدادها، و أن مخزون الشركة من المادة الأولية M_1 يقدر ب 150 وحدة و تكلفة الحصول على الوحدة الواحدة منها هو 4 دج، بينما يقدر مخزون الشركة من المادة الأولية M_2 ب 80 وحدة و تكلفة الحصول على الوحدة الواحدة منها هو 3 دج؛

ومخزون الشركة من المادة الأولية M_3 يقدر ب 25 وحدة و تكلفة الحصول على الوحدة الواحدة منها هو 4 دج، تبيع الشركة المنتج A ب 30 دج للوحدة و تبيع المنتج B ب 40 دج للوحدة؛

المطلوب:

- تحديد البرنامج الخطي الذي يسمح للشركة بتحقيق أكبر إيراد (رقم اعمال) ممكن؛
- حل البرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة الحل بالنموذج الثنائي.

حل المثال 04-02:

- تحديد البرنامج الخطي الذي يسمح للشركة بتحقيق أكبر إيراد (رقم اعمال) ممكن؛

$$\text{Max: } Z = 30X_1 + 40X_2$$
$$S/c \begin{cases} 5X_1 + 3X_2 \le 150 \\ 2X_1 + 4X_2 \le 80 \\ X_1 + X_2 \le 25 \end{cases}$$
$$X_1 \ge 0; \quad X_2 \ge 0$$

- حل البرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة الحل بالنموذج الثنائي.

من اجل حل البرنامج الخطي السابق وفق طريقة الحل بالنموذج الثنائي، سنتبع المراحل الثلاث المشار اليها سابقا.

- كتابة البرنامج الخطي الأصلي وفق الصيغة الثنائية

$\text{Max: } Z = 30X_1 + 40X_2$ $S/c \begin{cases} 5X_1 + 3X_2 \le 150 \\ 2X_1 + 4X_2 \le 80 \\ X_1 + X_2 \le 25 \end{cases}$ $X_1 \ge 0; \quad X_2 \ge 0$	$\text{Min: } W = 150Y_1 + 80Y_2 + 25Y_3$ $S/c \begin{cases} 5Y_1 + 2Y_2 + 1Y_3 \ge 30 \\ 3Y_1 + 4Y_2 + 1Y_3 \ge 40 \end{cases}$ $Y_1 \ge 0; Y_2 \ge 0; Y_3 \ge 0$
البرنامج الخطي الأصلي	النموذج الثنائي

نلاحظ بأن البرنامج الخطي الثنائي (المرافق) أصبح من نوع التدنية بعد أن كان البرنامج الخطي الأصلي من نوع التعظيم. كما نلاحظ أيضا أن معاملات القيد الأول من البرنامج المرافق هي

معاملات المتغير X_1 في النموذج الأصـــلي، وبالتالي فان هذا المتغير ســـيرتبط بالقيد الأول، وكذلك معاملات القيد الثاني من النموذج المرافق هي نفسها معاملات المتغير X_2 في النموذج الأصـلي، مما يعني وجود ارتباط بينهما.

- حل البرنامج الخطي المرافق الجديد وفق طريقة السمبلكس

ان البرنامج الخطي المرافق الموجود في هذا المثال، قد سبق حله بطريقة السمبلكس في المثال 03-02 من الفصل الثالث، وفيما يلي الصيغة القياسية وجدول الحل الأمثل له (جدول الحل الرابع).

$$\text{Min: } w = 150\,Y_1 + 80\,Y_2 + 25\,Y3 + 0\,S_1 + 0\,S_2 + M\,A_1 + M\,A_2 \quad \longleftarrow \quad Z$$

$$S/c \quad \begin{cases} 5\,Y_1 + 2\,Y_2 + 1\,Y_3 - 1\,S_1 - 0\,S_2 + 1\,A_1 + 0\,A_2 = 30 & \longleftarrow \quad X_1 \\ 3\,Y_1 + 4\,Y_2 + 1\,Y_3 - 0\,S_1 - 1\,S_2 + 0\,A_1 + 1\,A_2 = 40 & \longleftarrow \quad X_2 \end{cases}$$

$$Y_1 \geq 0;\ Y_2 \geq 0;\ Y_3 \geq 0\ ;\ S_1 \geq 0;\ S_2 \geq 0\ ;\ A_1 \geq 0;\ A_2 \geq 0$$

	Ci	150	80	25	0	0	M	M	/
Cb	Y b	Y1	Y 2	Y 3	S1	S2	A1	A2	bi
25	Y3	7	0	1	-2	1	2	-1	20
80	Y2	-1	1	0	1/2	-1/2	-1/2	1/2	5
Wi		95	80	25	-10	-15	10	15	900
Ci-Wi		55	0	0	10	15	M-10	M-15	/

- استخراج حلول البرنامج الخطي الأصلي من جدول السمبلكس الأخير للبرنامج الخطي المرافق

بعدما تم التوصل في الخطوة السابقة الى جدول الحل الأمثل للبرنامج المرافق، سنحاول في هذه الخطوة اســـتخراج حلول البرنامج الخطي الأصـــلي (من نوع التعظيم)، والمقصـــود بهذا هو إيجاد قيم متغيرات القرار (X_1 و X_2) وكذلك قيمة متغير الهدف Z.

من اجل إيجاد قيم متغيرات القرار (X_1 و X_2) نرجع الى الصيغة القياسية للبرنامج المرافق، فنجد أن المتغير X_1 يرتبط بالقيد الأول، وأن الصـــيغة القياســـية لهذا الأخير تتضـــمن على متغير الفرق S_1 بمعامل ســـالب، وكذلك المتغير الاصـــطناعي A_1 بمعامل موجب. ولهذا فان قيمة X_1 نســـتخرجها من

السطر ما قبل الأخير (سطر Z_i) لجدول السمبلكس الأمثل (الجدول الرابع) للبرنامج المرافق (انظر الجدول السابق). حيث نأخذ القيمة الموجودة في عمود S_1 ونضربها في (−1)، أي نأخذ القيمة (−10) ونضربها في (−1) فنحصل على 10، أي (X_1=10)، او نأخذ القيمة الموجودة في عمود A_1 كما هي (أنظر القيم المضللة باللون الأصفر في الجدول السابق)، فنحصل أيضا على القيمة (10)، وبالتالي فإن قيمة المتغير هي (X_1=10).

بنفس الطرقة نحصل على قيمة المتغير X_2، حيث يرتبط هذا المتغير بالقيد الثاني للبرنامج المرافق، وبما أن الصيغة القياسية لهذا القيد تحتوي على متغير الفرق S_2 بمعامل سالب، وكذلك المتغير الاصطناعي A_2 بمعامل موجب. ولهذا فان قيمة X_2 نستخرجها من السطر ما قبل الأخير (سطر Z_i) لجدول السمبلكس الأمثل للبرنامج المرافق (انظر الجدول السابق). حيث نأخذ القيمة الموجودة في عمود S_2 ونضربها في (−1)، أي نأخذ القيمة (−15) ونضربها في (−1) فنحصل على 15، أي (X_2=15)، او نأخذ القيمة الموجودة في عمود A_2 كما هي (أنظر القيم المضللة باللون الأخضر في الجدول السابق)، فنحصل أيضا على القيمة (15)، وبالتالي فإن قيمة المتغير هي (X_2=15). بالنسبة لقيمة متغير الهدف Z، فان قيمته مساوية لقيمة متغير الهدف W، أي أن (Z=W=900). وبهذه الطريقة نكون قد استخرجنا حلول النموذج الأصلي من جدول السمبلكس الأمثل للبرنامج المرافق.

3. أسعار الظل

يمثل سعر الظل لمتغير ما، مقدار التغير في دالة الهدف نتيجة تغير ذلك المتغير بوحدة واحدة، أي انها تشير الى مقدار الزيادة في الأرباح او التراجع في التكاليف الذي يترتب عن زيادة مورد ما بوحدة واحدة؛ وبالتالي فان سعر الظل يعطي فكرة عن أقصى سعر يمكن ان تقتني به المؤسسة مورد ما والذي يكون اقل من او يساوي لمقدار الزيادة في الأرباح. ويتم الحصول على أسعار الظل للمتغيرات من خلال القيم الموجودة في السطر الأخير لجدول الحل الأمثل للبرنامج الخطي المدروس، أي سطر (C_i−Z_i)، حيث تكون قيمها سالبة او معدومة في حالة البرامج الخطية من نوع التعظيم؛ أو قد تكون قيمها موجبة او معدومة في حالة البرامج الخطية من التدنية.

II. تحليل الحساسية

يطلق عليها "تحليل الحســـــاســــية" أو "تحليل ما بعد الأمثلية"، والتي تعني تحليل البرامج الخطية بعد التوصـــل الى حلولها المثلى، والمقصــود بعملية التحليل هنا هو تحليل بعض التغيرات التي تطرأ على مكونات البرنامج الخطي وأثرها على الحلول المثلى، حيث ان ظروف عدم التأكد قد ينتج عنها تغيرات في دالة الهدف او القيود، مما يجعل متخذ القرار امام تساؤل كبير، هو: هل يعيد حل البرنامج الخطي من جديد؟ او بإمكانه الاستعانة بالحلول السابقة للبرنامج الخطي من اجل تطوير حلول جديدة له، دون إعادة حله من جديد؟

عندما تكون التغيرات التي طرأت على البرنامج الخطي ضـمن مجال مسـموح وبشـكل مسـموح، فإن هذا يسـمح باسـتغلال الحلول المثلى التي تم التوصـل لها من قبل، من اجل الحصـول على حلول جديدة، دون إعادة الحل من جديد، ولهذا تهدف عملية تحليل الحســـاســـية الى تحديد تلك المجالات، وتحليل أثر التغيرات على حلول البرنامج الخطي، وسـنركز في هذه المحاضـرة على تحليل الحسـاسـية لمجموعة التغيرات التالية للبرنامج الخطي:

- تحليل الحساسية لتغير معاملات دالة الهدف؛
- تحليل الحساسية للتغيرات في الطرف الأيمن من القيود؛
- تحليل الحساسية للتغيرات في معاملات المتغيرات في القيود؛
- تحليل وفيما يلي عرض لكل عنصر من العناصر السابقة.

1. تحليل الحساسية لتغير معاملات دالة الهدف؛

عند حدوث تغير في معامل أحد متغيرات القرار في دالـة الهدف، فان الحل الأمثل الذي تم التوصـل اليه يبقى مسـتقرا إذا كان كانت القيمة الجديدة للمعامل ضـمن مجال معين، اما إذا أصـبحت قيمته الجديدة خارج ذلك المجال، فان الامر يتطلب إعادة الحل من جديد، أي تكوين جداول سـمبلكس بالقيم الجديدة، والبحث عن الحلول المثلى الجديدة. ويتم تحديد ذلك المجال من خلال إعطاء قيمة مجهولة لمعامل ذلك المتغير، ثم حساب القيم الجديدة في جدول الحل الأمثل، واختبار الشروط (حدود المجال) التي تبقي ذلك الجدول امثلا.

من اجل توضيح الفكرة سنأخذ المثال 03−01، حيث ان البرنامج الخطي لهذا المثال هو:

$$\text{Max: } Z = 30X_1 + 40X_2$$

$$S/c \quad \begin{cases} 5X_1 + 3X_2 \leq 150 \\ 2X_1 + 4X_2 \leq 80 \\ X_1 + X_2 \leq 25 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

اما جدول الحل الأمثل له فقد كان كما يلي:

	C_i	30	40	0	0	0	/
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i
0	S_1	0	0	1	1	-7	55
40	X_2	0	1	0	1/2	-1	15
30	X_1	1	0	0	-1/2	2	10
Z_i		30	40	0	5	20	900
C_i-Z_i		0	0	0	-5	-20	/

لنفترض أن المؤسسة قررت تغيير أسعار منتجاتها، والسؤال الذي يمكن طرحه هو ما هو المجال الذي يمكن ان يكون ضمنه سعر كل منتج من منتجات المؤسسة حتى يبقى جدول الحل السابق هو الحل الأمثل؟

حتى نحدد مجال تغير أسعار المنتج الأول مع بقاء الحل السابق امثلا، سنفترض قيمة جديدة لسعر هذا المنتج نعبر عنها بالمجهول C_1، ثم نعيد حساب باقي القيم في الجدول، وذلك على النحو التالي:

	C_i	C_1	40	0	0	0	/
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i
0	S_1	0	0	1	1	-7	55
40	X_2	0	1	0	1/2	-1	15
C_1	X_1	1	0	0	-1/2	2	10
Z_i		C_1	40	0	$20 - \frac{C_1}{2}$	$-40 + 2C_1$	$600 + 10C_1$
C_i-Z_i		0	0	0	$-20 + \frac{C_1}{2}$	$40 - 2C_1$	/

حتى نقول على جدول الســـمبلكس الجديد بأنه يمثل حلا امثلا، لابد ان تكون كل القيم الموجودة في السطر الأخير منه أقل من أو تساوي الصفر، وبالتالي فان هذا يعني:

$$-20+\frac{C_1}{2}\leq 0 \Longrightarrow \frac{C_1}{2}\leq 20 \Longrightarrow C_1\leq 40$$

$$40-2C_1\leq 0 \Longrightarrow 2C_1\geq 40 \Longrightarrow C_1\geq 20$$

وعليه نستنتج ان المجال الخاص بسعر المنتوج الأول، والذي يبقي الحل السابق امثلا هو:

$$20\text{دج} \leq C_1 \leq 40\text{دج}$$

وبنفس طريقة المنتوج الأول يتم تحديد مجال تغير أسـعار المنتوج الثاني؛ لكن السـؤال المطروح هو: في حالة كون المتغير غير قاعدي، كيف يتم تحليل الحساسية لتغير معامله في دالة الهدف؟

ان تغير معـامـل أحد المتغيرات غير القـاعـديـة في دالـة الهـدف يتم بنفس طريقـة المتغيرات القاعدية، وهذا النوع من المتغيرات يمكن ان يكون له مجال محدد يشـــترط ان يكون تغيره ضـــمن هذا المجال حتى يبقى الحل امثلا.

2. تحليل الحساسية للتغيرات في الطرف الأيمن من القيود؛

في الغالب يشــير الطرف الأيمن من القيود الى الكميات المتوفرة من مورد ما، او شــروط تقنية متعلقة بظروف الإنتاج، وبالتالي فان هذه القيم عرضـــة للتغير، مما أوجب العمل على تحليل مجالات تغير هذه القيم والتي تبقي الحل أمثلا.

وبالرجوع الى بيانات المثال 03-01، حيث كان البرنامج الخطي له على الشكل التالي:

$$\text{Max: } Z = 30X_1 + 40X_2$$

$$S/c \quad \begin{cases} 5X_1 + 3X_2 \leq 150 \\ 2X_1 + 4X_2 \leq 80 \\ X_1 + X_2 \leq 25 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

أما جدول الحل الأمثل له فكان كما يلي:

	C_i	30	40	0	0	0	/
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i
0	S_1	0	0	1	1	-7	55
40	X_2	0	1	0	1/2	-1	15
30	X_1	1	0	0	-1/2	2	10
Z_i		30	40	0	5	20	900
C_i-Z_i		0	0	0	-5	-20	/

يوضـــح السـطر الأخير من الجدول أن ســعر الظل للمورد الأول (المادة الأولية M1) هو 0، وســعر الظل للمورد الثاني (المادة الأولية M2) هو 5، أما ســعر الظل للمورد الثالث (المادة الأولية M3) هو 20؛ ويعني هذا أن اقتناء المؤســـسـة لوحدة واحدة إضــافية من المورد الأول لن يؤثر على إيرادات المؤســسـة، لأن هذه الأخيرة تتوفر على 55 وحدة من هذا المورد ولا تحتاج الى اقتناء المزيد منها، لأن اقتناء المزيد منها لن يؤثر على قيمة الإيرادات؛ اما بالنســـبة للمورد الثاني فنجد ان قيمته معدومة (S_2=0)، أي ان المؤسـسـة استنفذت كل الكميات الموجودة من هذا المورد، وفي حالة اقتنائها لوحدة واحدة إضافية منه، فان ايرادات المؤسسة ستزيد بـــ 5دج، مما يعني ان اقصى سعر يمكن ان تدفعه المؤسسة لاقتناء وحدة إضافية منه هو 5دج.

بالنسبة للمورد الثالث فنجد ان قيمته معدومة (S_3=0)، أي ان المؤسـسـة ايضـا اسـتنفذت كل الكميات الموجودة من هذا المورد، وفي حالة اقتنائها لوحدة واحدة إضـافية منه، فان ايرادات المؤسـسـة سـتزيد بـ 20دج، مما يعني ان اقصى سعر يمكن ان تدفعه المؤسسة لاقتناء وحدة إضافية منه هو 20دج.

من اجل تحليل حســاســية تغير الطرف الأيمن (الكمية المتوفرة من أحد الموارد)، ســنقوم في البداية بتحديد مدى الامكانية، والذي يعني مجال قيم ذلك المورد (الطرف الأيمن من القيود) والذي يبقى الحل امثلا. ومن اجل تحديد مدى الامكانية لمورد ما، وليكن المورد الثاني على ســبيل المثال، نقوم بقســمة قيم العمود bi على القيم المقابلة لها في عمود متغير الفرق او المتغير الاصــطناعي الموجود في القيد الخاص بذلك المورد، ثم نطرح حاصـل القسـمة من القيمة الأصـلية لذلك المورد، أي قيمة الطرف الأيمن للقيد الثاني في البرنامج الخطي، وبالرجوع الى مثالنا الســابق نجد ان الصـــيغة

القياسية للقيد الثاني تتضمن على متغير الفرق S_2، ولهذا سنقوم بقسمة قيم عمود bi على قيم عمود S_2 في جدول الحل الأمثل، فنحصل على القيم التالية والموجودة في العمود الأخير على اليمين:

	C_i	30	40	0	0	0	/	
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i	b_i/S_2
0	S_1	0	0	1	1	-7	55	55
40	X_2	0	1	0	1/2	-1	15	30
30	X_1	1	0	0	-1/2	2	10	-20
Z_i		30	40	0	5	20	900	
C_i-Z_i		0	0	0	-5	-20	/	

بعد هذا يتم طرح كل حاصل قسمة من القيمة الأصلية للمورد الثاني، والتي كانت 80 في مثالنا هذا، وعليه نتحصل على القيم الحدية لمجال قيم هذا المورد من خلال طرح أصغر قيمة موجبة وأكبر قيمة سالبة (الأصغر بالقيمة المطلقة):

$$80-30=50$$

$$80-(-20) = 100$$

وعليه نجد ان قيم هذا المورد هي محصورة بين 50 و100، أي:

$$50 \leq b_2 \leq 100$$

ويمكن الحصول على مدى الامكانية لهذا المورد الثاني بطريقة أخرى، وهذا وفق المتراجحة التالية:

$$RHS + (\Delta b_i)(S_i) \geq 0$$

RHS: قيم عمود bi في جدول السمبلكس الأخير (جدول الحل الأمثل)؛

Δb_i: مقدار التغير في حدود المورد المتاح، من اجل ان يبقى الحل امثلا؛

S_i: القيم الموجود في عمود متغير الفرق او المتغير الاصطناعي التابع لقيد ذلك المورد.

وبتطبيق هذه المتراجحة على المورد الثاني في مثالنا السابق، نجد:

$$\begin{bmatrix}55\\15\\10\end{bmatrix} + (\Delta b_i)\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix} \geq 0$$

فنتحصل على المتراجحات الثلاثة التالية:

$$55 + \Delta b_i \geq 0 \Rightarrow \Delta b_i \geq -55$$

$$15 + \frac{1}{2}\Delta b_i \geq 0 \Rightarrow \Delta b_i \geq -30$$

$$10 - \frac{1}{2}\Delta b_i \geq 0 \Rightarrow \Delta b_i \leq 20$$

وعليه فان قيمة المورد الثاني هي محصورة بالمجال التالي:

$$80 - 30 \leq b_2 \leq 80 + 20$$

$$50 \leq b_2 \leq 100$$

وهو نفس المجال الذي تم الحصول عليه من قبل.

3. تحليل الحساسية للتغيرات في معاملات المتغيرات في القيود؛

يرتبط هذا النوع من التغير بالتغير في تكنولوجيا الانتاج المستخدمة على مستوى المؤسسة، حيث أن أي ادخال لتكنولوجيا جديدة، أو تحسين في مهارات العمال، او تغيير في مواصفات المنتج قد يترتب عنه تغير في معاملات قيود البرنامج الخطي لإنتاج المؤسسة. وبالتالي فان متخذ القرار يقع في اشكال حول مدى إمكانية الاعتماد على الحل الأمثل السابق في إيجاد حلول البرنامج الخطي الجديد للمسألة.

يرتبط تحليل الحساسية لهذا النوع من التغيرات بنوع المتغير الذي تغير معامله، هل هو قاعدي أو غير قاعدي، الى جانب نوع القيد الذي حدث به تغيير، هل متغير الفرق الخاص به هو متغير قاعدي او غير قاعدي، وبالتالي فان متخذ القرار تواجهه عدة حالات ممكنة، وفيما يلي عرض لتحليل الحساسية حسب كل حالة من تلك الحالات السابقة.

- تحليل الحساسية لتغير معامل متغير قاعدي في قيد له متغير فرق قاعدي

تتمثل هذه الحالة في تغير معامل متغير قاعدي لقيد لم يتم اســـتهلاك مورده كاملا، أي مازال لديه فائض في ذلك المورد، وبالتالي فان تحليل الحساسية لهذا التغير يتطلب تحديد المجال الذي يبقي الحال السابق أمثلا، فاذا كان لدينا قيد على الشكل: $a_{1j}X_1 + a_{2j}X_2 + S_j = b_j$

ولنفرض انه حدث تغير في معامل X_1 بمقدار δ، أي ان القيد السابق يصبح من الشكل:

$$(a_{1j} + \delta)X_1 + a_{2j}X_2 + \grave{S}_j = b_j \implies a_{1j}X_1 + \delta X_1 + a_{2j}X_2 + S_j = b_j$$

فانه من أجل ان يبقى الحل امثلا، لابد من تحقق الشرطين التاليين:

$$\grave{S}_j \geq 0 \text{ و } \delta X_1 + \grave{S}_j = S_j$$

وبالتالي فإن: $\grave{S}_j = S_j - \delta X_1 \geq 0 \implies \delta X_1 \leq S_j \implies \delta \leq \frac{S_j}{X_1}$

وبالعودة الى مثالنا السابق، والذي كان البرنامج الخطي له على الشكل التالي:

$$\text{Max: } Z = 30X_1 + 40X_2$$
$$\text{S / c} \begin{cases} 5X_1 + 3X_2 \leq 150 \\ 2X_1 + 4X_2 \leq 80 \\ X_1 + X_2 \leq 25 \end{cases}$$
$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

أما جدول الحل الأمثل له فهو كما يلي:

	C_i	30	40	0	0	0	/
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i
0	S_1	0	0	1	1	-7	55
40	X_2	0	1	0	1/2	-1	15
30	X_1	1	0	0	-1/2	2	10
Z_i		30	40	0	5	20	900
C_i-Z_i		0	0	0	-5	-20	/

لنفترض حدوث تغيير في معامل X_1 في القيد الأول، حيث أصبح القيد على الشكل التالي:

$$6X_1 + 3X_2 \leq 150$$

قبل الحديث عن اثر هذا التغير على الحل الأمثل ســـنفترض وجود تغير في معامل X_1 بمقدار δ، وبالتالي فان القيد السابق يكتب على الشكل التالي: $(5+ \delta)X_1 + 3X_2 \leq 150$

والشكل القياسي للقيد السابق يصبح: $(5+\delta)\ X_1 + 3X_2 + S_1 = 150$

أي: $5X_1 + \delta X_1 + 3X_2 + S_1 = 150$

حيث أن جدول الحل الأمثل له اعطى القيم التالية: $X_1=10$، $X_2=15$، $S_1=55$

حتى يبقى الحل السابق أمثلا يجب أن يتوفر الشرط التالي: $\delta X_1 + S_1 = 55$

أي: $S_1 = 55 - \delta X_1$ وبما أن: $S_1 \geq 0$ و $X_1=10$ فإن: $55 - 10\delta \geq 0$

أي: $\delta \leq 5{,}5$

بما ان معامل X_1 قد زاد بـ 1 فقط، مما يعني ان الحل الأمثل لن يتغير، أي ان قيم X_1 و X_2 في الحل الأمثل لن تتغير . أي: $X_1=10$؛ $X_2=15$

وللتأكد من النتيجة السابقة سنحاول حل البرنامج الخطي الجديد بطريقة السمبلكس

$$\text{Max: } Z = 30X_1 + 40X_2$$

$$S/c \quad \begin{cases} 6X_1 + 3X_2 \leq 150 \\ 2X_1 + 4X_2 \leq 80 \\ X_1 + X_2 \leq 25 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0;\quad X_2 \geq 0$$

وفيما يلي جدول السمبلكس الأخير له (جدول السمبلكس الثالث):

	C_i	30	40	0	0	0	/
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i
0	S_1	0	0	1	3/2	-9	45
40	X_2	0	1	0	1/2	-1	15
30	X_1	1	0	0	-1/2	2	10
Z_i		30	40	0	5	20	900
C_i-Z_i		0	0	0	-5	-20	/

نلاحظ ان قيم جدول الحل الأمثل للبرنامج الجديد بقيت مشـــــابهة للقيم الموجودة للحل الأمثل السابق، ما عدا ما تعلق بقيم سطر S_1، الذي انخفضت قيمته من 55 الى 45، وهذا لأن زيادة معامل X_1 بوحدة واحدة، قد ترتب عنه زيادة في استهلاك المورد الأول بـ 10 وحدات (أي 10×1)، وهذا لكون قيمة X_1 عند الحل الأمثل هي 10.

III. خلاصة

1. يمر حل أي برنامج خطي وفق طريقة النموذج الثنائي على ثلاث مراحل أساسية وهي:
   - كتابة البرنامج الخطي الأصلي وفق الصيغة الثنائية؛
   - حل البرنامج الخطي المرافق الجديد وفق طريقة السمبلكس؛
   - استخراج حلول البرنامج الخطي الأصلي من جدول السمبلكس الأخير للبرنامج الخطي المرافق؛
2. كتابة البرنامج الخطي الأصلي وفق الصيغة الثنائية، يتم عبر مجموعة الخطوات التالية:
   - تحويل نوع دالة الهدف للبرنامج الأصلي من تعظيم الى تدنية او العكس؛
   - الأعداد الموجودة في الطرف الأيمن لقيود البرنامج الخطي الأصلي b_i تصبح هي معاملات دالة الهدف للنموذج المرافق وبنفس الترتيب، وكذلك معاملات دالة الهدف في النموذج الأصلي تصبح هي الاعداد الموجودة في الطرف الأيمن لقيود النموذج المرافق b_i.
   - معاملات المتغيرات لقيود النموذج الأصلي يتم استخراجها في شكل مصفوفة، ثم يتم اعداد منقول لتلك المصفوفة من اجل الحصول على معاملات القيود في النموذج المرافق؛
   - إشارة القيود في النموذج المرافق يتم تحديدها من إشارة المتغيرات المقابلة لها في النموذج الأصلي، وإشارة المتغيرات في النموذج المرافق يتم تحديدها بناء على إشارة القيود المرتبطة بها في النموذج الأصلي.
3. النموذج الثنائي للنموذج الثنائي هو النموذج الأصلي الأول؛
4. تحليل الحساسية" أو "تحليل ما بعد الأمثلية" تعني تحليل البرامج الخطية بعد التوصل الى حلولها المثلى، أي تحليل بعض التغيرات التي تطرأ على مكونات البرنامج الخطي وأثرها على الحلول المثلى؛
5. يمثل سعر الظل لمتغير ما، مقدار التغير في دالة الهدف نتيجة تغير ذلك المتغير بوحدة واحدة، أي انها تشير الى مقدار الزيادة في الأرباح او التراجع في التكاليف الذي يترتب عن زيادة مورد ما بوحدة واحدة؛
6. عموما يستخدم تحليل الحساسية لتحليل مجموعة التغيرات التالية للبرنامج الخطي:
   - تحليل الحساسية لتغير معاملات دالة الهدف؛
   - تحليل الحساسية للتغيرات في الطرف الأيمن من القيود؛
   - تحليل الحساسية للتغيرات في معاملات المتغيرات في القيود؛