تمهيد

تعد الطريقة المبسطة أو طريقة السمبلكس (Simplexe Method) احدى الطرق المعتمدة في حل البرامج الخطية، وتظهر أهميتها عند اســـتخدامها في حل البرامج التي تتضـــمن على أكثر من متغيري قرار، أي أكثر من متغيرين مفســـرين، حيث يصـــعب حل مثل هذه النماذج بيانيا، وبالتالي تصـــبح طريقة الســـمبلكس الأنســـب لحل مثل هذه البرامج؛ تم ابتكار هذه الطريقة من قبل عالم الرياضيات George Dantzig عام 1947[1].

I. الشكل العام لجدول السمبلكس

عموما يكون جدول السمبلكس له نفس الشكل العام بالنسبة لكل أنواع البرامج الخطية، ويمكن ان يكون الاختلاف في عدد الاسطر او الاعمدة فقط، وبالرغم من أن هذا الشكل العام لجدول السمبلكس يمكن ان يختلف من مرجع الى اخر، لهذا سنستعرض فيما يلي أحد تلك الاشكال[2]:

الجدول رقم (3−1) الشكل العام لجدول السمبلكس.

معاملات دالة الهدف

	C_j	C_1	C_2	C_3		C_n	/
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	....	S_n	b_i
0	S_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	....	a_{1n}	b_1
0	S_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	....	a_{2n}	b_2
.	.	.	.	.	....	.	.
.	.	.	.	.	....	.	.
0	S_n	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	....	a_{mn}	b_m
Z_j		Z_1	Z_2	Z_3	....	Z_n	Z_b
$C_j- Z_j$		$C_1- Z_1$	$C_2- Z_2$	$C_3- Z_3$	....	$C_n- Z_n$	/

المتغيرات القاعدية أو متغيرات الأساس

معاملات المتغيرات في القيود

الطرف الأيمن للقيود

[1] حسن ياسين طعمه، مروان محمد النسور وايمان حسين حنوش، **بحوث العمليات: نماذج وتطبيقات**، الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2009. ص 101.

[2] السعدي رجال، **بحوث العمليات: البرمجة الخطية**، الطبعة الأولى، دار رجزو، بدون بلد النشر، 2004. ص 87.

يتضـــح من خلال الجدول ان عدد الأعمدة في جدول الســـمبلكس يرتبط بعدد المتغيرات الموجودة في دالة الهدف، وعدد الاسطر يرتبط بعدد القيود، حيث يخصص عمود لكل متغير قرار في دالة الهدف، وسطر لكل قيد من قيود النموذج؛ الى جانب هذا فان جدول السمبلكس يتضمن أربع أصناف أساسية من المعلومات يتم الحصول عليها مباشرة من الصيغة القياسية للبرنامج الخطي، وهي:

- معاملات دالة الهدف: وهنا نضع لكل متغير قيمة معامله في دالة الهدف؛
- المتغيرات القاعدية أو متغيرات الأساس: حيث يتم التعبير عن كل قيد بالمتغير الاصطناعي او متغير الفرق الذي يتضـــمنه، ويعني هذا ان نكتب في الخانة المقابلة لســـطر ذلك القيد اســـم المتغير المرتبط به وكذلك معامل ذلك المتغير في دالة الهدف؛
- معاملات المتغيرات في القيود: وهنا نضـــع مقابل كل متغير من متغيرات القرار قيمة معامله في القيد المدروس؛ على سبيل المثال، فإن (a_{21}) تمثل معامل المتغير الأول في القيد الثاني؛
- الطرف الأيمن للقيود: في هذا العمود يتم وضع القيم الموجود في الطرف الأيمن لكل قيد.

بعد وضـع كل المعلومات السـابقة نجد ان السـطرين الأخيرين من جدول السـمبلكس بقيا فارغين، ومن اجل ملء هذين السطرين فإننا نحتاج الى القيام ببعض العمليات الحسابية البسيطة كما يلي:

سطر Z_i: في كل خانة من خانات هذا السطر، نأخذ المتغير الموجود في عمود تلك الخانة، ونضـرب معاملاته في القيم المقابلة لها في عمود معاملات المتغيرات القاعدية، ثم نجمع نتائج عمليات الجداء؛

سطر C_i- Z_i: كما يتضح من تسميته، فان قيمه تتحدد من خلال طرح كل قيمة Z_i، من القيمة المقابلة لها في سطر C_i، أي معاملات المتغيرات في دالة الهدف.

II. خطوات حل البرامج الخطية من نوع التعظيم وفق طريقة السمبلكس

تتم عملية حل البرامج الخطية من نوع التعظيم وفق أسلوب السمبلكس وفق مجموعة الخطوات التالية، يمكن تلخيصها في الشكل التالي:

سنحاول فيما يلي تطبيق تلك الخطوات على أحد الأمثلة حتى نستطيع شرحها بطريقة أحسن.

مثال 03-01:

حل البرنامج الخطي التالي بطريقة السمبلكس

$$\text{Max: } Z = 30X_1 + 40X_2$$

$$S/c \quad \begin{cases} 5X_1 + 3X_2 \leq 150 \\ 2X_1 + 4X_2 \leq 80 \\ X_1 + X_2 \leq 25 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

حل المثال 03-01:

من اجل حل هذا البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس، سنتبع الخطوات المذكورة في الشكل السابق:

1.1 كتابة البرنامج الخطي وفق الصيغة القياسية، باستخدام كل التحويلات الضرورية؛

نلاحظ بأن كل قيود هذا البرنامج الخطي هي من نوع $(\sum a_{mn}X_n \le b_m)$، ومن اجل تحويلها الى صيغة قياسية، يجب ان تحول الى معادلات، عبر استخدام التحويلة 06-01، حيث سيتم إضافة متغيرات الفرق الى الطرف الايسر لكل قيد، وذلك كما يلي:

$$\text{Max}: Z = 30X_1 + 40X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$S/c \quad \begin{cases} 5X_1 + 3X_2 + S_1 = 150 \\ 2X_1 + 4X_2 + S_2 = 80 \\ X_1 + X_2 + S_3 = 25 \end{cases}$$

$$X_1 \ge 0;\ X_2 \ge 0;\ S_1 \ge 0;\ S_2 \ge 0;\ S_3 \ge 0$$

2.1 تشكيل جدول الحل الأولي (جدول السمبلكس الأول)؛

انطلاقا من الصيغة القياسية للبرنامج الخطي سيتم تشكيل جدول السمبلكس الأول (جدول الحل الأولي)، لهذا سكون الجدول وفق الشكل التالي:

	C_i	30	40	0	0	0	/
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i
0	S_1	5	3	1	0	0	150
0	S_2	2	4	0	1	0	80
0	S_3	1	1	0	0	1	25

بعد الانتهاء من نقل البيانات الخاصة بكل القيود، يبقى هنا فقط العمل على إتمام السطرين الأخيرين من جدول السمبلكس، وهما: سطر Z_i، وسطر $C_i - Z_i$.

يتم حساب قيم سطر Z_i لأي عمود، عبر ضرب كل معاملات ذلك العمود في المعاملات المقابلة لها في عمود معاملات المتغيرات القاعدية، ثم نجمع نتائج عملية الجداء، ويتم حساب سطر $C_i - Z_i$، من خلال طرح قيم سطر Z_i من القيم المقابلة لها في سطر معاملات دالة الهدف C_i، وذلك على النحو التالي:

	C_i	30	40	0	0	0	/
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i
0	S_1	5	3	1	0	0	150
0	S_2	2	4	0	1	0	80
0	S_3	1	1	0	0	1	25
Z_i		0	0	0	0	0	0
C_i-Z_i		30	40	0	0	0	/

بهذه الطريقة نجد أن كل خانات جدول السـمبلكس قد تم ملؤها، حيث يتم اسـتخراج قيم المتغيرات القاعدية من الجدول مباشرة، عن طريق استخراج القيمة المقابلة لها في عمود b_i، اما المتغيرات غير القاعدية فقيمها معدومة.

وعليه فان القيم الحالية للمتغيرات القاعدية هي

$S_1 = 150$ ،$S_2 = 80$ ،$S_3 = 25$ ،$Z = 0$

أما قيم المتغيرات غير القاعدية فهي معدومة، أي: $X_1 = 0$ ،$X_2 = 0$.

3.1 اختبار مدى كون الحل الأولي أمثلا؛

نقول عن جدول سـمبلكس لبرنامج خطي من نوع التعظيم أنه يمثل الحل الأمثل له، إذا لم يتضـمن السطر الأخير له (سطر C_i- Z_i) على قيم موجبة. وبالرجوع الى مثالنا السابق نجد انه السطر له يضم قيمتين موجبتين هما 30 و40، وعليه نقول بأن جدول الحل السـابق هو حل ليس أمثل، مما يتطلب تحسينه، وهذا ما سيتم القيام به في الخطوة التالية.

4.1 تحسين الحل.

يقصد بعملية تحسين الحل هو انشاء جدول سمبلكس جديد بناء على معطيات الجدول السابق؛ سنحاول إيجاد جدول السمبلكس الجديد، عبر تغيير أحد المتغيرات القاعدية ويدعى بالمتغير الخارج او سطر الدوران، بمتغير اخر غير قاعدي، ويدعى هذا الأخير بالمتغير الداخل أو عمود الدوران، ونقطة التقاطع بينهما تشكل محور الدوران Pivot.

1.4 تحديد المتغير الداخل او عمود الدوران

المتغير الداخل هو المتغير الذي يقابل أكبر قيمة موجبة في السطر الأخير لجدول السمبلكس، حيث نجد انه في المثال السابق توجد قيمتين موجبتين في السطر الأخير هما 30 و40، وبالتالي فإن المتغير الداخل هو المتغير المقابل لـ 40، وهو المتغير X_2، والعمود الخاص بهذا المتغير يطلق عليه عمود الدوران؛

2.4 تحديد المتغير الخارج أو سطر الدوران

من اجل تحديد المتغير الخارج من بين المتغيرات القاعدية، نقوم بقسمة القيم الموجودة في عمود b_i على القيم المقابلة لها في عمود الدوران، ثم نختار أقل حاصل قسمة موجب، ونؤكد هنا على ان الاختيار يكون فقط بين حواصل القسمة الموجبة، اما السالبة فلا تؤخذ بعين الاعتبار، ومن اجل اختيار المتغير الخارج في مثالنا السابق سنحاول حساب حواصل القسمة في الجدول التالي:

عمود الدوران

الجدول رقم (3−9)

	C_i	30	40	0	0	0	/	
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i	حاصل القسمة
0	S_1	5	3	1	0	0	150	$\frac{150}{3}=50$
0	S_2	2	4	0	1	0	80	$\frac{80}{4}=20$
0	S_3	1	1	0	0	1	25	$\frac{25}{1}=25$
Z_i		0	0	0	0	0	0	
C_i-Z_i		30	40	0	0	0	/	

سطر الدوران

بناء على نتائج الجدول نستنتج ان المتغير الخارج هو المتغير صاحب اقل حاصل قسمة موجب، وهو المتغير S_2؛ ونشير هنا الى ان الاختيار يكون على أساس حاصل القسمة وليس على أساس قيم b_i، لأنه لو اعتمدنا عليها في المثال السابق لكان المتغير الخارج هو S_3 وليس S_2، وهذا خاطئ؛ ولهذا ننبه دائما الطلبة على الانتباه لهذا.

3.4 تحديد عنصر الارتكاز

عنصر الارتكاز هو الخانة التي يتقاطع فيها عمود الدوران مع سطر الدوران، وتحظى هذه الخانة أهمية كبيرة في تشكيل جدول السمبلكس الجديد، وبالعودة الى مثالنا، نجد أن عنصر الارتكاز هو الخانة الملونة باللون الأخضر، والتي تحمل الرقم 4.

4.4 تشكيل جدول السمبلكس الجديد

ان جدول السمبلكس الجديد هو مشابه تماما للجدول السابق من حيث شكله، وعدد اسطره وعدد الاعمدة به، غير ان البيانات الموجودة به يتم حسابها بناء على ما هو موجود في الجدول السابق له، وذلك وفق المراحل التالية:

- نبحث عن نفس خانة عنصر الارتكاز في الجدول الجديد، ونضع بها القيمة "1"؛
- باقي الخانات في عمود الدوران نضع بها "0"، ما عدا الخانات الموجودة في السطرين الأخيرين؛
- نقسم القيم الموجودة في سطر الدوران على قيمة عنصر الارتكاز ونضعها في نفس الخانة في الجدول الجديد؛
- بقية الخانات يتم حساب قيمها، ماعدا الخانات الموجودة في السطرين الأخيرين، من تطبيق المعادلة التالية:

$$a`_{ij} = \frac{(a_{ij} \times a_{pq}) - (a_{iq} \times a_{pj})}{a_{pq}} \ldots (1)$$

حيث أن:

السطر p: هو سطر الدوران؛

العمود q: هو عمود الدوران

$a`_{ij}$: هي القيمة الجديدة لنفس الخانة في الجدول الجديد؛

a_{ij}: القيمة القديمة الموجودة في تلك الخانة؛

a_{iq}: القيمة المقابلة للقيمة القديمة في عمود الدوران؛

a_{pj}: القيمة المقابلة للقيمة القديمة على سطر الدوران.

- حساب القيم الموجودة في السطرين الأخيرين بنفس الطريقة التي تم حسابها بها في الجدول السابق.

بالعودة الى مثالنا السابق، سنحاول انشاء الجدول الجديد (الجدول الثاني) وفق المراحل السابق ذكرها، وذلك كما يلي:

	C_i	30	40	0	0	0	/
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i
0	S_1	7/2	0	1	-3/4	0	90
40	X_2	1/2	1	0	1/4	0	20
0	S_3	1/2	0	0	-1/4	1	5
Z_i		20	40	0	10	0	80
C_i-Z_i		10	0	0	-10	0	/

يعد هذا الجدول أيضا أحد الحلول الممكنة للبرنامج الخطي المدروس، والقيم الحالية للمتغيرات القاعدية هي: $S_1 = 90$ ،$X_2 = 20$ ،$S_3 = 5$ ،$Z = 800$

أما قيم المتغيرات غير القاعدية فهي معدومة، أي: $X_1 = 0$ ،$S_2 = 0$.

حيث نلاحظ بأن هذا هناك تحسن في قيمة الإيرادات حيث انتقلت من 0 في الجدول السابق الى 800 في هذا الجدول، لكن السؤال المطروح هل هذا الحل هو الأمثل أو لا؟ لهذا سنعمل في الخطوة التالية على اختبار مدى كون هذا الحل امثلا.

5.1 اختبار مدى كون الحل الحالي أمثلا

بالرجوع الى الجدول رقم (3−12)، نجد بأن السطر الأخير يتضمن على قيمة موجبة وهي: 10؛ وان البرنامج الخطي هو من نوع التعظيم، وعليه نقول بأن الحل الموجود في هذا الجدول ليس هو الحل الأمثل، مما يتطلب العمل على تحسينه بنفس الخطوات التي تم بها تحسين الجدول الأول.

6.1 تحسين الحل الحالي

بنفس الطريقة سـنحاول إيجاد جدول السـمبلكس الجديد، عبر تغيير أحد المتغيرات القاعدية ويدعى بالمتغير الخارج او سـطر الدوران، بمتغير اخر غير قاعدي، ويدعى هذا الأخير بالمتغير الداخل أو عمود الدوران، ونقطة التقاطع بينهما تشكل محور الدوران Pivot.

عمود الدوران

	C_i	30	40	0	0	0	/	
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i	حاصل القسمة
0	S_1	7/2	0	1	-3/4	0	90	$\frac{180}{7} \cong 25{,}7$
40	X_2	1/2	1	0	1/4	0	20	40
0	S_3	1/2	0	0	-1/4	1	5	10
Z_i		20	40	0	10	0	80	
C_i-Z_i		10	0	0	-10	0	/	

سطر الدوران

بناء على نتائج الجدول نستنتج ان المتغير الخارج هو المتغير صاحب اقل حاصل قسمة موجب، وهو المتغير S_3؛

عنصر الارتكاز هو الخانة التي يتقاطع فيها عمود الدوران مع سطر الدوران، وفي هذا الجدول نجد أن عنصـر الارتكاز هو الخانة الملونة باللون الأخضـر، والتي تحمل القيمة $\frac{1}{2}$. سـنحاول انشـاء الجدول الجديد (الجدول الثالث) وفق المراحل السابق ذكرها، وذلك كما يلي:

	C_i	30	40	0	0	0	/
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i
0	S_1	0	0	1	1	-7	55
40	X_2	0	1	0	1/2	-1	15
30	X_1	1	0	0	-1/2	2	10
Z_i		30	40	0	5	20	900
C_i-Z_i		0	0	0	-5	-20	/

بالتركيز على القيم الموجودة في السطر الأخير لهذا الجدول، نلاحظ عدم وجود أي قيمة موجبة به، وبالتالي يمكن القول بأن هذا الجدول يمثل جدول الحل الأمثل، وسنستخرج منه القيم المثلى للمتغيرات.

القيم الحالية للمتغيرات القاعدية هي: $S_1 = 55$ ،$X_2 = 15$ ،$X_1 = 10$ ،$Z = 900$

أما قيم المتغيرات غير القاعدية فهي معدومة، أي: $S_3 = 0$ ،$S_2 = 0$.

حيث نلاحظ بأن هذا هناك تحسن في قيمة الإيرادات حيث انتقلت من 800 في الجدول السابق الى 900 في هذا الجدول، وهو الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي.

III. خطوات حل البرامج الخطية من نوع التدنية وفق طريقة السمبلكس

يقصد هنا بالبرامج الخطية من نوع التدنية النظامية، وقد ركزنا عليها في هذه النقطة حتى نبين كيفية معالجة هذا النوع من البرامج الخطية وفق طريقة السمبلكس، وأهم ما يميز البرامج الخطية من نوع التدنية، هو احتواء الصيغة القياسية لها على متغيرات اصطناعية، هذه الأخيرة تحتاج الى معالجة خاصة باستخدام جداول السمبلكس، وهذا بالاعتماد على طريقة M الكبيرة.

تتم هذه الطريقة تقريبا بنفس الخطوات التي يتم بها حل البرامج الخطية من نوع التعظيم؛ غير ان الاختلاف بينهما يكون فقط عند اختبار مثلوية الحل وكذلك عند اختيار المتغير الداخل. وفيما يلي سنحاول تطبيق خطوات الحل على مثال لبرنامج خطي من نوع التدنية ونظامي.

مثال 03-02:

حل البرنامج الخطي التالي بطريقة السمبلكس.

$$\text{Min: } w = 150\,Y_1 + 80\,Y_2 + 25\,Y_3$$

$$S/c \quad \begin{cases} 5\,Y_1 + 2\,Y_2 + 1\,Y_3 \geq 30 \\ 3\,Y_1 + 4\,Y_2 + 1\,Y_3 \geq 40 \end{cases}$$

$$Y_1 \geq 0; \quad Y_2 \geq 0; \quad Y_3 \geq 0$$

ملاحظة: نشير في البداية فقط الى ان الرموز المستخدمة في صياغة البرنامج الخطي (w و Y) ليست الزامية، وانما تم الاستعانة بها لتمييز البرامج الخطية من نوع التدنية عن تلك البرامج من نوع التعظيم.

حل المثال 03-02:

من اجل حل هذا البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس، سنتبع الخطوات التالية:

1.1 كتابة البرنامج الخطي وفق الصيغة القياسية، باستخدام كل التحويلات الضرورية؛

نلاحظ بأن كل قيود هذا البرنامج الخطي هي من نوع $(\sum a_{mn}X_n \geq b_m)$، ومن اجل تحويلها الى صيغة قياسية، يجب ان تحول الى معادلات، عبر استخدام التحويلة 02-06، حيث سيتم إضافة متغيرات اصطناعية ومتغيرات الفرق الى الطرف الايسر لكل قيد، وعليه يصبح الشكل الجديد للبرنامج الخطي وفق الصيغة القياسية كما يلي:

$$\text{Min: } w = 150\,Y_1 + 80\,Y_2 + 25\,Y_3 + 0\,S_1 + 0\,S_2 + M\,A_1 + M\,A_2$$

$$S/c \quad \begin{cases} 5\,Y_1 + 2\,Y_2 + 1\,Y_3 - 1\,S_1 - 0\,S_2 + 1\,A_1 + 0\,A_2 = 30 \\ 3\,Y_1 + 4\,Y_2 + 1\,Y_3 - 0\,S_1 - 1\,S_2 + 0\,A_1 + 1\,A_2 = 40 \end{cases}$$

$$Y_1 \geq 0;\ Y_2 \geq 0;\ Y_3 \geq 0;\ S_1 \geq 0;\ S_2 \geq 0;\ A_1 \geq 0;\ A_2 \geq 0$$

2.1 تشكيل جدول الحل الأولي

انطلاقا من الصيغة القياسية للبرنامج الخطي سيتم تشكيل جدول السمبلكس الأول (جدول الحل الأولي)، ونلاحظ بأن البرنامج الخطي يضم 7 متغيرات، و2 قيود، وبالتالي سيتم أخذ هذا بعين الاعتبار عند تحديد عدد الاعمدة والاسطر في الجدول، لهذا سكون الجدول وفق الشكل التالي:

	C_i	150	80	25	0	0	M	M	/
C_b	Y_b	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	A_1	A_2	b_i
M	A_1	5	2	1	-1	0	1	0	30
M	A_2	3	4	1	0	-1	0	1	40
W_i		8M	6M	2M	-M	-M	M	M	70M
C_i-W_i		150-8M	80-6M	25-2M	M	M	0	0	/

حيث خصصنا لكل متغير من متغيرات دالة الهدف عمود خاص به في الجدول، كما خصصنا لكل قيد سطر خاص به، ويبقى هنا نقل البيانات من الصيغة القياسية للبرنامج الخطي الى الجدول، والبداية تكون من خلال نقل معاملات المتغيرات في دالة الهدف؛ بعد هذا يتم نقل البيانات الخاصة

بالقيود، وأول نقطة يتم التركيز عليها هي المتغير القاعدي (الأساسي) الذي يمثل ذلك القيد، حيث تحدثنا من قبل بأن الأولوية تعطى للمتغيرات الاصطناعية، وفي حالة غيابها، تنتقل الأولوية الى متغيرات الفرق.

بعد ملء كل الخانات الموجود في الجدول، نحاول استخراج قيم المتغيرات القاعدية منه مباشرة، عن طريق استخراج القيمة المقابلة لها في عمود b_i، اما المتغيرات غير القاعدية فقيمها معدومة.

وعليه فان القيم الحالية للمتغيرات القاعدية هي: $A_1 = 30$، $A_2 = 40$، $W = 70M$

أما قيم المتغيرات غير القاعدية فهي معدومة، أي: $Y_1 = 0$، $Y_2 = 0$، $Y_3 = 0$ ، $S_1 = 0$، $S_2 = 0$.

3.1 اختبار مدى كون الحل الأولي أمثلا؛

نقول عن جدول سمبلكس لبرنامج خطي من نوع التدنية أنه يمثل الحل الأمثل له، إذا لم يتضمن السطر الأخير له (سطر C_i- Z_i) على قيم سالبة. ونظرا لكون قيمة M مجهولة، فقد يصعب معرفة القيم السالبة من الموجبة، ولهذا **ننصح** الطلبة هنا دائما بافتراض قيمة معينة لــ M، تكون برتبة اعلى من رتب بقية القيم في الجدول، وبما ان أكبر قيمة في الجدول هي من رتبة المئات، سنفترض أن قيمة M هي 1000، وهذا من اجل اكتشاف القيم السالبة فقط، لكن عند تحسين الجدول نبقي على القيمة M في السطر الأخير وليس 1000. وعليه يصبح السطر الأخير من الجدول السابق على الشكل التالي:

C_i-W_i	150-8M	80-6M	25-2M	M	M	0	0	/
القيمة المحسوبة	-7850	-5920	-1975	1000	1000			

$150 - (8 \times 1000) = -7850$

$80 - (6 \times 1000) = -5920$

$25 - (2 \times 1000) = -1975$

وبهذه الطريقة يسهل لدينا اكتشاف القيم السالبة الموجودة في السطر الأخير من الجدول، حيث يظهر وجود ثلاث قيم سالبة تم التأشير عليها باللون الرمادي، وعليه نقول بأن جدول الحل السابق هو حل ليس أمثل، مما يتطلب تحسينه، وهذا ما سيتم القيام به في الخطوة التالية.

4.1 تحسين الحل الأول.

يتم تحسين الحل في البرامج الخطية من نوع التدنية وفق نفس المنهجية الخاصة بتحسين الحل في البرامج الخطية من نوع التعظيم، حيث سيتم تحديد عمود الدوران، ثم سطر الدوران وعنصر الارتكاز؛ بعد هذا يتم تشكيل جدول الحل الجديد.

فيما يلي سيتم تحديد المتغير الداخل والخارج للمثال السابق:

عمود الدوران

جدول 03−17

	C_i	150	80	25	0	0	M	M	/	
C_b	Y_b	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	A_1	A_2	b_i	حاصل القسمة
M	A_1	5	2	1	-1	0	1	0	30	$\frac{30}{5}=6$
M	A_2	3	4	1	0	-1	0	1	40	$\frac{40}{3}\cong 13,33$
W_i		8M	6M	2M	-M	-M	M	M	70M	
C_i-W_i		150-8M	80-6M	25-2M	M	M	0	0	/	

سطر الدوران

يتضح من الجدول ان المتغير الداخل هو والمتغير الخارج هو لأن هذا الأخير كان له اصغر حاصل قسمة موجب $(6 < 13,33)$.

ان جدول السمبلكس الجديد هو مشابه تماما للجدول السابق من حيث شكله، وعدد اسطره وعدد الاعمدة به، غير ان البيانات الموجودة به يتم حسابها بناء على ما هو موجود في الجدول السابق له، وذلك وفق نفس المراحل المتبعة في البرامج من نوع التعظيم وذلك كما يلي:

- نبحث عن نفس خانة عنصر الارتكاز في الجدول الجديد، ونضع بها القيمة "1"؛
- باقي الخانات في عمود الدوران نضع بها "0"، ما عدا الخانات الموجودة في السطرين الأخيرين؛
- نقسم القيم الموجودة في سطر الدوران على قيمة عنصر الارتكاز ونضعها في نفس الخانة في الجدول الجديد؛

- بقية الخانات يتم حساب قيمها، ماعدا الخانات الموجودة في السطرين الأخيرين، من تطبيق المعادلة التالية:

$$a'_{ij} = \frac{(a_{ij} \times a_{pq}) - (a_{iq} \times a_{pj})}{a_{pq}} \dots (1)$$

- حساب القيم الموجودة في السطرين الأخيرين بنفس الطريقة التي تم حسابها بها في الجدول السابق.

وعليه يصبح جدول السمبلكس الثاني على الشكل التالي:

	C_i	150	80	25	0	0	M	M	/
C_b	Y_b	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	A_1	A_2	b_i
150	Y_1	1	2/5	1/5	-1/5	0	1/5	0	6
M	A_2	0	14/5	2/5	3/5	-1	-3/5	1	22
W_i		150	$60+\frac{14}{5}M$	$30+\frac{2}{5}M$	$-30+\frac{3}{5}M$	-M	$30-\frac{3}{5}M$	M	900+ 22M
C_i-W_i		0	$20-\frac{14}{5}M$	$-5-\frac{2}{5}M$	$30-\frac{3}{5}M$	M	$-30+\frac{8}{5}M$	0	/

وعليه فان القيم الحالية للمتغيرات القاعدية هي: $Y_1 = 6$ ،$A_2 = 22$ ،$W = 900 + 22M$

أما قيم المتغيرات غير القاعدية فهي معدومة، أي: $A_1 = 0$ ،$Y_2 = 0$ ،$Y_3 = 0$ ،$S_1 = 0$، $S_2 = 0$.

ومن خلال مقارنة قيمة المتغير W في الجدول الثاني مع قيمته في الجدول الأول، نجد هناك انخفاض في قيمته، أي قيمته الجديدة اقل من قيمته القديمة $(70M > 900 + 22M)$، وبالتالي نستنتج تحسن في قيمته.

5.1 اختبار مدى كون الحل الثاني أمثلا

يتضح من السطر الأخير للجدول 03-18 وجود ثلاث قيم سالبة وهي: $\left(20 - \frac{14}{5}M\right)$، $\left(-5 - \frac{2}{5}M\right)$، $\left(30 - \frac{3}{5}M\right)$. وعليه نقول بأن الجدول الثاني لا يمثل حلا امثلا للبرنامج الخطي، وبالتالي يجب تحسينه.

6.1 تحسين جدول الحل الثاني

عمود الدوران

سطر الدوران

	C_i	150	80	25	0	0	M	M	/	
C_b	Y_b	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	A_1	A_2	b_i	حاصل القسمة
150	Y_1	1	2/5	1/5	-1/5	0	1/5	0	6	15
M	A_2	0	14/5	2/5	3/5	-1	-3/5	1	22	$\frac{55}{7}$
W_i		150	$60+\frac{14}{5}M$	$30+\frac{2}{5}M$	$-30+\frac{3}{5}M$	-M	$30-\frac{3}{5}M$	M	900+22M	
C_i-W_i		0	$20-\frac{14}{5}M$	$-5-\frac{2}{5}M$	$30-\frac{3}{5}M$	M	$-30+\frac{8}{5}M$	0	/	

1.6.1تشكيل جدول الحل الثالث

	C_i	150	80	25	0	0	M	M	/
C_b	Y_b	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	A_1	A_2	b_i
150	Y_1	1	0	1/7	-2/7	1/7	2/7	-1/7	20/7
80	Y_2	0	1	1/7	3/14	-5/14	-3/14	5/14	55/7
W_i		150	80	230/7	-180/7	-50/7	180/7	50/7	7400/7
C_i-W_i		0	0	-55/7	180/7	50/7	M-180/7	M-50/7	/

وعليه فان القيم الحالية للمتغيرات القاعدية هي: $Y_1 = \frac{20}{7}$، $Y_2 = \frac{55}{7}$، $W = \frac{7400}{7}$

أما قيم المتغيرات غير القاعدية فهي معدومة، أي: $A_1 = 0$، $A_2 = 0$، $Y_3 = 0$، $S_1 = 0$، $S_2 = 0$.

7.1 اختبار مدى كون الحل الثالث أمثلا

يتضح من السطر الأخير للجدول 03-30 وجود قيمة سالبة وحيدة وهي: $\left(-\frac{55}{7}\right)$. وعليه نقول بأن الجدول الثالث لا يمثل حلا امثلا للبرنامج الخطي، وبالتالي يجب تحسينه.

8.1 تحسين جدول الحل الثالث

عمود الدوران

سطر الدوران

	C_i	150	80	25	0	0	M	M	/	
C_b	Y_b	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	A_1	A_2	b_i	حاصل القسمة
150	Y_1	1	0	1/7	-2/7	1/7	2/7	-1/7	20/7	20
80	Y_2	0	1	1/7	3/14	-5/14	-3/14	5/14	55/7	55
W_i		150	80	230/7	-180/7	-50/7	180/7	50/7	7400/7	
C_i-W_i		0	0	-55/7	180/7	50/7	M-180/7	M-50/7	/	

يوضح الجدول السابق ان عمود الدوران هو عمود المتغير Y_3، وهذا لكونه العمود الوحيد الذي تقابله قيمة سالبة في السطر الأخير لجدول السمبلكس، وبعد قسمة قيم العمود b_i على القيم المقابلة لها في عمود الدوران، توصلنا الى ان اقل حاصل قسمة موجب هو 20، الذي يقابل سطر Y_1، وبالتالي فإن هذا الأخير هو سطر الدوران، وعنصر الارتكاز هو الخانة الملونة بالأخضر عند القيمة $\frac{1}{7}$.

	Ci	150	80	25	0	0	M	M	/
Cb	Y b	Y1	Y 2	Y 3	S1	S2	A1	A2	bi
25	Y3	7	0	1	-2	1	2	-1	20
80	Y2	-1	1	0	1/2	-1/2	-1/2	1/2	5
Wi		95	80	25	-10	-15	10	15	900
Ci-Wi		55	0	0	10	15	M-10	M-15	/

وعليه فان القيم الحالية للمتغيرات القاعدية هي: $Y_3 = 20$، $Y_2 = 5$، $W = 900$

أما قيم المتغيرات غير القاعدية فهي معدومة، أي: $A_1 = 0$، $A_2 = 0$، $Y_1 = 0$، $S_1 = 0$، $S_2 = 0$.

9.1 اختبار مدى كون جدول الحل الرابع أمثلا

من خلال الاطلاع على قيم السطر الأخير من جدول السمبلكس الرابع (جدول 03-22)، نلاحظ عدم قيم سالبة في هذا السطر الأخير، وبما أن البرنامج الخطي هو من نوع التدنية، فإننا

نستنتج بأن هذا الجدول الرابع هو جدول الحل الأمثل، وأن الحلول التي قدمها هذا الجدول هي الحلول المثلى للبرنامج الخطي المدروس.

IV.حالات خاصة في حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس

تعرف تقنية الحل بطريقة السـمبلكس نفس الحالات الخاصـة الموجودة في الحل البياني، حيث يخضـع حل هذا النوع من البرامج الخطية الى نفس خطوات الحل بطريقة السـمبلكس، غير أن خصـوصـيتها تكمن في اختيار الحل الأمثل، ولهذا يجب على الطالب الانتباه كثيرا، حيث انه بعد ان يتم التوصـل الى قيم الحل الأمثل يجب عليه التأكد من الحل الذي بين يديه ليس حالة من هذه الحالات الخاصـة. لهذا سـنحاول في هذا العنصـر توضـيح تلك الحالات الخاصـة، من خلال تقديم تذكير حول خصوصيتها في الحل البياني، وكذلك خصوصيتها في الحل بطريقة السمبلكس.

1. حالة برنامج خطي لا يقبل حلول

وفق الحل بطريقة السـمبلكس، نقول عن برنامج خطي أنه لا يقبل حلولا، إذا تضـمن جدول السـمبلكس الأخير له (جدول الحل الأمثل) على متغير اصـطناعي ضـمن متغيراته القاعدية. بعبارة أخرى فان هذه الحالة الخاصـة تتحقق بعدما يتم التوصـل الى الحل الأمثل للبرنامج المدروس، ولكن عند التحقق من المتغيرات القاعدية (الأساسية) لهذا الحل الأمثل، نجد ان أحد تلك المتغيرات القاعدية هو متغير اصـطناعي وأن قيمته غير معدومة، وعليه نلغي قيم بقية المتغيرات، ونقول إن **البرنامج الخطي لا يقبل حلول**. ومن أجل توضيح الفكرة أكثر سنقدم فيما يلي مثال على هذه الحالة الخاصة.

مثال 03-04: حل البرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة السمبلكس.

$$\text{Max: } Z = 20X_1 + 25X_2$$

$$S/c \quad \begin{cases} 6X_1 + 3X_2 \leq 30 \\ X_1 \geq 80 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

حل المثال 03-04:

الصيغة القياسية للبرنامج الخطي هي كما يلي:

$$\text{Max: } Z = 20X_1 + 25X_2 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1$$

$$S/c \quad \begin{cases} 6X_1 + 3X_2 + S_1 + 0S_2 + 0A_1 = 30 \\ X_1 \quad + 0S_1 - S_2 + A_1 = 80 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0; \quad S_1 \geq 0; \quad S_2 \geq 0; \quad A_1 \geq 0$$

وفيما يلي جداول السمبلكس لهذا البرنامج الخطي.

	جدول السمبلكس الأول						
	C_i	20	25	0	0	-M	/
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	b_i
0	S_1	6	3	1	0	0	30
-M	A_1	1	0	0	-1	1	80
Z_i		-M	0	0	M	-M	-80M
C_i-Z_i		20+M	25	0	-M	0	/

	جدول السمبلكس الثاني						
	C_i	20	25	0	0	-M	/
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	b_i
20	X_1	1	1/2	1/6	0	0	5
-M	A_1	0	-1/2	-1/6	-1	1	75
Z_i		20	$10+\frac{1}{2}M$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}M$	M	-M	100-75M
C_i-Z_i		0	$15-\frac{1}{2}M$	$-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}M$	-M	0	/

يتضــح من قيم الجدول الثاني بأن القيم الموجودة في الســطر الأخير له كلها غير موجبة، مما يعني بأن هذا الجدول يمثل جدول الحل الأمثل، لكن بعد الانتباه الى المتغيرات القاعدية له، نجد ان المتغير الثاني منها هو متغير اصــطناعي، وقيمته هي 75 أكبر من 0، وعليه نقول بأن هذا البرنامج الخطي لا يقبل حلولا.

2. حالة برنامج خطي يقبل حلول متعددة

بالنســبة للحل بطريقة الســمبلكس، نقول عن برنامج خطي انه يقبل حلولا متعددة، اذا تحقق في جدول الســمبلكس الأخير له (جدول الحل الأمثل)، أن يتضــمن عمود أحد المتغيرات غير القاعدية على قيمة معدومة في السطر الأخير لجدول السمبلكس، بمعنى آخر، اذا توصلنا الى جدول الحل الأمثل لبرنامج

خطي، ووجدنا في الســطر الأخير لذلك الجدول وجود القيمة "0" مقابل أحد المتغيرات غير القاعدية، فإننا نســتنتج بأن هذا البرنامج الخطي يقبل حلول متعددة (حلول بديلة)، وليس الحل الموجود في ذلك الجدول فقط.

مثال 03-05: حل البرنامج الخطي التالي بطريقة السمبلكس

$$\text{Min: } Z = 20X_1 + 25X_2$$
$$S/c \begin{cases} 6X_1 + 3X_2 \geq 30 \\ 4X_1 + 5X_2 \geq 40 \end{cases}$$
$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

حل المثال 03-05:

يمكن كتابة البرنامج الخطي السابق وفق الصيغة القياسية التالية

$$\text{Min: } Z = 20X_1 + 25X_2 + 0S_1 + 0S_2 + M\,A_1 + M\,A_2$$
$$S/c \begin{cases} 6X_1 + 3X_2 - S_1 + A_1 = 30 \\ 4X_1 + 5X_2 - S_2 + A_2 = 40 \end{cases}$$
$$X_1 \geq 0; X_2 \geq 0 \;\; X_1 \geq 0; X_2 \geq 0 \;\; X_1 \geq 0; X_2 \geq 0$$

وفيما يلي جداول السمبلكس لهذا البرنامج الخطي.

	جدول السمبلكس الثالث							
	C_i	20	25	0	0	M	M	/
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_1	b_i
20	X_1	1	0	-5/18	1/6	5/18	-1/6	5/3
25	X_2	0	1	2/9	-1/3	-2/9	1/3	20/3
Z_i		20	25	0	-5	0	5	200
C_i-Z_i		0	0	0	5	0	M-5	/

نلاحظ من خلال الجدول السابق بأن جدول السمبلكس الثالث هو جدول الحل الأمثل، حيث أن نوع البرنامج الخطي هو من نوع التدنية، وأن السـطر الأخير له لا يتضـمن على قيم سـالبة، لكن عند الانتباه الى قيم الســطر الأخير له نجد أن المتغير S_1 وA_1 هما متغيران غير قاعديان، لكن عموديهما

يتضمنان على "0" مقابل السطر الأخير من الجدول (انظر القيم الملونة في جدول السمبلكس الثالث)، وهنا نقول بأن البرنامج الخطي يقبل حلولا متعددة، وقيمة الهدف تساوي 200.

3. حالة برنامج خطي يقبل حل غير محدد

في الحل بطريقة الســـمبلكس، نقول عن برنامج خطي انه يقبل حل غير محدد، إذا أظهرت قيم الســـطر الأخير له في جدول الســـمبلكس الأخير أن هذا الجدول قابل للتحســـين، أي لا يمثل الحل الأمثل، غير أنه عند القيان باختيار سطر الدوران، نجد ان حواصل القسمة كلها سالبة، ولا يمكن بهذا الشكل تحديد المتغير الخارج، في هذه الحالة نتوقف عن تحسين الحل، ونقول إن البرنامج الخطي يقبل حل غير محدد.

مثال 03-06: حل البرنامج الخطي التالي بطريقة السمبلكس

$$\text{Max: } Z = 20X_1 + 25X_2$$

$$S/c \begin{cases} 6X_1 + 3X_2 \geq 30 \\ 4X_1 + 5X_2 \geq 40 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

حل المثال 03-06:

يمكن كتابة البرنامج الخطي السابق وفق الصيغة القياسية التالية

$$\text{Max: } Z = 20X_1 + 25X_2 + 0S_1 + 0S_2 - M A_1 - M A_2$$

$$S/c \begin{cases} 6X_1 + 3X_2 - S_1 + \quad A_1 = 30 \\ 4X_1 + 5X_2 - S_2 + \quad A_2 = 40 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; X_2 \geq 0 \; X_1 \geq 0; X_2 \geq 0 \; X_1 \geq 0; X_2 \geq 0$$

وفيما يلي جداول السمبلكس لهذا البرنامج الخطي.

	جدول السمبلكس الرابع							
	C_i	20	25	0	0	M	M	/
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_1	b_i
0	S_2	6	0	-5/3	1	5/3	-1	10
25	X_2	2	1	-1/3	0	1/3	0	10
Z_i		50	25	-25/3	0	25/3	0	250
C_i-Z_i		-30	0	25/3	0	M-25/3	M	/

نلاحظ من قيم السطر الأخير لجدول السمبلكس الرابع، أن هذا الأخير هو حل غير أمثل، وأن المتغير S_1 هو المتغير الداخل، لكن عند القيام بقسمة قيم b_i على القيم المقابلة لها في عمود الدوران، نجد أن حواصل القسمة كلها سالبة، ولا يمكن تحديد المتغير الخارج، هنا نتوقف عن تحسين الحل، ونقول أن البرنامج الخطي يقبل حل غير محدد.

4. حالة دورانية الحل

تتحقق هذه الحالة عندما نبحث عن تحسين الحل الموجود في أحد جداول السمبلكس، غير انه عند العمل على تحديد عمود الدوران نجد في السطر الأخير له قيمتين موجبتين، كبيرتين ومتساويتين، في حالة برنامج خطي من نوع التعظيم (او قيمتين سالبتين، كبيرتين في القيمة المطلقة ومتساويتين، في حالة البرامج الخطية من نوع التدنية)، مما يخلق مشكلة في اختيار عمود الدوران.

كما يمكن ان تتحقق هذه الحالة أيضا عند اختيار سطر الدوران، اين نحصل على قيمتين موجبتين، صغيرتين ومتساويتين، لحاصل قسمة قيم b_i على القيم المقابلة لها في عمود الدوران، ما يخلق مشكلة في اختيار سطر الدوران.

غير ان الحل في هذه الحالة هو الاختيار العشوائي، أي مهما يكن عمود الدوران او سطر الدوران الذي تم اختياره من بين الحالات التي سبق الحديث عنها، فان الحل الذي سيتم التوصل اليه في النهاية هو نفسه.

مثال 03-07:

فيما يلي جدول السمبلكس لأحد البرامج الخطية من نوع التعظيم

جدول 03-32

	جدول السمبلكس							
	C_i	20	25	0	0	-M	-M	/
C_b	X_b	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_1	b_i
20	X_1	1	0	1	1/6	5/18	-1/6	20/3
25	X_2	0	1	-1	-1/3	-2/9	1/3	20/3
Z_i		20	25	-5	-5	0	5	300
C_i-Z_i		0	0	5	5	-M	-M-5	/

نلاحظ من خلال هذا الجدول وجود قيمتين موجبتين في الســطر الأخير منه، مما يدل على انه حل غير أمثل، ويجب تحســـينه، لكن عند اختيار عمود الدوران، نجد ان القيمتين الموجبتين هما متســـاويتين، ولا توجد قيمة موجبة أخرى أكبر منهما، مما يدل على اننا في حالة دورانية الحل، واي عمود يتم اختياره سـيؤدي في النهاية الى نفس الحل الأمثل، غير انه قد يكون اختلاف بينهما في عدد الجداول المحسوبة من اجل الوصول الى الحل الأمثل.

V. خلاصة

1. الحل بطريقة السمبلكس يكون ممكننا مهما يكن عدد متغيرات القرار في البرنامج الخطي؛
2. يتم تطبيق أسلوب الحل بجداول السمبلكس عبر مجموعة من الخطوات، تتمثل أهمها فيما يلي:
   - كتابة البرنامج الخطي وفق الصيغة القياسية؛
   - تشكيل جدول الحل الأولي؛
   - اختبار مدى كون الحل أمثلا؛
     - إذا كان الحل أمثلا، نستخدم ذلك الحل؛
     - إذا كان الحل غير أمثل نقوم بتحسينه وإعادة اختباره حتى نتوصل الى الحل الأمثل.
3. نقول عن جدول سمبلكس انه يمثل الحل الأمثل اذا لم يحتوي السطر الأخير له على قيم موجبة في حالة التعظيم، وقيم سالبة في حالة التدنية؛
4. من اجل تحسين الحل، نقوم بتحديد عمود وسطر الدوران وعنصر الارتكاز، ثم نشكل جدول الحل الجديد؛
5. الحالات الخاصة في حل البرامج الخطية بطريقة السمبلكس:
   - حالة برنامج خطي لا يقبل حلول؛
   - حالة برنامج خطي يقبل حلول متعددة؛
   - حالة برنامج خطي يقبل حل غير محدد؛
   - حالة دورانية الحل.