## Ch. 1 Calcul différentiel

**Dfn.** (Différentiabilité) Soit $E, F$ deux espaces vectoriels normés (evn) et $U$ est un ouvert de $E$.

Une application $f : U \subset E \to F$ est dite différentiable en $a \in U$ si et seulement s'il existe une appli. linéaire et continue $L : E \to F$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|) \quad ; \ \forall h \in E \ , \ a+h \in U$$

① ....

$o(\|h\|) = \|h\| \varepsilon(h)$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \to 0} 0$

**Rem.**

① l'égalité ① est équivalente à l'égalité $\lim \dfrac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$

② l'application $L$ est unique (quand elle existe) ; puisqu'on a :

$$L(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} .$$

**Dfn :** si $f$ est différentiable en $a$, l'application linéaire $L$ est appelée la différentielle de $f$ en $a$ et on la note $d_a f$, $df_a$, $D_a f$, $Df(a)$, $df(a)$.

**Rem.** $\quad d_a f(h) = \dfrac{d}{dt} f(a+th) \Big|_{t=0}$ .

**Propo.** Si $f : U \subset E \to F$ est diff. en $a$, alors $f$ est continue en $a$.

**Preuve :** (Il découle de la continuité de $d_a f$).

**Dfn :** $f : U \subset E \to F$ est dite diff. sur $U$ si $f$ est diff. en tout pt. de $U$

on dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1(U)$ ssi $f$ est diff. sur $U$ et l'application

$$\left.\begin{array}{rl} df \equiv Df : U \subset E & \longrightarrow L(E,F) \\ x & \longmapsto d_x f \end{array}\right\} \text{ est continue sur } U$$

**Ex.**

① Si $E=\mathbb{R}$, $f: U\subset\mathbb{R}\to F$, alors $f$ est diff. en $a$ ssi $f$ est dérivable en $a$ (i.e. $f'(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}$ existe) et dans ce cas ; $d_af:\mathbb{R}\to F$ est l'app. linéaire définie par $d_af(h)=h.f'(a)$

② Si $f: U\subset E\to F$ est constante alors $f\in\mathcal{C}^1$ et $Df\equiv 0$.

③ Si $f\in L(E,F)$, alors $f\in\mathcal{C}^1(E)$ et on a $Df\equiv f$ (i.e. $Df$ est constante égale à $f$ sur $E$)

④ L'application $f: M_n(\mathbb{R})\longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M)=M^2$ est $\mathcal{C}^1(M_n(\mathbb{R}))$.

En effet, on a : $f(M+H)-f(M)=(M+H)^2-M^2=MH+HM+H^2$

$$=L(H)+\|H\|\varepsilon(H)$$

où $L(H)=HM+MH$ est linéaire (et donc continue car $\dim(M_n(\mathbb{R}))<\infty$)

et $\varepsilon(H)=\frac{1}{\|H\|}H^2$ vérifie $\|\varepsilon(H)\|\leq\|H\| \Rightarrow \varepsilon(H)\to 0$ qd $H\to 0$.

$\Rightarrow d_Mf(H)=MH+HM$.

Comme $M\longmapsto d_Mf$ est linéaire et que $\dim(M_n(\mathbb{R}))<\infty$, on a $Df$ continue sur $M_n(\mathbb{R})$ et donc $f\in\mathcal{C}^1$.

**Propo.** Si $E_i$ est evn pour $i=1,2,\dots,p$ et $f\in L(E_1,E_2,\cdots,E_p;F)$ alors $f\in\mathcal{C}^1$ sur $E_1\times E_2\times\dots\times E_p$ et on a :

$$d_xf(h_1,h_2,\dots,h_p)=\sum_{i=1}^{p}f(x_1,x_2,\dots x_{i-1},h_i,x_{i+1},\dots,x_p)$$

où $x=(x_1,x_2,\dots,x_p)$.

**Ex.** $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ ; $(x,y)\longmapsto(x-y,y^2) \Rightarrow f$ est diff. sur $\mathbb{R}^2$ et on a :

$d_{(x,y)}f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ ; $(h,k)\longmapsto(h-k,2yk)$ est une app. linéaire de matrice associée $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2y\end{bmatrix}=Jf_{(x,y)}$ ; $d_{(x,y)}f=(dx-dy,2ydy)$

## Règle de calcul:

**Propo.**

① $d_a(\lambda f+\mu g)=\lambda d_a f+\mu d_a g$.

② (Loi de composition): Soit $E,F,G$ des evn, $U$ un ouvert de $E$ et $V$ un ouvert de $F$, $f:U\longrightarrow V$ et $g:V\longrightarrow G$ des applications:
Si $f$ est diff en $a\in U$ et $g$ est diff en $f(a)\in V$, alors $g\circ f$ est diff. en $a$ et on a:

$$d_a(g\circ f)=d_{f(a)}g\circ d_a f$$

**Rem.** Soit $E$ et $F$ deux espace de Banach, on note:

$$Iso(E,F)=\{f\ /\ f:E\to F\ ;\ \text{lineaire, continue et bijective}\}$$

on rappelle que d'après le thm. de l'isomorphisme de Banach; pour tout $f\in Iso(E,F)$, on a $f^{-1}\in Iso(F,E)$.

Alors; $Iso(E,F)$ est un ouvert de $L(E,F)$ et l'application Inv.
$Inv: Iso(E,F)\longrightarrow Iso(F,E)$ définie par $Inv(f)=f^{-1}$ est de classe $C^\infty$ et vérifie $d_f Inv(h)=-f^{-1}\circ h\circ f^{-1}$ ; $\forall f\in Iso(E,F)$ et $h\in L(E,F)$

**Dfn.** (dérivé directionnelle) soit $E,F$ des evn, $U$ un ouvert de $E$;
on dit que $f:U\subset E\longrightarrow F$ est directionnellement dérivable si il existe la limite suivante: $l(h)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x+th)-f(x)}{t}$

on note $l(h)=\partial_h f(x)$ la dérivée directionnelle de $f$ suivant le vecteur $h$ au pt. $x$.

**Rem.** Si $f$ est diff. en $x\in U\subset E\Rightarrow f$ est direc. dérivable en $x$ et $d_x f(h)=\partial_h f(x)$, $\forall h\in E$.

ou bien, $d_x f(h)=\delta_h f(x)$

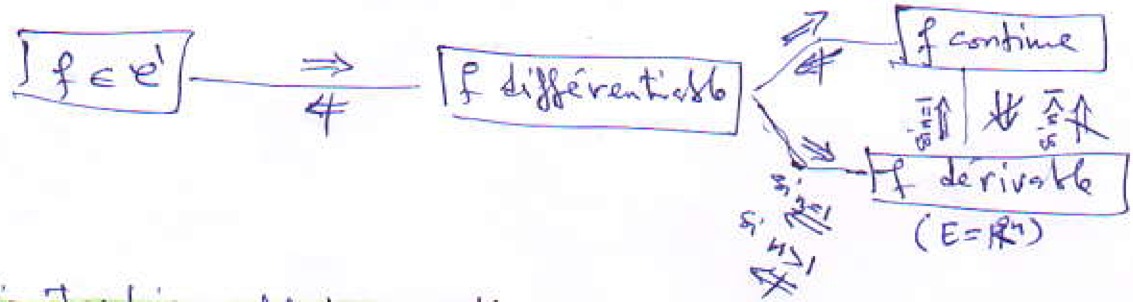
**Thm.** si $f : U \subset E \to F$ et diff. au pt. $x \in U$, alors $f$ admet des dérivées directionnelles $\partial_h f(x) = d_x f(h)$ suivant toute les directions et en particulier en dimension finie $(E = \mathbb{R}^n)$, $f$ admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ ; $1 \leq i \leq n$ et on a : $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \partial_{e_i} f(x) = d_x f(e_i)$

ou $(e_i)_{i=\overline{1,n}}$ est la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$.

**Rem.** on obtient ainsi l'expression usuelle de la différentielle :

$$d_x f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x) dx_i$$

**Rem.** si $f$ admet toutes les dérivées partielles premières. on dit que $f$ est dérivable.




## Matrice Jacobienne et Vecteur gradient :

**Défn.** soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fn. de plusieurs variables de fns. composantes $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$. on note $J_x f = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \cdots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix}$ la matrice jacobienne de $f$ en $x$. C'est un élément de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

**propo.** si $f$ est diff. en $x$, alors $J_x f$ est la matrice de $d_x f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

**propo.** si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est diff. en $x$, alors, on a

$$d_x f(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle \quad , \forall h \in \mathbb{R}^n,$$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

**Rem.** si $E$ est un evn de Hilbert, d'après le thm. de Riesz, toute forme linéaire continue sur $E$ coïncide avec un produit scalaire, cela conduit à que si $f : E \to \mathbb{R}$ est diff $\Rightarrow d_x f(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle$, $\forall h \in E$.

**Propo.** Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f(U) = V \subset \mathbb{R}^m$, $f$ est dérivable en $a$, $g$ est dérivable en $f(a)$ :

$$U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} V \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad / \quad f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$$

alors : $\dfrac{\partial (g\circ f)}{\partial x_r}(a) = \displaystyle\sum_{p=1}^{m} \dfrac{\partial g}{\partial y_p}(f(a)) \dfrac{\partial f_p}{\partial x_r}(a)$ ; $\forall r \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

**Corollaire :** si $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to U \subset E$ evn, est un chemin diff. au temps $t \in I$ et que $f : U \subset E \to F$ evn, est diff. en $\gamma(t)$, alors : $f \circ \gamma$ est diff. au temps $t$ et on a :
$(f\circ\gamma)'(t) = d_{\gamma(t)} f(\gamma'(t))$.

## Les Théorèmes Fondamentaux :

① Thm. du Point Fixe.

② L'inégalité des accroissements finis (AF).

**Thm.** Soit $f : U \subset E \to F$ une application et $x, y \in U$ tel que $[x, y] \subset U$ où $[x, y] = \{tx + (1-t)y \ / \ t \in [0,1]\}$. Si $f$ est diff. en tout pt. du segment $[x, y]$, alors on a : $\|f(x) - f(y)\|_F \leq \|x - y\|_E \cdot \sup\limits_{z \in [x,y]} \|d_z f\|_{L(E,F)}$

**Corollaire :** si $f : U \subset E \to F$ est diff. et $df = 0$ sur $U$, alors $f$ est localement constante sur $U$ (i.e. $f$ est constante sur chaque composante connexe de $U$).
En particulier si $U$ est connexe (ou convexe) alors $f$ est constante sur $U$.

**Corollaire :** si $f : U \subset E \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1(U)$, alors $f$ est localement Lipschitzienne sur $U$.

**Ex.** Soit $f$ définie par $f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}(1/x)$ sur $\mathbb{R}^*$, on a $f'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^*$. $\Rightarrow$ $f$ est localement constante sur $\mathbb{R}^*$.
pour $x < 0$, on a $f(x) = f(-1) = \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}(1/-1) = 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$, $\forall x < 0$
pour $x > 0$, on a $f(x) = f(1) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\forall x > 0$

③ Thm. d'inversion Locale :

**Déf.** (difféomorphisme) Soit $f : U \subset E \to V \subset F$ t.q $U, V$ sont des ouverts et $E, F$ sont evn. On dit que $f$ est $\mathcal{C}^r$-difféomorphisme de $U$ sur $V$ ssi $f$ est bijective, de classe $\mathcal{C}^r$ sur $U$ et $f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^r$ sur $V$.

**Rem.** Si $f : U \to V$ est difféom. alors on dit que $U$ et $V$ sont difféomorphe.

**Déf.** $f : U \subset E \to V \subset F$ et $x \in U$. $f$ est un $\mathcal{C}^r$-difféom. local en $x$ ssi $\exists U_x$ un voisinage de $x$ dans $E$, $\exists V_{f(x)}$ un voisinage de $f(x)$ dans $F$ t.q $f|_{U_x} : U_x \to V_{f(x)}$ soit $\mathcal{C}^r$-difféom.

**Dfn.** $f : U \subset E \to F$ est un difféom local sur $U$ ssi c'est un difféom locale en tout pt. de $U$.

**Rem** difféom (global) $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ difféom. local

**Ex.** si $L \in \mathrm{Iso}(E,F)$, où $E$ et $F$ sont des Banach, alors $L$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféom

**propo.** si $f : U \subset E \to F$ est un $\mathcal{C}^r$-difféom. local sur $U$, alors pour tout ouvert $\Omega \subset U$, $f(\Omega)$ est un ouvert de $F$.
De plus, si $f$ est injective sur $U$, alors $f$ est un $\mathcal{C}^r$-difféom (global)

**propo.** si $f$ est un $\mathcal{C}^r$-difféom. en $x$, alors $d_x f \in \mathrm{Iso}(E,F)$ et on a

$$\left(d_x f\right)^{-1} = d_{f(x)}(f^{-1}).$$

**Thm (Inversion locale)** Soit $E$ et $F$ deux evn de Banach.
si $f : U \subset E \to F$ est $\mathcal{C}^r$ en $x$ et $d_x f \in \mathrm{Iso}(E,F)$, alors $f$ est un $\mathcal{C}^r$-difféom. en $x$.

**Thm. (Inversion global)** Soit $E$ et $F$ deux evn de Banach.
si $f : U \subset E \to F$ est $\mathcal{C}^r$ sur $U$, si $d_x f \in \mathrm{Iso}(E,F)$ pour tout $x \in U$ et si $f$ est injective sur $U$, alors $V = f(U)$ est un ouvert de $F$ et $f : U \to V$ est un $\mathcal{C}^r$-difféom. (global)

**Rem.** si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$ ; $d_x f$ est inversible ssi $n = p$ et $\det(J_x f) \neq 0$ ssi $n = p$ et $\mathrm{rg}(J_x f) = n$ ssi $n = p$ et $\{d_x f_1, \dots, d_x f_p\}$ forme une famille libre de $(\mathbb{R}^n)^*$, où $f = (f_1, \dots, f_p)$.

**Rem.** ~~si f est C°-difféom~~ soit $f : U \subset E \to V \subset F$, on dit que $f$ est homéomorphisme ssi $f$ est bijective, $f$ et $f^{-1}$ sont continue.
si $f$ est un homéom, on dit que $f$ est $\mathcal{C}^0$-difféom.

**Rem.** $f$ est un homéom. de classe $\mathcal{C}^r$, n'entraîne pas que $f$ est un difféom.

**Ex.** l'application $x \longmapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et homéom. de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais pas un difféom.

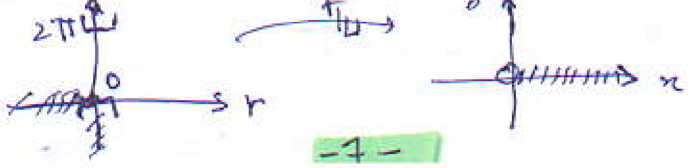
**Rem.** si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $d_x f \in Iso(E,F)$, $\forall x \in U \subset E$
$f$ n'est pas forcément un difféom. (global)

**Ex** $f : U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, définie par $f(x,y) = (x\sin y, x\cos y)$
on a : $f \in \mathcal{C}^1(U)$ et vérifie $d_x f \in Iso(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $\forall x \in U$, pourtant $f$ n'est pas un difféom., car elle n'est pas injective $f(\pi,0) = f(\pi, 2\pi)$
$\det(Jf_{(x,y)}) = x \neq 0$, $\forall (x,y) \in U$.

**Rem.** on ne peut pas se passer de l'hypothèse de classe $\mathcal{C}^r$ ; $r \geq 1$ dans le thm. d'inversion locale.
En effet, si on considère la fn. $f(x) = \begin{cases} x + x^2\sin(\pi/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Alors, $f'(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ l'application $d_0 f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'identité, mais il n'existe pas de voisinage $U_0$ de $0$ tel que $f|_{U_0} \longrightarrow V = f(U_0)$ soit bijective donc on ne peut pas appliquer le thm d'inversion locale dans ce cas car $f$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

**Ex.** (coordonnées polaires) : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, on a $Jf_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$, donc $d_{(r,\theta)} f$ est inversible ssi $r \neq 0$. Le thm. d'inversion locale implique que $f|_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}}$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféom locale de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En revanche $f$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ car $f$ est $2\pi$-périodique en $\theta$, donc $f$ n'est pas difféom. globale.
comme $f$ est injective sur $\mathbb{R}_+^* \times ]0, 2\pi[$, le thm. d'inversion globale implique que $f|_{\mathbb{R}_+^* \times ]0,2\pi[}$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféom. de $\mathbb{R}_+^* \times ]0, 2\pi[$ sur son image $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$



**Ex.** le cercle $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2=1\}$ et le carré $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \sup\{|x|,|y|\} = 1\}$ sont homéomorphes : il suffit de prendre l'app. $f$ :

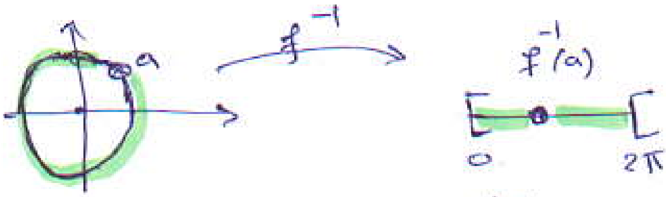
$f : S^1 \longrightarrow C$ : $f(x,y) = \dfrac{1}{\sup\{|x|,|y|\}}(x,y)$ est un homéom. dont l'inverse est :

$f^{-1} : C \longrightarrow S^1$ : $f^{-1}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$.

**Ex.** L'app. $f : [0, 2\pi[ \longrightarrow S^1 : t \longmapsto (\cos t, \sin t)$ est continue, bijective mais son inverse n'est pas continue en $(1,0)$.

l'inverse de $f$ est $f^{-1} : S^1 \longrightarrow [0, 2\pi[ \; ; (x,y) \longmapsto \begin{cases} \arccos(x) & \text{si } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos(x) & \text{si } y < 0 \end{cases}$

**Preuve :** Procéder par l'absurde, en remarquant que le cercle privé d'un pt. $a$ est connexe par arc, ce qui n'est pas le cas de $[0, 2\pi[ \setminus \{f^{-1}(a)\}$.




connexe par arc — n'est pas connexe par arc

**Ex.** l'app. $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^n$, définie par $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ où $U = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\| > 1\}$, n'est pas un difféom. (global) car $f$ n'est pas injective. $\| \| = \| \|$, $x = (1,1,0,\dots)$, $y = (2,2,0,\dots)$ Autre justification $f(U) = S^{n-1}$ (la sphère unité) qui n'est pas une partie ouvert de $\mathbb{R}^n$, donc $f$ ne peut pas être un difféo. de $U$ dans $f(U)$.

**Ex.** $f : U \longrightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^n$ avec $U = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x\|_2 > 1\}$, définie par : $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|_2^2}$, $f$ devient un difféom., $f(U) = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \,/\, \|x\|_2 < 1\}$

**Ex.** $\varphi : Iso(E,F) \longrightarrow Iso(E,F) : u \longmapsto u^{-1}$ est $C^\infty$-difféom. de $Iso(E,F)$

**Rem.** ① Un homéom. conserve les propriétés topologiques (ouverts, fermés, convexe, connexe, compact, ... etc)

② Un difféom. conserve les propriétés topologique et géométriques.

## ④ Thm. des fns. implicites :

**Dfn. (Différentielles partielles) :** soit $E_1, E_2$ deux evn, on pose l'app. partielles $I_1^a(x_1) = (x_1, a_2)$, $I_2^a(x_2) = (a_1, x_2)$ t.q. $a = (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$, $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$. Alors $I_i^a \in \mathcal{C}^\infty$, $i = 1, 2$.

A toute app. $f : U \subset E_1 \times E_2 \longrightarrow F$, on associe $f_i^a = f \circ I_i^a$ qui est une application définie sur l'ouvert $U_i^a = (I_i^a)^{-1}(U)$ de $E_i$, $i = 1, 2$, à valeur dans $F$.

Si $f_i^a$ est différentiable en $a = (a_1, a_2)$, alors la différentielle $d_{a_i} f_i^a$ est appelé la différentielle partielle de $f$ par rapport à $x_i$ au pt. $a$

cette différentielle est notée. $\partial_i f_a$ ou $\left.\frac{df}{dx_i}\right|_a \in L(E_i, F)$.

**Rem** si $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$, $\partial_i f_a(h_i) = h_i \partial_i f(a)$.

**Thm (des fns. implicites) :** Soient $E_1, E_2$ et $F$ des env de Banach. $U \subset E_1$, $V \subset E_2$ des ouverts et $f : U \times V \subset E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ une app. de classe $\mathcal{C}^r$ / $r \geq 1$.

soit $a = (a_1, a_2) \in U \times V$ tel que $f(a_1, a_2) = 0$ et $\partial_2 f_a \in Iso(E_2, F)$.

Alors ; il existe un voisinage ouvert de $a_1$, $U_{a_1} \subset U$, un voisinage $V_{a_2} \subset V$ et une app. $\phi : U_{a_1} \to V_{a_2}$ de classe $\mathcal{C}^r$ tels que :

① $\phi(a_1) = a_2$

② $\forall (x_1, x_2) \in U_{a_1} \times V_{a_2}$, $f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow \forall x_1 \in U_{a_1}$, $x_2 = \phi(x_1)$

c-à-d. $\underbrace{\{(x_1, x_2) \in U_{a_1} \times V_{a_2} \;/\; f(x_1, x_2) = 0\}}_{\text{ligne de niveau 0 de } f} = \underbrace{\{(x_1, \phi(x_1)) \;/\; x_1 \in U_{a_1}\}}_{\text{graphe de } \phi}$

③ Sur toute partie connexe $C$ de $U_{a_1}$ contenant $a_1$, $\phi$ est unique.

④ la diff. de $\phi$ en $a_1$ est donnée par la formule :

$$d_{a_1}\phi = -(\partial_2 f_a)^{-1} \circ \partial_1 f_a \quad / \quad a = (a_1, a_2)$$

**Etude Pratique** (si $E_1 = \mathbb{R}^k$, $E_2 = \mathbb{R}^n$)

soit $U \times V \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ; $f(x,y) = (f_1(x,y), \ldots, f_n(x,y))$ une app. de classe $\mathcal{C}^r$ / $r \geq 1$, soit $(a,b) \in U \times V$ t.q. $f(a,b) = 0$ et $\partial_2 f_{(a,b)}$

$\partial_2 f_{(a,b)} \in Iso(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ c-à-d. $\det \left.\begin{pmatrix} \partial_{y_1} f_1 & \cdots & \partial_{y_n} f_1 \\ & \ddots & \\ \partial_{y_1} f_n & \cdots & \partial_{y_n} f_n \end{pmatrix}\right|_{(a,b)} \neq 0$

Alors $\exists U_a$ voisinage de $a$, $\exists V_b$ voisinage de $b$ et $\phi : U_a \longrightarrow V_b$, t.q.

① $\phi(a) = b$, ② $\forall (x,y) \in U_a \times V_b$ ; $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x)$.

③ $d_a\phi = -\left(\partial_y f_{(a,b)}\right)^{-1} \circ \partial_x f_{(a,b)}$ $\left( \Leftrightarrow J_a\phi = \begin{pmatrix} \partial_{y_1} f_1 & \cdots & \partial_{y_p} f_1 \\ & \ddots & \\ \partial_{y_1} f_p & \cdots & \partial_{y_p} f_p \end{pmatrix}^{-1}_{(a,b)} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \cdots & \partial_{x_k} f_1 \\ & \ddots & \\ \partial_{x_1} f_p & \cdots & \partial_{x_k} f_p \end{pmatrix}_{(a,b)} \right.$

④ si $f$ est de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, il en est de même pour $\phi$.

Ex Pour un choix convenable d'un intervalle $I_0$ centré en $0 \in \mathbb{R}$, l'éqn. $y^2 x_1 + e^{2y} + x_2 = 0$ a une solution unique $y \in I_0$ si $x = (x_1, x_2) \in V$ un certain voisinage de $(1,-1)$ dans $\mathbb{R}^2$.

En effet, on commence par définir $f : \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x_1, x_2, y) = f(x, y)$ $= y^2 x_1 + e^{2y} + x_2$, t.q $x = (x_1, x_2)$.

Alors $f(1,-1;0) = 0$ et $\partial_y f_{(x,y)} = 2x_1 y + 2e^{2y} \Rightarrow \partial_y f(1,-1,0) = 2 \neq 0$ et d'après le thm. des fns. implicites, $\exists$ voisinage $I_0$ de $0$ dans $\mathbb{R}$ et $V_{(1,-1)}$ de $(1,-1)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une application $\phi$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ : $V_{(-1,1)} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow I_0 \subset \mathbb{R}$ tels que : $\phi(1,-1) = 0$ et $y = \phi(x_1, x_2)$, $\forall (x_1, x_2) \in V_{(-1,1)}$ et $y \in I_0$

D'autre part : $d_{(1,-1)}\phi = -\left(\partial_y f_{(1,-1;0)}\right)^{-1} \circ \partial_x f_{(1,-1;0)} = -(2)^{-1}(0,1) = (0, -\frac{1}{2})$

t.q $\partial_x f_{(x,y)} = \left(\partial_{x_1} f(x,y) \quad \partial_{x_2} f(x,y)\right) = (y^2, 1) \Rightarrow \partial_x f_{(1,-1,0)} = (0,1)$.

Thm des fns. implicites linéaires

Le noyau d'une application linéaire $L : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de rang $p$ (i.e. surjective est le graphe d'une application $l : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^p$ (i.e. $\mathrm{Ker}(L) = \{(x, l(x)) \mid x \in \mathbb{R}^k\}$.

④ Thm du Rang :

Dfn. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ differentiable en $x_0$. On appelle rang de $f$ en $x_0$ et on note $rg_{x_0}(f)$, l'entier $rg(d_{x_0} f)$.

Rem : on a toujours $rg_{x_0}(f) \leq \min(n, m)$

propo. $d_x f$ est injective, surjective ou bijective ssi $rg_x(f) = \min(n, m)$

**propo.**

① si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en $x_0$, alors il existe un voisinage $U_{x_0}$ de $x_0$ dans $U$ tel que pour tout $x \in U_{x_0}$, on a $rg_x(f) \geq rg_{x_0}(f)$.

② si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$, alors pour tout $r \in \mathbb{N}$ :

$\Omega_r = \{ x \in U \ / \ rg_x(f) \geq r \}$ est un ouvert de $U$.

③ si $d_{x_0}f$ est injective (resp. surjective) alors il existe un voisinage $U_{x_0}$ de $x_0$ dans $U$ tel que pour tout $x \in U_{x_0}$, on ait $d_x f$ injective (resp. surjective).

**Dfn.** (Immersion) : on dit qu'une application $f$ définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est une immersion ( resp. submersion) en $a \in \mathbb{R}^n$ si $d_a f$ est injective (resp. surjective).

(ceci suppose $p \geq n$ (resp. $n \geq p$)).

**Dfn.** on dit que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est une immersion (resp. submersion) si $f$ est une immersion (resp. submersion) en tout pt $x$ de $\Omega$.

**Dfn.** si $f$ est à la fois submersion et immersion en $x$, on dit que $f$ est étale.

**Rem.** ① $\mathcal{C}^k$-difféom. $\Rightarrow$ étale

② étale $\Rightarrow$ $\mathcal{C}^k$-difféom. local

③ étale $\oplus$ injective $\Longrightarrow$ $\mathcal{C}^k$-difféom. (global)

**EX.** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : x \longmapsto f(x) = (x, g(x))$ t.q $g$ est diff. $(rg_x(f) = 1)$

$\Rightarrow f$ est une immersion sur $\mathbb{R}$ car $d_x f = (1, g'(x)) \neq (0,0)$ (injective)

**EX.** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : x \longmapsto (\cos x, \sin x)$ est une immersion sur $\mathbb{R}$, car, $d_x f = (-\sin x, \cos x) \neq (0,0)$ (injective) $(rg_x(f) = 1)$

**EX.** $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : x \longmapsto (x, 0)$ $(n \leq m)$ est immersion sur $\mathbb{R}^n$. $d_x f = (I_n, 0_{\mathbb{R}^{m-n}})$ $(rg_x(f) = n)$

**Ex.** $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$ $\quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T)$

$\Rightarrow f$ est une submersion sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $\quad d_x f = J_x f = 2x^T$ (surjective) ($rg_x(f) = 1$)

**Rem.** si $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ et $f : U \subset E \to F$, alors :

① $f$ est une immersion en $x$ ssi $rg_x f = n$ $(n \leq m)$

② $f$ est une submersion en $x$ ssi $rg_x f = m$ $(m \leq n)$

③ $f$ est étale ssi $rg_x f = n = m$.

**Lemme de l'immersion :**

On suppose que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est une immersion en $a \in \Omega$. $(p \geq n)$

Alors il existe un voisinage ouvert $U_a \subset \Omega$ de $a$, un voisinage ouvert $V_{f(a)} \subset \mathbb{R}^p$, un voisinage $W_0$ de $0 \in \mathbb{R}^{p-n}$ et un difféom. $\phi : V_{f(a)} \longrightarrow U_a \times W_0$ tels que :

pour tout $x \in U_a$ ; $\phi \circ f(x) = (x, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-n} = \mathbb{R}^p$.

$$\begin{tikzcd}
U_a \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i_1"'] & V_{f(a)} \subset \mathbb{R}^p \arrow[d, "\phi"] \\
& U_a \times W_0
\end{tikzcd}$$

$\phi \circ f = i_1$

**Rem.** À un changement de variable près, toute immersion est localement égale à l'injection canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ $\quad (\phi \circ f = i_1)$

**Lemme de la submersion :**

On suppose que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est une submersion en $a \in \Omega$. $(n \geq p)$

Alors il existe un voisinage $U_a$ de $a$, un voisinage $V_{f(a)} \in \mathbb{R}^p$, un voisinage $W_0 \in \mathbb{R}^{n-p}$ et un difféom. $\psi : W_0 \times V_{f(a)} \longrightarrow U_a$ tels que, pour tout $(x, y) \in W_0 \times V_{f(a)}$ : $f \circ \psi(x, y) = y$

$V_{f(a)} \times W_0$

$$\begin{tikzcd}
{=x} \quad U_a \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] & V_{f(a)} \subset \mathbb{R}^p \\
W_0 \times V_{f(a)} \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, "P_2"']
\end{tikzcd}$$

$V_{f(a)} \times W_0$

$f \circ \psi = P_2$

**Rem.** À un changement de variable près, toute submersion est égale à la projection canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

**Rem.** Toute submersion est une application ouverte.

## Théorème du Rang Constant :

On suppose que $f$ est de rang constant $r$ sur un voisinage $\Omega_a$ de $a \in \mathbb{R}^n$.
Alors il existe un voisinage $U_a \subset \Omega_a$ de $a$, un voisinage $V_{f(a)} \in \mathbb{R}^p$, un difféom. $\psi : U_a \longrightarrow \psi(U_a) \subset \mathbb{R}^n$ et un difféom $\phi : V_{f(a)} \longrightarrow \phi(V_{f(a)}) \subset \mathbb{R}^p$ tel que :

$$\phi \circ f \circ \psi^{-1} : \psi(U_a) \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\phi \circ f \circ \psi^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_r, 0, 0, \dots 0) \in \mathbb{R}^p$$

$$\begin{tikzcd}
U_a \subset \Omega_a \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"] & V_{f(a)} \subset \mathbb{R}^p \arrow[d, "\phi"] \\
\psi(U_a) \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "i_r"'] & \phi(V_{f(a)}) \subset \mathbb{R}^p
\end{tikzcd}
\qquad \phi \circ f \circ \psi^{-1} = i_r$$

**Rem.** Toute application de rang localement constant est à changement de variables près, équivalente à l'application linéaire standard de rang $r$.

## Plongement :

**Dfn.** Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.
$f$ est dite plongement si :
① $f$ est une immersion sur $U$
② $f$ est injective.

**Dfn.** $f$ est dite plongement régulier si :
① $f$ est un plongement
② $f : U \longrightarrow f(U)$ est un homéom. où $f(U)$ est muni de la topologie $\tau(f(U))$ induite par celle de $\mathbb{R}^m$, i.e. $\tau(f(U)) = \{\theta \cap f(U) \;/\; \theta \text{ ouvert de } \mathbb{R}^m\}$.