تمهيد

تعتبر البرمجة الخطية من ابسط أنواع البرمجة الرياضية، على اعتبار سهولة العمليات الحسابية التي تتضمن عليها، ومن اهم فوائد اعتماد هذا النوع من الأساليب الرياضية هو محاولة التعبير عن الواقع المدروس بشكل بسيط، ومن ثم التوصل الى حلول لتلك الظواهر المدروسة، وترتبط فعالية هذا النوع من النماذج بمدى توفر فرضياتها على الظاهرة المدروسة، من جهة أخرى تشكل البرمجة الخطية المنطلق لتطبيق نماذج رياضية أخرى أكثر تعقيدا، وأكثر توافقا مع الواقع المدروس. ومن أشهر الباحثين الذين عملوا على تطبيق البرمجة الخطية، نجد كل من G. B. Dantzig وكذلك T. C. Coopmans[1].

I. مفهوم البرمجة الخطية

تعتبر البرمجة الخطية صياغة رياضية لمشكلة معينة، تعتمد هذه الصياغة على المعادلات الخطية، وعند التركيز على مصطلح البرمجة الخطية، نجده مركبا من جزئين هما: برمجة وخطية، حيث ترمز البرمجة الى عملية التخطيط للمشكلة المدروسة، اما الخطية فتعني ان المتغيرات المستخدمة في البرنامج الخطي تكون من الدرجة الأولى (أي ان أساس كل متغير مستخدم في البرنامج الخطي هو 1).

II. فرضيات البرمجة الخطية

على الرغم من بساطة البرمجة الخطية وسهولة استخدامها، غير ان تطبيقها يبقى مشروطا بضرورة توفر فرضياتها، وفي حالة غياب احدى تلك الفرضيات، فان يتوجب إضافة تعديلات على البرنامج الخطي حتى يصبحا قابلا للتطبيق، وتتمثل فرضيات البرمجة الخطية فيما يلي[2]:

1. الخطية Linearity:

وهو اهم افتراضات هذا النموذج، وتعني ان العلاقة بين المتغيرات المستخدمة في النموذج هي علاقة خطية، أي ان كل المتغيرات هي من الدرجة الأولى؛

[1] حسن ياسين طعمه، مروان محمد النسور وايمان حسين حنوش، **بحوث العمليات: نماذج وتطبيقات**، الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2009. ص 37.

[2] محمد الطراونة وسليمان عبيدات، مقدمة في بحوث العمليات، دار زهران للنشر والتوزيع، الأردن، 2009. ص 79.

2. التأكد او الأكادة certainty:

نظرا لكون البرمجة الخطية وتنفيذها لا يكونان في الغالب في نفس الوقت، كما ان النتائج المترتبة على الحلول المقترحة من البرمجة الخطية قد تتأثر بعوامل أخرى مستقبلية، ولهذا فان الواقع يتطلب اخذ ظروف عدم الأكادة بعين الاعتبار، مما قد يدفع المبرمج الى استخدام الاحتمالات في عملية البرمجة. ولكن من اجل تبسيط الأمور في البداية والقدرة على تطبيق البرمجة الخطية، فان هذا الأخيرة تفترض ان المستقبل هو أكيد، أي ان معاملات دالة الهدف والقيود سوف تبقى ثابتة خلال فترة تخطيط وتنفيذ البرنامج الخطي.

3. التناسبية proportionality:

يقصد بها ان كل قيمة لمتغير الهدف تقابلها قيمة واحدة للمتغيرات المستقلة، فمثلا إذا كانت 3 وحدات من المواد الأولية تنتج وحدة واحدة من المنتجات، فان انتاج 4 وحدات من المنتوج يتطلب 12 وحدة من المواد الأولية ($3\times4=12$)؛

4. الإضافية Additivity

ويقصد به ان الأثر الكلي الناتج عن تغير مجموعة من العوامل يساوي الى مجموع الأثر الفردي لكل عامل من تلك العوامل، مما يعني عدم وجود تداخل بين كل عامل من تلك العوامل، وقد نجد في الواقع بعض الحالات تي يكون فيها تداخل بين العوامل او ما يعرف بأثر التعاضد (Synergistic Effect)، اين يصبح الأثر الكلي لمجموعة من العوامل أكبر من مجموع الأثر الفردي لها؛

5. قابلية القسمة او التجزئة Divisibility

وتعني ان المتغيرات المستخدمة في البرمجة الخطية كلها تقبل التجزئة، أي انها تقبل قيما كسرية او اعداد عشرية، وعلى الرغم من انه توجد العديد من المتغيرات التي لا تقبل التجزئة على ارض الواقع، مثل عدد العمال او عدد الآلات، حيث انه لا يمكن توظيف 3,2 عامل، او تشغيل 2,7 آلة، غير انه ومن اجل ان نستطيع استخدامها في البرمجة الخطية فإننا نفترض إمكانية الحصول على هذا العدد من العوامل؛ من جهة أخرى وحتى تكون البرمجة الرياضية أقرب الى الواقع، يمكن اللجوء الى البرمجة بالأعداد الصحيحة لمثل هذا النوع من العوامل.

6. عدم سلبية المتغيرات Non-negativity

بما ان اغلب العوامل الاقتصادية المادية المستخدمة في البرمجة الخطية، خاصة ما تعلق منها بعوامل الإنتاج، لا تقبل قيما سالبة، ولهذا تفترض البرمجة الخطية عدم سلبية تلك المتغيرات، حيث انه من غير المعقول ان نستعمل (−5) كغ من المواد الأولية، او ان نشغل الآلات لعدد سالب من الساعات.

III. صياغة نموذج البرمجة الخطية

تتضمن البرامج الخطية على صياغة محددة من حيث ترتيب العناصر وطريقة كتابتهم رياضيا، ويؤدي غياب أي عنصر من تلك العناصر الى عدم صلاحية النموذج الخطي ككل، وعموما يتضمن البرنامج الخطي على ثلاثة عناصر رئيسية هي:

1. دالة الهدف

هي الدالة التي تعبر عن الهدف الذي نسعى لتحقيقه، ويشترط في البرامج الخطية ان يتضمن البرنامج على هدف واحد فقط، أي ان لكل برنامج خطي هدف وحيد، وفي حالة وجود عدة اهداف يسعى متخذ القرار الى تحقيقها، فانه يتوجب اعداد برنامج خطي لكل هدف؛ ونصادف في مسائل البرمجة الخطية نوعين من الأهداف، هدف التعظيم Max، ويخص المتغيرات التي نسعى الى إيجاد اعلى مستوى ممكن لها، وهدف التدنية Min، وهذا بالنسبة للمتغيرات التي نسعى الى تدنيتها الى أدنى قيمة لها.

تأخذ الصياغة الرياضية لدالة الهدف عموما الشكل التالي:

في حالة التعظيم : $Max: Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$

في حالة التدنية: $Min: Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$

حيث ان الرموز المستخدمة في المعادلتين تمثل ما يلي:

Max : تعني تعظيم

Min : تعني تدنية؛

Z: يمثل متغير الهدف؛

C_n : يمثل معامل دالة الهدف للمتغير n؛

X_n: هو عبارة عن متغير مستقل يؤثر على هدف المسألة.

2. دوال القيود

القيود هي عبارة عن مجموعة الموارد المحدودة، سواء من الأعلى أي لها حد اعلى لا يمكن ان تكون أكبر منه، او محدودة من الأسفل أي لها قيمة دنيا لا يمكن ان تكون أدنى منها، كما انها تعيق تحقيق الهدف، أي لو لم تكون تلك العوامل محدودة لكانت قيمة الهدف عند مستوياتها الأمثل، أي هناك صفتين رئيسيتين معا في المورد هما: **ان يكون محدودا وكذلك ان يعيق تحقيق هدف المسألة،** من جهة أخرى يمكن ان تكون القيود في شكل التزامات على الإنتاج تكون المؤسسة مجبرة على احترامها، او قيود منطقية يجب ذكرها في البرنامج الخطي كأن نقول على سبيل المثال ان نقطة طالب في مقياس ما لا يمكن ان تتجاوز 20/20. ويتم التعبير عن القيود في شكل متراجحات وأحيانا في شكل معادلات. حيث يتضمن الطرف الأيسر لتلك القيود على المتغيرات المستقلة المستخدمة في دالة الهدف مضروبة في معاملات خاصة بها، اما الطرف الأيمن لها فيتضمن على القيمة الحدية لذلك القيد. ويتم التعبير رياضيا على القيود وفق الشكل التالي:

$$S/c \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \leq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \leq b_m \end{cases}$$

حيث أن:

a_{mn}: تمثل معامل المتغير n في القيد m؛

b_m: تمثل القيمة الحدية للمورد m.

3. شرط عدم السلبية

والذي يعني بان متغيرات القرار (المتغيرات المستقلة) هي متغيرات لا تقبل قيم سالبة، ويتم التعبير على شرط عدم السلبية كما يلي.

$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0; \dots\dots\dots\dots X_n \geq 0$$

او $$X_1, X_2, \dots\dots\dots\dots X_n \geq 0$$

ان عملية صياغة البرنامج الخطي، لا تقتصر فقط على تحديد العناصر المكونة له فقط، وانما يجب تجميع تلك العناصر في نموذج رياضي واحد، حتى نتمكن من إيجاد حلول له، وعموما يكون الشكل النهائي للبرنامج الخطي كما يلي:

$$\underset{Min}{Max}: Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

$$S/c \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n (\leq; =; \geq) b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n (\leq; =; \geq) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n (\leq; =; \geq) b_m \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0; \dots\dots\dots\dots X_n \geq 0$$

من اجل توضيح أكثر لكيفية صياغة البرنامج الخطي، سنحاول فيما يلي عرض بعض الأمثلة عن برنامج خطي في حالة التعظيم وبرنامج خطي في حالة التدنية.

4. صياغة برنامج خطي لمسألة من نوع التعظيم

مثال 01-01:

ترغب شـــركة لإنتاج العطور في انتاج نوعين من العطور هما A و B ، يحتاج كل نوع منهما الى خلط ثلاثة انواع من المواد الاولية هي (M_1,M_2, M_3)؛ فاذا علمت ان الوحدة الواحدة من المنتج A تحتاج الى خلط 5 وحدات من المادة الأولية M_1 و 2 وحدات من المادة الأولية M_2 و وحدة واحدة من المادة الأولية M_3، و تحتاج الوحدة الواحدة من المنتج B الى خلط 3 وحدات من المادة الأولية M_1 و 4 وحدات من المادة الأولية M_2 و وحدة واحدة من المادة الأولية M_3، فاذا علمت ان تكلفة العطور تتمثل اساسا في تكلفة المواد المستخدمة في اعدادها، و أن مخزون الشركة من المادة الأولية M_1 يقدر ب 150 وحدة و تكلفة الحصـــول على الوحدة الواحدة منها هو 4 دج، بينما يقدر مخزون الشـــركة من المادة الأولية M_2 ب 80 وحدة و تكلفة الحصـــول على الوحدة الواحدة منها هو 3 دج؛ ومخزون الشركة من المادة الأولية M_3 يقدر ب 25 وحدة و تكلفة الحصول على الوحدة الواحدة منها هو 4 دج، تبيع الشركة المنتج A ب 30 دج للوحدة و تبيع المنتج B ب 40 دج للوحدة؛

المطلوب: تحديد البرنامج الخطي الذي يسمح للشركة بتحقيق أكبر إيراد (رقم اعمال) ممكن؛

حل المثال 01-01:

ان الصياغة الرياضية للمسألة تعني تحويل المسألة من تلك الفقرة الطويلة، الى نموذج رياضي مختصر؛ من اجل صياغة البرنامج الخطي للمسألة، فان الطالب او الشخص المسؤول عن البرمجة مطالب بتحديد معالم البرنامج، قبل مباشـرة عملية صـياغة البرنامج، والمقصـود بمعالم البرنامج هو تحديد المتغيرات المستقلة المستخدمة في المسألة، وكذلك عناصر البرنامج الخطي التي تم عرضها من قبل؛

1.4 صياغة دالة الهدف وتحديد المتغيرات المفسرة

اول عنصـــر يتم البحث عنه في البداية هو هدف المســـألة، وعادة يتم ذكر الهدف داخل نص المســـألة، كأن يرد مثلا:" تهدف المؤســـســـة الى ....."، كما يمكن ان نجده في المطلوب، مثل ما تم

عرضــه في هذه المســألة، وبالرجوع الى مثالنا نجد ان هدف المؤســسـة يتمثل في تعظيم إيراداتها، أي تعظيم رقم الاعمال الذي تحصــل عليه؛ والمشــكلة هنا تكمن في كيفية تحويل هذه العبارة الى معادلة رياضية؟، من اجل القيام سوف نكتب في البداية معادلة ايرادات المؤسسة.

ايراد المؤسسة = ايراد المنتوج A+ ايراد المنتوج B

= ســعر بيع الوحدة من المنتوج A × الكمية المباعة من A+ ســعر بيع الوحدة من المنتوج B × الكمية المباعة من B

$$X_1 \,.\, 40 = \qquad + X_2 \,.\, 30$$

وتشير X_1 و X_2 إلى الكمية المباعة من المنتوجين A وB على التوالي.

من جهة أخرى يجب ان نتبه الى ان دالة الهدف يجب ان توضح نوع الهدف الذي ندرسه، يعني تعظيم او تدنية، حيث انه في هذا المثال كان هدف المسألة هو تعظيم ايراد المؤسسة، ولهذا فان دالة الهدف يمكن صياغتها على الشكل الرياضي التالي:

$$Max: Z = 40\,X_1 + 30X_2$$

2.4 تشكيل دوال القيود

تعد عملية تحديد القيود وصياغتها رياضيا أيضا من أصعب الخطوات في صياغة النموذج الخطي، حيث ان الطالب تجده عاجزا على تحديد القيد؛ وبالرجوع الى مفهوم القيود نجدها عبارة عن كل مورد محدود يعيق تحقيق هدف المسألة،

وعليه فان هذه المسألة تتضمن على ثلاثة قيود، كل قيد منها يعبر على ان الكمية المستخدمة من احدى المواد الأولية هي محدودة من الأعلى، أي:

- الكمية المستخدمة من المادة الأولية $M_1 \leq 150$ وحدة؛
- الكمية المستخدمة من المادة الأولية $M_2 \leq 80$ وحدة؛
- الكمية المستخدمة من المادة الأولية $M_3 \leq 25$ وحدة؛

ولقد ركزنا هنا على ان القيد هو مرتبط بالكمية المســـتخدمة وليس الكمية المتوفرة من المادة الأولية، ان هذه الأخيرة قيمتها ثابتة أي تســاوي 150 وحدة بالنســبة للمادة الأولية M_1 على ســبيل

المثال، اما الكمية المستخدمة فيمكن ان تكون مساوية لما هو متوفر ويمكن ان تكون اقل منه، ولهذا تكون إشارة القيد هي من نوع أقل من او يساوي أي $(\sum a_{mn}X_n \leq b_m)$. وفيما يلي الصياغة الرياضية للقيود السابقة.

- القيد الخاص بالمادة الأولية M_1

الكمية المستخدمة من المادة الأولية $M_1 \geq 150$ وحدة؛

الكمية المستخدمة من المادة الأولية M_1 = الكمية المستخدمة لإنتاج A+ الكمية المستخدمة لإنتاج B

= الكمية المستخدمة لإنتاج وحدة من A × الكمية المنتجة من A + الكمية المستخدمة لإنتاج وحدة من B × الكمية المنتجة من B

$$X_1 . 5 + X_2 . 3$$

وبالتالي فان القيد يصبح كما يلي:

$$5X_1 + 3X_2 \leq 150$$

بنفس الأسلوب الخاص بالقيد السابق سوف يتم صياغة بقية القيود.

- القيد الخاص بالمادة الأولية M_2

الكمية المستخدمة من المادة الأولية $M_2 \geq 80$ وحدة؛

الكمية المستخدمة من المادة الأولية M_2 = الكمية المستخدمة لإنتاج A+ الكمية المستخدمة لإنتاج B

= الكمية المستخدمة لإنتاج وحدة من A × الكمية المنتجة من A + الكمية المستخدمة لإنتاج وحدة من B × الكمية المنتجة من B

$$X_1 . 2 + X_2 . 4$$

وبالتالي فان القيد يصبح كما يلي:

$$2X_1 + 4X_2 \leq 80$$

- القيد الخاص بالمادة الأولية M_3

الكمية المستخدمة من المادة الأولية $M_3 \geq 25$ وحدة؛

الكمية المستخدمة من المادة الأولية M_3 = الكمية المستخدمة لإنتاج A+ الكمية المستخدمة لإنتاج B

= الكمية المستخدمة لإنتاج وحدة من A × الكمية المنتجة من A + الكمية المستخدمة لإنتاج وحدة من B × الكمية المنتجة من B

$$X_1 \cdot 1 = \qquad X_2 \cdot 1 +$$

وبالتالي فان القيد يصبح كما يلي:

$$X_1 + X_2 \leq 25$$

3.4 شرط عدم السلبية

بما أن X_1 و X_2 تعبر عن الكمية المباعة من المنتوجين A وB على التوالي، فانه من غير الممكن ان تكون قيمتيهما سالبتين، وعلى هذا الأساس نضع شرط عدم السلبية، وذلك كما يلي:

$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0$$

او

$$X_1, X_2 \geq 0$$

وفي الأخير يتم تجميع العناصر الثلاثة السابقة للبرنامج الخطي في برنامج واحد، وذلك كما يلي:

$$\text{Max : } Z = 30X_1 + 40X_2$$

$$S/c \begin{cases} 5X_1 + 3X_2 \leq 150 \\ 2X_1 + 4X_2 \leq 80 \\ X_1 + X_2 \leq 25 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0$$

4.4 صياغة المسألة في جدول

من بين الحلول التي يمكن الاستعانة بها لسهيل عملية فهم المسألة، وصياغة البرنامج الخطي بسهولة، هو ادراج جدول نلخص فيه معطيات المسألة، وبالرجوع الى مثالنا، يمكن تلخيص البيانات السابقة في الجدول التالي:

الجدول رقم 1: البيانات الخاصة بالمثال 01.

البيانات	المنتوج A X_1	المنتوج B X_2	القيم الحدية
سعر بيع الوحدة	30	40	
كمية المادة M_1	5	3	≥ 150
كمية المادة M_2	2	4	≥ 80
كمية المادة M_3	1	1	≥ 25

يتضـــح من بيانات الجدول ان العمود الأول مخصـــص لمعطيات وحدة واحدة من A، بينما يتضـــمن العمود الثاني على معطيات وحدة واحدة من B، كما ان السطر الأول يحتوي على بيانات دالة الهدف، اما السطر الثاني والثالث والرابع، يشكلون المعطيات الخاصة بالقيود.

IV. أنواع الصيغ للبرامج الخطية

هناك ثلاث صيغ مختلفة يمكن ان يأخذها البرنامج الخطي، وهي الصيغة العامة General form، الصيغة القانونية Canonical form والصيغة القياسية Standard form[3].

1. الصيغة العامة

يقصد بالصيغة العامة ان يتضمن البرنامج الخطي، مهما كان نوع هدفه (تعظيم او تدنية)، على قيود مختلفة الإشارة ($\leq$ و $\geq$ و =) داخل نفس البرنامج، وبالتالي فان إشارة القيود لا تكون متشابهة.
ويكون الشكل الرياضي لبرنامج خطي وفق الصيغة العامة كما يلي:

$$\underset{Min}{Max}: Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

[3] Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., & Sherali, H. D. (2008). *Linear programming and network flows*. John Wiley & Sons. P 05-06

$$S/c\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n(\leq;=;\geq)b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n(\leq;=;\geq)b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n(\leq;=;\geq)b_m \end{cases}$$
$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ \ldots\ldots\ldots\ldots X_n \geq 0$$

2. الصيغة القانونية Canonical Form

نقول عن برنامج خطي انه ذو صيغة قانونية، إذا توفرت فيه الشروط التالية[4]:

- القيود كلها لها إشارة $(\sum a_{mn}X_n \leq b_m)$، اذا كان الهدف من نوع التعظيم (Max)؛ او تكون إشارة كل القيود من نوع $(\sum a_{mn}X_n \geq b_m)$، اذا كان الهدف من نوع التدنية (Min)،
- المتغيرات المستقلة (متغيرات القرار) كلها غير سالبة (شرط عدم السلبية)[5].

وعليه يكون الشكل الرياضي للصيغة القانونية كما يلي:

$Max: Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$	$Min: Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$
$S/c\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n(\leq)b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n(\leq)b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n(\leq)b_m \end{cases}$	$S/c\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n(\geq)b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n(\geq)b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n(\geq)b_m \end{cases}$
$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ \ldots\ldots\ldots\ldots X_n \geq 0$	$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ \ldots\ldots\ldots\ldots X_n \geq 0$

3. الصيغة القياسية Standard form

نقول عن برنامج خطي انه ذو صيغة قانونية، إذا توفرت فيه الشروط التالية:

- القيود كلها تكون على شكل مساوات $(\sum a_{mn}X_n = b_m)$، سواء كان الهدف من نوع التعظيم (Max)؛ او من نوع التدنية (Min)؛

[4] Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., & Sherali, H. D. (2008). *Linear programming and network flows*. John Wiley & Sons.

[5] Lancia, Giuseppe, and Paolo Serafini. *Compact extended linear programming models*. Springer International Publishing, 2018. P 34.

- المتغيرات المستقلة (متغيرات القرار) كلها غير سالبة (شرط عدم السلبية).

وعليه يكون الشكل الرياضي للصيغة القياسية كما يلي:

$$\underset{Min}{Max}: Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

$$S/c \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n (=) b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n (=) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n (=) b_m \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots X_n \geq 0$$

ويتطلب الانتقال من صيغة الى أخرى اجراء بعض التحويلات التالية:

- **التحويلة 01:** من اجل تحويل دالة هدف من نوع تعظيم الى دالة هدف من نوع تدنية، نضرب معادلة الهدف في (-1)، أي:

$$Max: Z = C_1X_1 + \cdots + C_nX_n \Leftrightarrow Min: -Z = -C_1X_1 - \cdots - C_nX_n$$

- **التحويلة 02:** من اجل تحويل قيد إشارته $(\sum a_{mn}X_n \leq b_m)$ الى قيد اشارته $(\sum a_{mn}X_n \geq b_m)$، فإننا نضرب طرفي المتراجحة في (-1)، أي:

$$\sum a_{mn}X_n \leq b_m \Leftrightarrow \sum -a_{mn}X_n \geq -b_m$$

- **التحويلة 03:** يمكن تحويل معادلة من نوع $(\sum a_{mn}X_n = b_m)$ الى جملة متراجحتين متعاكستين في الاشارة، أي:

$$\sum a_{mn}X_n = b_m \Leftrightarrow \begin{cases} \sum a_{mn}X_n \leq b_m \\ \sum a_{mn}X_n \geq b_m \end{cases}$$

- **التحويلة 04:** إذا كان احد متغيرات القرار X_n غير محدد الإشارة، أي لا يحقق شرط عدم السلبية فانه يمكن التعبير عنه بالفرق بين متغيرين غير سالبين $(X_n^+ - X_n^-)$، حيث ان $X_n^+ \geq 0; \ X_x^- \geq 0$؛
- **التحويلة 05:** إذا كان أحد القيود على شكل قيمة مطلقة، فانه يمكن التعبير عنه وفق متراجحتين كما يلي:

$$\left|\sum a_{mn}X_n\right| \leq b_m \Leftrightarrow \begin{cases} \sum a_{mn}X_n \leq b_m \\ \sum -a_{mn}X_n \leq b_m \end{cases}$$

- **التحويلة 06:** يمكن تحويل أحد القيود من شكل متراجحة الى معادلة (مساواة) كما يلي:

➢ **التحويلة 06-01:** في حالة القيود من نوع $(\sum a_{mn}X_n \leq b_m)$، يتم تحويلها كما يلي:

$\sum a_{mn}X_n \leq b_m \Leftrightarrow \sum a_{mn}X_n + S_i = b_m$ حيث ان S_i يسمى بمتغير الفرق، وهو عبارة عن متغير إضافي يتم اضافته الى الطرف الايسر من القيود، ويحقق هذا المتغير شرط عدم السلبية و يتم إضافته الى دالة الهدف بمعامل يساوي "0"؛

➢ **التحويلة 06-02:** في حالة القيود من نوع $(\sum a_{mn}X_n \geq b_m)$، يتم تحويلها كما يلي:

$\sum a_{mn}X_n \geq b_m \Leftrightarrow \sum a_{mn}X_n - S_i + A_j = b_m$ حيث ان A_j يسمى بالمتغير الاصطناعي، وهو عبارة عن متغير وهمي يتم اضافته الى الطرف الايسر من القيود، ويحقق هذا المتغير شرط عدم السلبية، ويتم إضافته الى دالة الهدف بمعامل يساوي "M-" اذا كان الهدف من نوع تعظيم، وبمعامل يساوي "M+" إذا كان الهدف من نوع تدنية، حيث ان M هو عدد كبير جدا؛

➢ **التحويلة 06-03:** في حالة القيود من نوع $(\sum a_{mn}X_n = b_m)$، يتم تحويلها كما يلي:

$$\sum a_{mn}X_n = b_m \Leftrightarrow \sum a_{mn}X_n + A_j = b_m$$

V. خـــلاصـــة

1. البرمجة الخطية هي عبارة عن تعبير رياضـي لمشكلة ما، باسـتخدام معادلات ومتراجحات خطية (من الدرجة الأولى)؛
2. يتكون البرنامج الخطي من ثلاثة عناصر رئيسية هي:
   - دالة الهدف: وتكون من نوع تعظيم Max او تدنية Min؛
   - دوال القيود: في الغـالـب تكون عبـارة عن موارد محـدودة وتعيق تحقيق الهـدف، وتكون في شكل معادلات او متراجحات من الدرجة الأولى؛
   - شـــرط عدم الســـلبية: ويعني ان المتغيرات المســـتقلة (متغيرات القرار) لا تقبل قيم سالبة.
3. تتم عملية صـــياغة البرنامج الخطي عبر مجموعة من المراحل، حيث تمثل المرحلة الأولى في تحديد دالة الهدف وتحديد القيود، ثم يتم صـــياغة الجدول الخاص بالمســـألة، بعدها يتم التعبير الرياضي للبرنامج الخطي؛
4. هناك ثلاث صيغ يمكن ان يكون عليها البرنامج الخطي:
   - صـيغة عامة: تشـترط توفر كل عناصـر البرنامج الخطي فقط، دون شـروط على إشـارة القيود؛
   - صيغة قانونية: إضافة الى شروط الصيغة العامة، تشترط هذه الصيغة ان تكون إشارة كل القيود من نوع اقل من او يسـاوي إذا كان الهدف من نوع التعظيم؛ او ان تكون إشـارة كل القيود من نوع أكبر من او يساوي إذا كان الهدف من نوع التدنية؛
   - صيغة قياسية: إضافة الى شروط الصيغة العامة، تشترط هذه الصيغة ان تكون إشارة كل القيود من مساواة مهما كان نوع الهدف؛
   - يمكن الإنتقال من صيغة الى أخرى بالاعتماد على مجموعة من التحويلات.