تمهيد

سنركز في هذا الفصل على أسلوب الحل البياني للبرامج الخطية، حيث يستعمل هذا الأسلوب فقط على البرامج الخطية التي تحتوي على متغيرين مفسرين فقط (متغيري قرار)، اما إذا احتوى البرنامج الخطي على أكثر من متغيرين فانه لا يمكن إيجاد حلول له وفق هذا الأسلوب؛ ولهذا سنتطرق في هذا الفصل الى مراحل الحل البياني للبرامج الخطية، مع تقديم امثلة على كيفية تطبيقها، ثم سنقدم بعد ذلك بعض الحالات الخاصة في الحل البياني، وفي الأخير سيتم تقديم مجموعة من التمارين المحلولة.

I. مراحل الحل البياني للبرامج الخطية

عموما تتطلب عملية الحل البياني للبرامج الخطية اتباع المراحل التالية:

1. نرسم معلم متعامد، يضم محورين متعامدين، نضع على المحور الأفقي قيم المتغير الأول X_1، ونضع على المحور العمودي قيم المتغير الثاني X_2، وتجدر الإشارة الى ان اختيار المحور الافقي للمتغير الأول لا يعني ان هذا المتغير هو مفسر والأخر تابع، وانما تم تحديد هذا الاختيار من اجل ان يكون انسجام في شكل المنحنى لدى كل الطلبة؛
2. نمثل القيود على المعلم السابق، ويتطلب تمثيل القيود تحويلها على شكل معادلات خط مستقيم (ذات إشارة "=") بعد ان كانت على شكل متراجحات، ثم نقوم بتمثيل تلك المعادلات عبر اختيار نقطتين تنتميان الى تلك المعادلة، وتمثيل تلك النقطتين على المعلم، ثم الربط بينهما بخط مستقيم؛ بعد رسم الخط المستقيم نجده قد قسم فضاء الرسم (ورقة الرسم) الى قسمين؛ احدهما يحقق الشرط الموجود في المتراجحة والأخر لا يحقق ذلك الشرط (الجزء الخاطئ)؛

وعليه سنقوم بشطب ذلك الجزء الذي لا يحقق الشرط؛ ولكي نعرف ان أحد الأجزاء بانه يحقق الشرط ام لا، فإننا نأخذ أي نقطة عشوائية تكون تابعة بشكل أكيد الى ذلك الجزء، ثم نعوض احداثيات تلك النقطة في المتراجحة، ثم نحدد ما اذا كانت تلك النقطة قد حققت شرط المتراجحة ام لا؛ ان تمثيل القيود يشمل أيضا تمثيل شروط عدم السلبية بنفس الأسلوب الذي نمثل به القيود الأخرى؛

3. بعد تمثيل كل القيود، نبحث عن مدى وجود منطقة ما داخل الرسم لم يتم شطبها من قبل أي قيد، أي لا تحتوي على أي شـــطب، حيث تمثل تلك المنطقة منطقة الحلول الممكنة، ورياضـــيا يعني هذا ان كل نقطة تابعة لتلك المنطقة هي نقطة تحقق كل الشروط الخاصـة بالقيود، وبالتالي فإنها تمثل حلا ممكنا للمسألة المدروسة؛

4. بعد التأكد من إمكانية وجود حلول ممكنة للبرنامج الخطي المدروس، نقوم خلال هذه المرحلة بالبحث عن أفضـل حل للمشكلة، ويتحقق هذا من خلال طريقتين أساسيتين هما: طريقة زوايا منطقة الحلول الممكنة، وطريقة انسحاب دالة الهدف؛

- **طريقة زوايا منطقة الحلول الممكنة:** تعتمد هذه الطريقة على تحديد الزوايا الموجودة في منطقة الحلول الممكنة، واستخراج احداثيات كل واحدة منها، ثم تعويض احداثيات تلك النقطة في دالة الهدف، ومن ثم نحدد النقطة التي تمثل الحل الأمثل، حيث انه اذا كان هدف المسألة هو من نوع التعظيم، فان الحل الأمثل يتمثل في النقطة التي تحقق اكبر قيمة في دالة الهدف؛ اما ذا كان الهدف من نوع التدنية؛ فان الحل الأمثل يكون عند النقطة التي تمثل ادنى قيمة لدالة الهدف؛ ما يلاحظ على طريقة زوايا منطقة الحلول الممكنة انها بسيطة ودقيقة، غير انها قد لا تسمح في بعض الأحيان بكشف بعض الحالات الخاصـة في الحل البياني، خاصـة ما تعلق بحالة تعدد الحلول المثلى، ولهذا يجب الانتباه كثيرا عند استخدام هذه الطريقة؛
- **طريقة انســحاب دالة الهدف:** تعتمد هذه الطريقة على تمثيل دالة الهدف في منحنى الرسـم، ويتم هذا من خلال تحويل دالة الهدف الى معادلة ومساواتها بالصفر، بعد هذا يتم تمثيل الخط المســتقيم الخاص بها، بنفس الطريقة التي مثلنا بها المعادلة الخاصــة بالقيود، حيث نجد ان الخط المســتقيم لدالة الهدف يمر من المبدأ، بعد هذا نضـــع مســطرة فوق خط دالة الهدف، ونحرك المسـطرة بطريقة متوازية باتجاه منطقة الحلول الممكنة، حتى نتحصـل على قيم الحل الأمثل؛

فاذا كان هدف المسألة هو من نوع التعظيم، فان نقطة الحل الأمثل هي اخر نقطة من منطقة الحلول الممكنة تمر بها المســـطرة؛ اما إذا هدف المســـألة من نوع التدنية، فان نقطة الحل الأمثل تكون اول نقطة من منطقة الحلول الممكنة تمر بها المســـطرة. ولعل ما يميز هذه الطريقة هو صـعوبة اسـتخدامها خاصـة ما تعلق بتحريك المسـطرة في مسـار مواز لخط دالة

الهدف، واي انحراف في تحريك المســـطرة قد يؤدي الى حلول خاطئة؛ اما من مزايا هذه الطريقة هو قدرتها على كشف الحالات الخاصة في الحل البياني؛ ولهذا ينبغي لمستخدم هذه الطريقة اخذ هذه النقاط بعين الاعتبار عند استخدامها.

ومن اجل توضـيح أكثر لكيفية تطبيق كل المراحل الســابقة، سـنحاول فيما يلي تطبيقها على مثالين، أحدهما من نوع التعظيم والأخر من نوع التدنية.

II. الحل البياني لبرنامج خطي من نوع التعظيم

ســـنحاول في هذا العنصـــر إيجاد حل بياني للبرنامج الخطي الخاص بالمثال 01-01، الموجود في الفصل الأول من هذه المطبوعة، وفيما يلي مراحل الحل البياني لبرنامج خطي من نوع التعظيم:

مثال 01-02: حل بيانيا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max: } Z = 30X_1 + 40X_2$$

$$S/c \quad \begin{cases} 5X_1 + 3X_2 \le 150 \\ 2X_1 + 4X_2 \le 80 \\ X_1 + X_2 \le 25 \end{cases}$$

$$X_1 \ge 0; \quad X_2 \ge 0$$

حل المثال 01-02: نلاحظ ان البرنـامج الخطي يتضـــمن على متغيرين و3 قيود، وبـالتـالي فإننا نستطيع إيجاد حل له باستخدام أسلوب الحل البياني.

1. تشكيل المعلم المتعاد من اجل تمثيل الحل البياني
2. تمثيل القيود

من اجل تمثيل القيود بيانيا (في شكل متراجحات)، سنقوم بكتابتها على شكل معادلات، ثم نحدد المجال الصحيح لكل متراجحة منها، وذلك كما يلي:

$$S/c \quad \begin{cases} 5X_1 + 3X_2 \le 150 & \text{يصبح كما يلي} \rightarrow & 5X_1 + 3X_2 = 150 \; \dots (1) \\ 2X_1 + 4X_2 \le 80 & \text{يصبح كما يلي} \rightarrow & 2X_1 + 4X_2 = 80 \; \dots (2) \\ X_1 + X_2 \le 25 & \text{يصبح كما يلي} \rightarrow & X_1 + X_2 = 25 \; \dots (3) \end{cases}$$

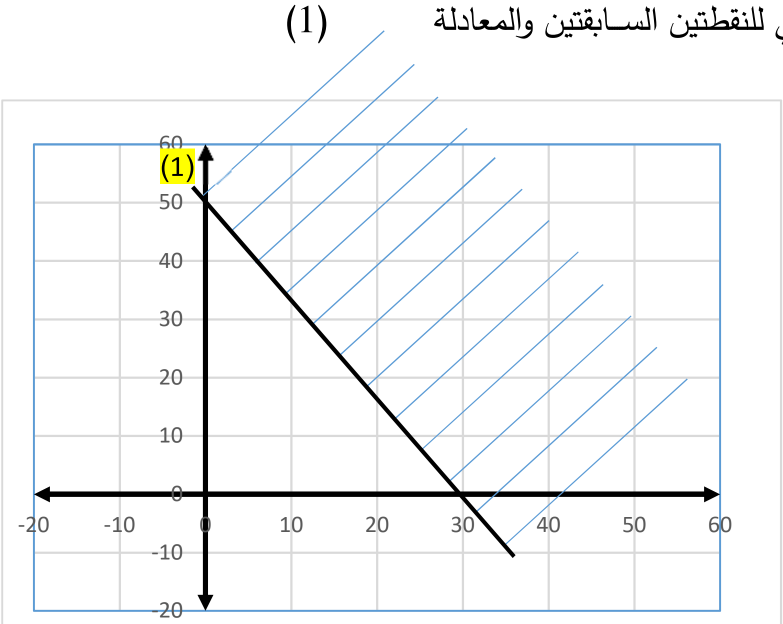
بعد هذا نقوم بتمثيل كل واحدة من المعادلات السابقة، حيث سنستعين في هذه الخطوة بجدول مساعد، نضع فيه احداثيتي نقطتين تابعتين للمعادلة المدروسة، ثم نرسم تلك النقطتين على المنحنى، ونربط بينهما بخط مستقيم، هذا الأخير هو التمثيل البياني للمعادلة. ان هذا الخط المستقيم يقسم الفضاء الموجود داخل المعلم المتعامد الى قسمين، أحدهما يحقق الشرط الخاص بالمتراجحة، والأخر لا يحقق، بعد هذا نقوم بشطب الفضاء غير الصحيح.

ولتمثيل المعادلة (1) سنستعين بالجدول التالي:

$5X_1 + 3X_2 = 150$		
	النقطة 1 ↓	النقطة 2 ↓
X_1	0	30
X_2	50	0

وتم الحصول على احداثيتي النقطة 1 من خلال افتراض قيمة X_1 مساوية لــــ 0، ونحسب قيمة X_2 المقابلة لها، أي لما $X_1 = 0$ فان $(0 + 3X_2 = 150) \Leftarrow (X_2 = \frac{150}{3}) \Leftarrow X_2 = 50$. وهكذا تم الحصول على احداثيتي النقطة الأولى، وبنفس الطريقة تم الحصول على احداثيتي النقطة الثانية، حيث افترضنا هذه المرة أن X_2 قيمتها مساوية لـ 0، وتوصلنا الى قيمة X_1 المقابلة لها تساوي 30.

وفيما يلي التمثيل البياني للنقطتين السابقتين والمعادلة (1)

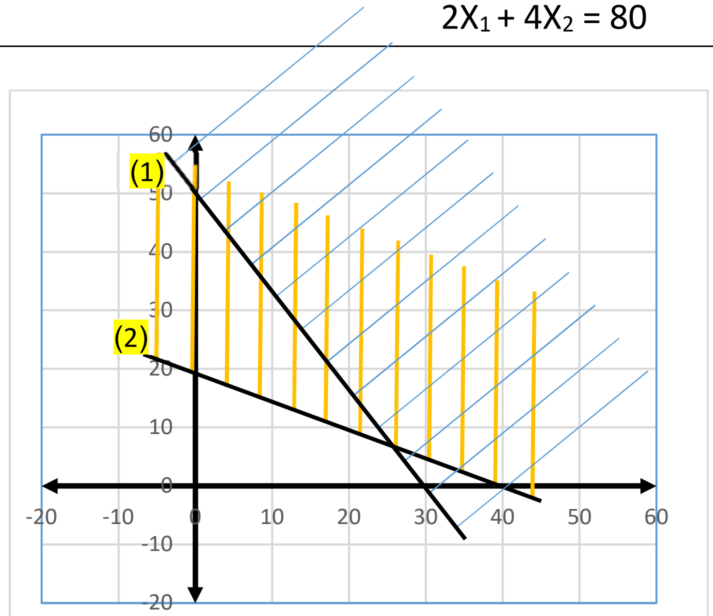


بعد تمثيل الخط المستقيم لمعادلة القيد (1)، نلاحظ بأن هذا الخط قد قسم فضاء الحل الى قسمين، جزء علوي وآخر سفلي، بعدها اخذنا احدى النقاط التابعة للجزء السفلي، وهي نقطة المبدأ،

والتي احداثياتها $(0{,}0)$، وعوضنا قيمها في القيد رقم (1)، وتحصلنا على: $5.\,0 + 3.\,0 \leq 150$ وبالتالي فهي تحقق الشرط، وعليه فان المجال الذي تنتمي له هذه النقطة هو المجال الصحيح، ولهذا قمنا بشطب المجال المقابل له، مثل ما يتضح في الرسم السابق.

بنفس الطريقة سيتم تمثيل بقية القيود، وفيما يلي تثميل القيد رقم (2)

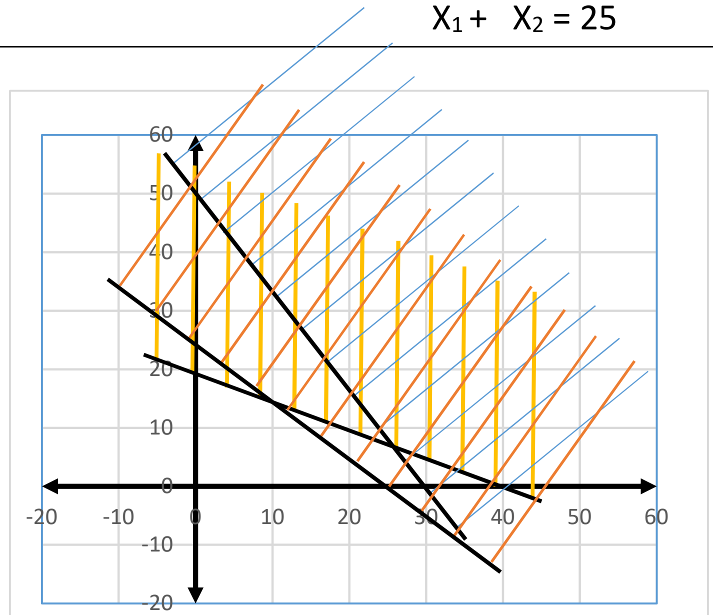
$2X_1 + 4X_2 = 80$



	النقطة 1 ↓	النقطة 2 ↓
X_1	0	40
X_2	20	0

بنفس الطريقة كذلك سيتم تمثيل القيد رقم (3)

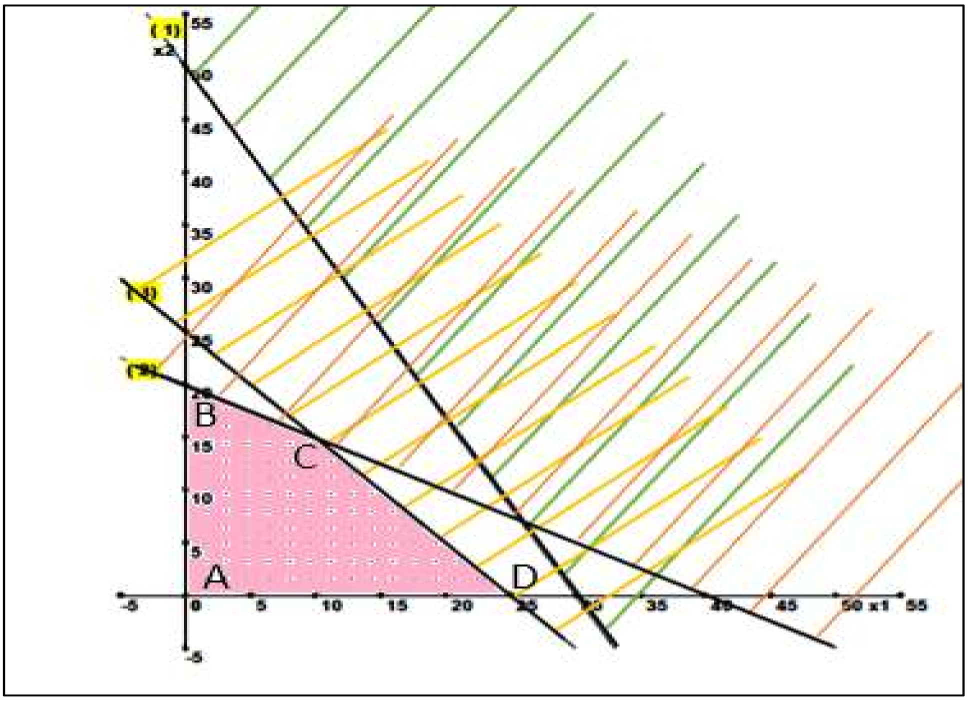
$X_1 + X_2 = 25$



	النقطة 1 ↓	النقطة 2 ↓
X_1	0	25
X_2	25	0

3. تحديد منطقة الحلول الممكنة

فيما يلي سيتم تمثيل شرط عدم السلبية، وتحديد منطقة الحلول الممكنة، وذلك كما يظهر في الشكل الموالي:



4. استخراج الحل الأمثل

يتضح من الشكل السابق ان منطقة الحلول الممكنة (المنطقة الملونة باللون الوردي)، هي عبارة عن شكل رباعي الأضلاع، وكل نقطة من هذه المنطقة تحقق كل الشروط الخاصة بالقيود وشرط عدم السلبية، ويبقى هنا ان نحدد الحل الأمثل من بين تلك الحلول، وهذا وفق طريقة زوايا منطقة الحلول الممكنة وطريقة انسحاب دالة الهدف، ومن اجل اتباع الطريقة الأولى، نقوم في البداية بتحديد زوايا منطقة الحلول الممكنة والاحداثيات الخاصة بكل نقطة منها.

يوضح الرسم بأن منطقة الحلول الممكنة تتضمن على أربع زوايا، ممثلة بيانيا بالنقاط A (0,0)، B (0, 20)، C وD (25, 0). وبالتالي فان النقطة C لم نستطع استخراج احداثياتها مباشرة من المنحنى، نظرا لصعوبة الحصول عليها بدقة؛ من اجل هذا سوف نحاول إيجاد احداثياتها حسابيا، من خلال تشكيل جملة معادلتين، تضم معادلة القيدين (2) و (3)، ونؤكد هنا على المعادلة وليس المتراجحة، ويرجع السبب في اختيار هذين القيدين، هو ان النقطة C قد نشأت بيانيا من تقاطع الخطين المستقيمين الممثلين لهذين القيدين. وعليه يمكن كتابة جملة المعادلتين كما يلي:

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 = 80 \\ X_1 + X_2 = 25 \end{cases}$$

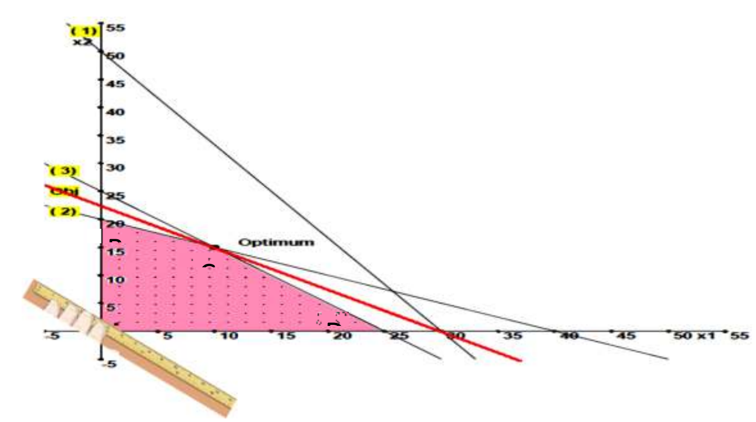
باستخدام الطرق المعروفة في حل جملة المعادلتين (كل طالب يتبع الطريقة التي يتقنها في حل جملة معادلتين)، نحاول التوصل الى حل لهذه الجملة، حيث نجد أن $X_1 = 10$ و $X_2 = 15$، وعليه يمكن اجمال الزوايا الأربع لمنطقة الحلول الممكنة في الجدول التالي:

قيمة متغير الهدف عندها	احداثياتها	الزاوية
$Z_A = 0$	(0 , 0)	A
$Z_B = 800$	(0 , 20)	B
$Z_C = 900$	(10 , 15)	C
$Z_D = 750$	(25 , 0)	D

بما ان الهدف هو من نوع التعظيم، فان الحل الأمثل يوافق الزاوية التي تعطي أكبر قيمة للهدف، وبالرجوع الى قيم الهدف الموجودة في الجدول السابق نجد ان النقطة C هي من تملك أكبر قيمة مقارنة ببقية الزوايا، وعليه نقول بأن النقطة C هي الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي.

يمكن التوصل الى الحل الأمثل للبرنامج الخطي، من خلال تطبيق طريقة انسحاب دالة الهدف، ولهذا نقوم بجعل دالة الهدف مساوية للصفر، ثم نرسم الخط المستقيم الخاص بها (الخط الممثل في الشكل باللون الأحمر)، بعدها نضع المسطرة فوق خط دالة الهدف، ونحركها باتجاه منطقة الحلول الممكنة، والحل الأمثل يكون عند آخر نقطة من منطقة الحلول الممكنة تمر بها المسطرة، والشكل التالي يوضح كل تلك المراحل.

$30X_1 + 40X_2 = 0$



	النقطة 1 ↓	النقطة 2 ↓
X_1	0	20
X_2	0	15−

يوضح الشكل السابق ان نقطة الحل الأمثل هي النقطة C، وعندها تكون قيمة $X_1 = 10$ و $X_2 = 15$، وقيمة $Z = 900$.

III. الحل البياني لبرنامج خطي من نوع التدنية

مثال 02-02: حل بيانيا البرنامج الخطي التالي.

$$\text{Min: } W = 3Y_1 + 2Y_2$$

$$S/c \quad \begin{cases} 4Y_1 + 6Y_2 \geq 12 \\ 4Y_1 + 2Y_2 \geq 8 \end{cases}$$

$$Y_1 \geq 0; \quad Y_2 \geq 0$$

ان الحل البياني للبرامج الخطية من نوع التدنية لا يختلف في مراحله عن المراحل المتبعة لحل البرامج الخطية من نوع التعظيم، وانما يكون الاختلاف الوحيد عند تحديد الحل الأمثل، من اجل هذا سنحاول فيما يلي اتباع نفس مراحل الحل السابقة؛

1. تشكيل المعلم المتعاد من اجل تمثيل الحل البياني
2. تمثيل القيود

من اجل تمثيل القيود بيانيا (في شكل متراجحات)، سنقوم بكتابتها على شكل معادلات، ثم نحدد المجال الصحيح لكل متراجحة منها، وذلك كما يلي:

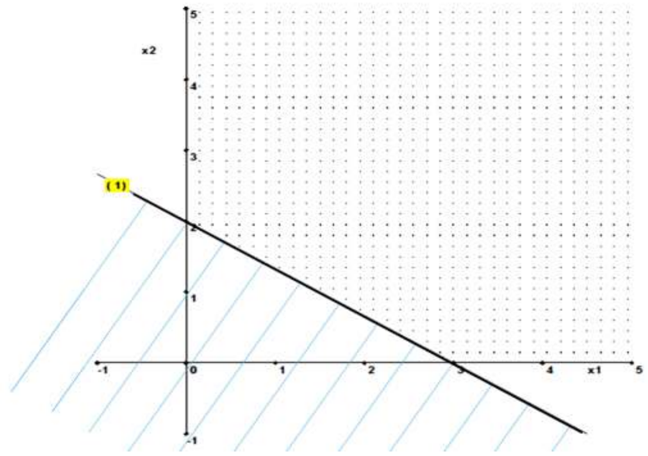
$$S/c \quad \begin{cases} 4Y_1 + 6Y_2 \geq 12 & \text{يصبح كما يلي} \rightarrow & 4Y_1 + 6Y_2 = 12 \ldots (1) \\ 4Y_1 + 2Y_2 \geq 8 & \text{يصبح كما يلي} \rightarrow & 4Y_1 + 2Y_2 = 8 \ldots (2) \end{cases}$$

بعد هذا نقوم بتمثيل كل واحدة من المعادلات السابقة، حيث سنستعين في هذه الخطوة بالجدول المساعد، وذلك كما يلي:

(1)

التمثيل البياني للقيد (1) $4Y_1 + 6Y_2 = 12$

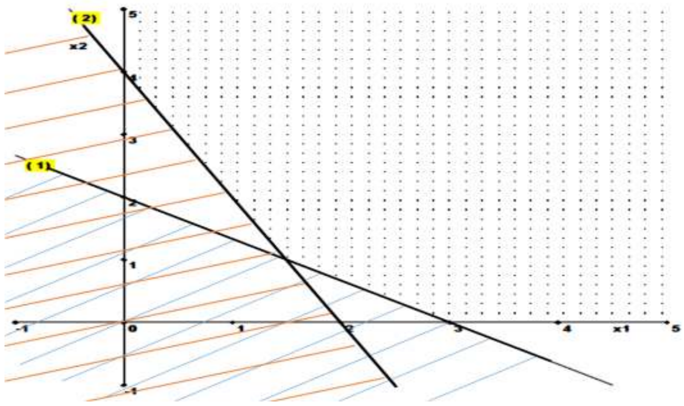
	النقطة 1 ↓	النقطة 2 ↓
Y_1	0	3
Y_2	2	0



بنفس طريقة القيد الأول سيتم تمثيل القيد الثاني، وذلك كما يوضحه البيان التالي:

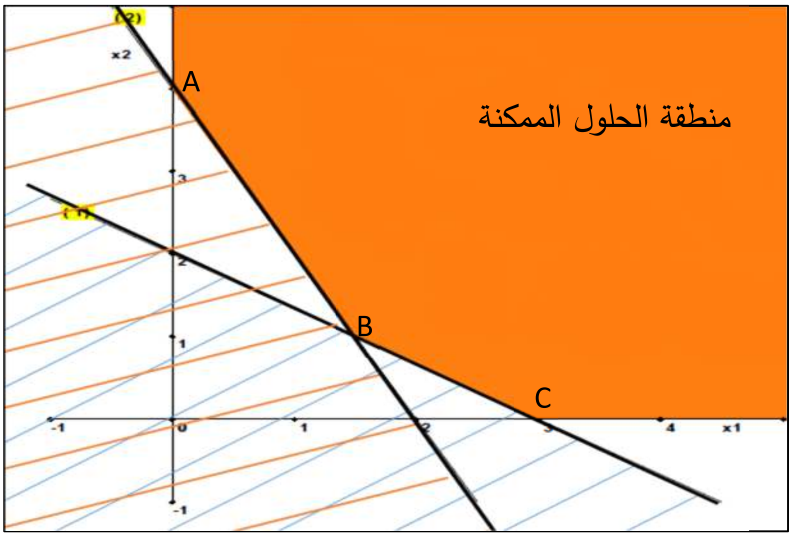
التمثيل البياني للقيد (2) $4Y_1 + 2Y_2 = 8$

	النقطة 1 ↓	النقطة 2 ↓
Y_1	0	3
Y_2	2	0



3. تحديد منطقة الحلول الممكنة

بعد تمثيل شرط عدم سلبية المتغيرات في البيان، يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة وفق الشكل التالي:



4. استخراج الحل الأمثل

يوضح الرسم بأن منطقة الحلول الممكنة تتضمن على ثلاث زوايا، ممثلة بيانيا بالنقاط A (0, 4)، B و C (3, 0). وبالتالي فان النقطة B لم نستطع استخراج احداثياتها مباشرة من المنحنى، نظرا لصعوبة الحصول عليها بدقة؛ من اجل هذا سوف نحاول إيجاد احداثياتها حسابيا، من خلال تشكيل جملة معادلتين، تضم معادلة القيدين (1) و (2)، وعليه يمكن كتابة جملة المعادلتين كما يلي:

$$\begin{cases} 4Y_1 + 6Y_2 = 12 \\ 4Y_1 + 2Y_2 = 8 \end{cases}$$

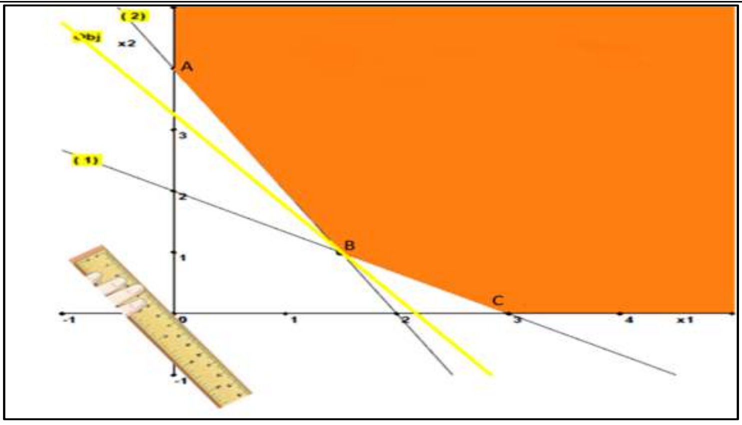
باستخدام الطرق المعروفة في حل جملة المعادلتين، نحاول التوصل الى حل لهذه الجملة، حيث نجد أن $Y_1 = 1{,}5$ و $Y_2 = 1$، وعليه يمكن اجمال الزوايا الأربع لمنطقة الحلول الممكنة في الجدول التالي:

قيمة متغير الهدف عندها	احداثياتها	الزاوية
$Z_A = 8$	(0 , 4)	A
$Z_B = 6{,}5$	(1,5 , 1)	B
$Z_C = 9$	(3 , 0)	C

بما ان الهدف هو من نوع التدنية، فان الحل الأمثل يوافق الزاوية التي تعطي أقل قيمة للهدف، وبالرجوع الى قيم الهدف الموجودة في الجدول السابق نجد ان النقطة B هي من تملك أقل قيمة مقارنة ببقية الزوايا، وعليه نقول بأن النقطة B هي الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي.

يمكن التوصل الى الحل الأمثل للبرنامج الخطي، من خلال تطبيق طريقة انسحاب دالة الهدف، ولهذا نقوم بجعل دالة الهدف مساوية للصفر، ثم نرسم الخط المستقيم الخاص بها (الخط الممثل في الشكل باللون الأصفر)، بعدها نضع المسطرة فوق خط دالة الهدف، ونحركها باتجاه منطقة الحلول الممكنة، والحل الأمثل يكون عند أول نقطة من منطقة الحلول الممكنة تمر بها المسطرة، والشكل التالي يوضح كل تلك المراحل.

$$3Y_1 + 2Y_2 = 0$$



	النقطة 1 ↓	النقطة 2 ↓
Y_1	0	3
Y_2	0	2−

يوضح الشكل السابق ان نقطة الحل الأمثل هي النقطة C، وعندها تكون قيمة $Y_1 = 10$ و$Y_2 = 15$، وقيمة $W = 6,5$.

IV. حالات خاصة في الحل البياني للبرامج الخطية

يخضع حل هذا النوع من البرامج الخطية الى نفس المراحل السابقة للحل البياني، غير أن خصوصيتها تكمن في اختيار الحل الأمثل، ولهذا يجب على الطالب الانتباه كثيرا عند الحكم على قيم الحل الأمثل، خاصة إذا تضمن البرنامج الخطي على عدد كبير من القيود.

1. حالة برنامج خطي لا يقبل حلول

نقول عن برنامج خطي انه لا يقبل حلولا، إذا كانت منطقة الحلول الممكنة له عبارة عن مجموعة خالية، وتحدث هذه الحالة عندما تتعارض قيود البرنامج الخطي، أي يؤدي التمثيل البياني لكل قيد الى إلغاء للمجال الصحيح للقيود الأخرى، مما ينتج عنه شطب كل المنحنى، ولا تبقى أي نقطة منه دون شطب. وفيما يلي مثال عن برنامج خطي لا يقبل حلولا.

مثال 02-03:

حل بيانيا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max: } Z = 20X_1 + 25X_2$$

$$S/c \quad \begin{cases} 6X_1 + 3X_2 \leq 30 \\ X_1 \geq 80 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

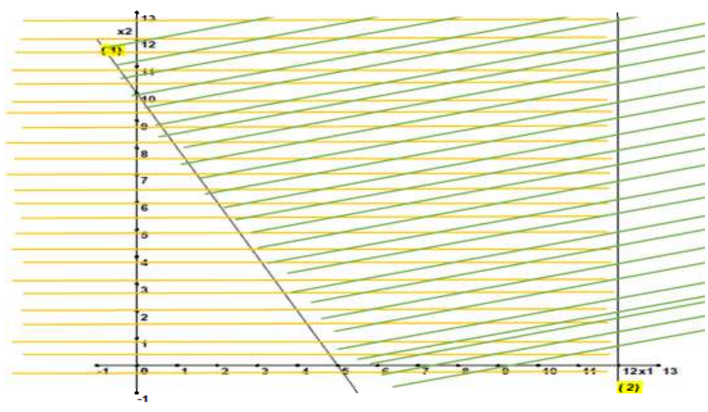
حل المثال 02-03:

يلخص الشكل التالي كل المراحل اللازمة لحل البرنامج الخطي.

جدول القيد الأول

	النقطة 1 ↓	النقطة 2 ↓
X_1	0	5
X_2	10	0

القيد الثاني يحتوي على متغير قرار وحيد ولهذا لا يحتاج تمثيله الى جدول مساعد، وانما نكتفي برسم خط عمودي عند قيمة $X_1 = 12$



نلاحظ من الشكل السابق ان كل المنحنى تم شطبه، وبالتالي لم تبقى أي نقطة غير مشطوبة، ولهذا نستنتج عدم وجود منطقة للحلول الممكنة. وبالتالي فان البرنامج الخطي لا يقبل أي حلول.

2. حالة برنامج خطي يقبل حلول متعددة

يكون برنامج خطي يقبل حلول متعددة إذا تبين من الحل البياني له وجود عدة نقاط (في منطقة الحلول الممكنة)، تمثل الحل الأمثل لهذا البرنامج الخطي، حيث انه عند تطبيق طريقة زوايا منطقة الحلول الممكنة، نجد ان هناك أكثر من نقطة واحدة تحقق القيمة المثلى لدالة الهدف، أي لها نفس القيمة الكبرى في حالة هدف التعظيم، او لديها نفس القيمة الدنيا في حالة هدف التدنية. من جهة أخرى يمكن ان تظهر حالة تعدد الحلول المثلى للبرنامج الخطي عند تطبيق طريقة انسحاب دالة الهدف، إذا انطبق الانسحاب الخاص بدالة الهدف، عند قيمه المثلى على مجموعة من النقاط، ويتحقق هذا إذا توازت دالة الهدف مع القيد الذي يحمل الحل الأمثل، ونتأكد من هذا رياضيا، إذا وجدنا عدد صحيح عند ضربه في معاملات ذلك القيد تصبح مساوية لمعاملات نفس المتغيرات في دالة الهدف. وفيما يلي مثال على برنامج خطي يقبل حلول متعددة.

مثال 02-04:

حل بيانيا البرنامج الخطي التالي:

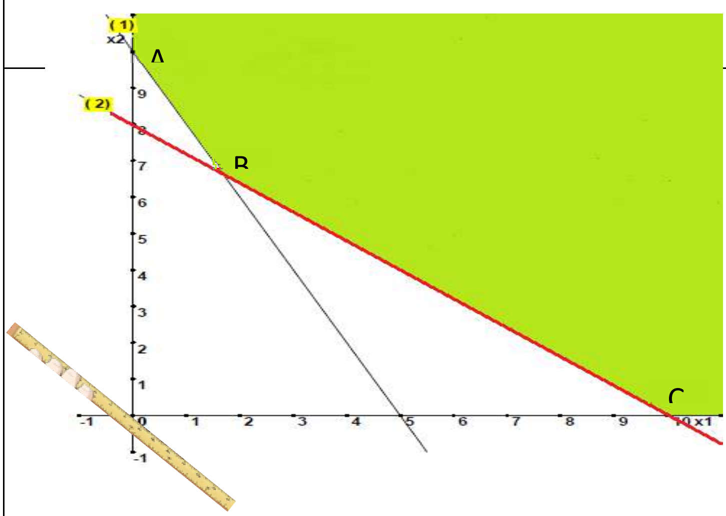
$$\text{Min: } Z = 20X_1 + 25X_2$$

$$S/c\quad \begin{cases} 6X_1 + 3X_2 \geq 30 \\ 4X_1 + 5X_2 \geq 40 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0;\quad X_2 \geq 0$$

حل المثال 02-04:

يلخص الشكل التالي كل المراحل اللازمة لحل البرنامج الخطي.



القيد : $6X_1 + 3X_2 = 30$		
	النقطة 1 ↓	النقطة 2 ↓
X_1	0	5
X_2	10	0

القيد: $4X_1 + 5X_2 = 40$		
	النقطة 1 ↓	النقطة 2 ↓
X_1	0	10
X_2	8	0

نلاحظ من الشكل السابق ان منطقة الحلول الممكنة للبرنامج السابق ممثلة في المنطقة الملونة باللون الأخضر، وتتضمن هذه المنطقة على ثلاث زوايا هي ممثلة بيانيا بالنقاط A $(0, 10)$، B و C $(10, 0)$. وبالتالي فان النقطة B لم نستطع استخراج احداثياتها مباشرة من المنحنى، نظرا لصعوبة الحصول عليها بدقة؛ من اجل هذا سوف نحاول إيجاد احداثياتها حسابيا، من خلال تشكيل جملة معادلتين، تضم معادلة القيدين (1) و (2)، وعليه يمكن كتابة جملة المعادلتين كما يلي:

$$\begin{cases} 6X_1 + 3X_2 = 30 \\ 4X_1 + 5X_2 = 40 \end{cases}$$

باستخدام الطرق المعروفة في حل جملة المعادلتين، نحاول التوصل الى حل لهذه الجملة، حيث نجد أن $X_1 = \frac{5}{3}$ و $X_2 = \frac{20}{3}$، وعليه يمكن اجمال الزوايا الأربع لمنطقة الحلول الممكنة في الجدول التالي:

قيمة متغير الهدف عندها	احداثياتها	الزاوية
$Z_A = 250$	$(0\ ,\ 10)$	A
$Z_B = 200$	$(\frac{5}{3}, \frac{20}{3})$	B
$Z_C = 200$	$(10\ ,\ 0)$	C

بما ان الهدف هو من نوع التدنية، فان الحل الأمثل يوافق الزاوية التي تعطي أقل قيمة للهدف، وبالرجوع الى قيم الهدف الموجودة في الجدول السابق نجد ان كل من النقطتين B و C لديهما أدنى قيمة، مما يجعلهما يمثلان مع الحل الأمثل للبرنامج الخطي، وهذا ما يعني إمكانية وجود حلول متعددة لهذا البرنامج الخطي، غير أن طريقة زوايا منطقة الحلول الممكنة لا تستطيع وحدها تحديد مجال الحلول المثلى، وهذا من بين حدود هذه الطريقة، ولهذا يستحسن عند هذا الحالة من الطالب ان يستعين بطريقة انسحاب دالة الهدف، حيث يظهر الشكل السابق ان دالة الهدف (ممثلة بيانيا بالخط المستقيم الأحمر)، تنطبق على القطعة المستقيمة [B,C]، عند أول ملامسة له لمنطقة الحلول الممكنة، ولهذا نقول بأن البرنامج الخطي يقبل حلول متعددة ممثلة بيانيا في القطعة المستقيمة [B,C]،

3. حالة برنامج خطي يقبل حل غير محدد

تعني هذه الحالة أن البرنامج الخطي يمتلك عدد كبير من الحلول الممكنة، غير أنه يصعب إيجاد الحل الأمثل من بين تلك الحلول، على اعتبار ان أي حل يتم اختياره، يوجد هناك حلول أحسن منه؛ تتحقق هذه الحالة في الغالب عندما تكون منطقة الحلول الممكنة لبرنامج خطي ما غير محدودة من الأعلى، بينما يكون هدف البرنامج هو من نوع التعظيم، وبالتالي في كل مرة نحرك فيها خط دالة الهدف (عن طريق تحريك المسطرة بشكل موازٍ له) باتجاه منطقة الحلول الممكنة، فان نقطة الحل الأمثل تكون غير محددة. وفيما يلي مثال عن برنامج خطي له حل غير محدد.

مثال 02-05:

حل بيانيا البرنامج الخطي التالي:

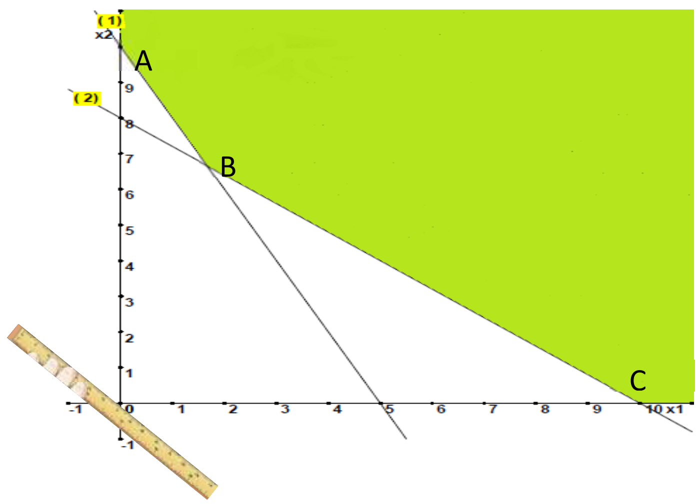
$$\text{Max: } Z = 20X_1 + 25X_2$$

$$S/c \quad \begin{cases} 6X_1 + 3X_2 \geq 30 \\ 4X_1 + 5X_2 \geq 40 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0; \quad X_2 \geq 0$$

حل المثال 02-05:

يلخص الشكل التالي كل المراحل اللازمة لحل البرنامج الخطي.



القيد: $6X_1 + 3X_2 = 30$		
	النقطة 1 ↓	النقطة 2 ↓
X_1	0	5
X_2	10	0

القيد: $4X_1 + 5X_2 = 40$		
	النقطة 1 ↓	النقطة 2 ↓
X_1	0	10
X_2	8	0

نلاحظ من الشكل السابق ان منطقة الحلول الممكنة للبرنامج السابق ممثلة في المنطقة الملونة باللون الأخضر، وتتضمن هذه المنطقة على ثلاث زوايا هي ممثلة بيانيا بالنقاط A $(0, 10)$، B $(\frac{20}{3}, \frac{5}{3})$ وC $(10, 0)$. وهي النقاط التي تم الحديث عنها في المثال السابق.

وعليه يمكن اجمال الزوايا الأربع لمنطقة الحلول الممكنة في الجدول التالي:

قيمة متغير الهدف عندها	احداثياتها	الزاوية
$Z_A = 250$	$(0 , 10)$	A
$Z_B = 200$	$(\frac{5}{3}, \frac{20}{3})$	B
$Z_C = 200$	$(10 , 0)$	C

لو تم الاعتماد على طريقة زوايا منطقة الحلول الممكنة في اختيار الحل الأمثل، فان النقطة A تكون هي الحل الأمثل لهذا البرنامج لأنها توفر أكبر قيمة لدالة الهدف الذي هو من نوع التعظيم، وهذا غير صحيح، لأن هناك العديد من النقاط الأخرى في المنطقة الحلول الممكنة تعطي مستويات لدالة الهدف، أحسن من المستوى الخاص بالنقطة A. وهذا من النقائص التي تميز طريقة زوايا منطقة الحلول الممكنة في اختيار الحل الأمثل. لكن إذا اعتمدنا على طريقة انسحاب دالة الهدف، وسحبنا دالة الهدف باتجاه منطقة الحلول الممكنة بحثا عن اخر نقطة تلامسها دالة الهدف؛ فإننا نجد ان تلك النقطة التي نبحث عنها هي غير محددة، مما يجعلنا نستنتج ان البرنامج الخطي له حل غير محدد.

V. خلاصة

1. الحل البياني لا يكون صـالحا الا في حالة البرامج الخطية التي تتضـمن على متغيري قرار فقط، اما إذا زاد عدد متغيرات القرار عن 2 في برنامج خطي ما فانه لا يمكن تطبيق الحل البياني عليه؛
2. يتم تطبيق الحل البياني عبر مجموعة من الخطوات، تتمثل أهمها فيما يلي:
   - نرسم معلم متعامد، يضم محورين متعامدين، نضع على المحور الأفقي قيم المتغير الأول X_1، ونضع على المحور العمودي قيم المتغير الثاني X_2 ؛
   - نمثل القيود على المعلم السابق، ويتطلب تمثيل القيود تحويلها على شكل معادلات خط مستقيم، ثم نقوم بتمثيل تلك المعادلات، ثم نشطب المجال الخاطئ الذي لا يحقق شرط القيد؛
   - اذا تضمن احد القيود على متغير قرار واحد فقط، فان التمثيل البياني لذلك القيد يكون عبارة عن خط مستقيم عمودي، اذا كان ذلك المتغير هو X_1، اما اذا كان ذلك المتغير هو X_2، فان التمثيل البياني لذلك القيد يكون عبارة عن خط مستقيم أفقي؛
   - تحديد منطقة الحلول الممكنة: هي المنطقة التي لم يتم شطبها في الرسم من قبل أي قيد؛
   - تحديد الحل الأمثل: ويتم ذلك بطريقتين هما:
     - طريقة زوايا منطقة الحلول الممكنة؛
     - طريقة انسحاب دالة الهدف.
3. الحالات الخاصة في الحل البياني للبرامج الخطية:
   - حالة برنامج خطي لا يقبل حلول؛
   - حالة برنامج خطي يقبل حلول متعددة؛
   - حالة برنامج خطي يقبل حل غير محدد.