

UNIVERSITÉ LARBI BEN M'HIDI-OUM EL BOUAGHI
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématique et Informatique

3ième année licence informatique (SI)

Contrôle N 01

Probabilité & Statistique

Le 17/01/2024

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Questions de cours. (04 points)

Q1) Montrer que la fonction caractéristique d'une loi de Bernoulli de paramètre p s'écrit come suite : $\forall t \in \mathbb{C}, \phi(t) = E(e^{itx}) = q + (p e^{it})$.

.....

Q2) Sur une autoroute, il y a en moyenne deux accidents par semaine. Soit X la v.a qui représente " le nombre d'accidents par une semaine".

Quelle est la probabilité qu'il y aura cinq accidents par semaine ?

.....

Q3) Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sur un échantillon de taille $n = 100$. On a le tableau suivant :

x_i	$x_1 = 30$	$x_2 = 40$	$x_3 = 45$	$x_4 = 50$
n_i	15	35	20	30

(a) Donner l'estimation $\hat{\mu}$ du maximum de vraisemblance de la moyenne μ .

.....

(b) Donner l'estimation $\hat{\sigma}^2$ du maximum de vraisemblance de la variance σ^2 .

.....

Exercice 01. (10 points) (Variable aléatoire discrète et continue)

1. L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets; les candidats tirent au sort trois sujets au hasard et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100. Soit X la variable aléatoire qui représente "le nombre de sujets révisés d'un candidat parmi les 3 sujets tirés".

Déterminer la loi de la v.a X , ses paramètres et donner sa formule de la loi de probabilité.

.....

Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé exactement deux sujets ?

.....

2. Pour la recherche d'un emploi, une personne envoie sa candidature à 25 entreprises. La probabilité qu'une entreprise lui réponde est de 0,2 et on suppose que ces réponses sont indépendantes. Soit X la variable aléatoire qui représente "le nombre de réponses". Déterminer la loi de la v.a X , ses paramètres et donner sa formule de la loi de probabilité.

.....
.....

Quelle est la probabilité que la personne reçoive au moins 2 réponses ?

.....
.....

3. La durée de vie, en heures, d'un ordinateur avant sa première panne est une variable aléatoire continue X dont la fonction caractéristique est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad \phi_X(t) = \frac{1}{1 - \frac{it}{2}}$$

A partir de tableau 1, déduire la loi de probabilité de la v.a X . (1 pt)

.....
.....
.....

Trouver le nombre x d'heure tel que avec une probabilité 0.8 l'ordinateur va brûler avant x heures. (1.5 pts)

La fonction de répartition de la v.a X est :

.....
.....
.....

4. Soit $X \sim \mathcal{N}(3,9)$. A partir de tableau 2, calculer :

$P(X < 1) =$

.....

$P(2 < X < 5) =$

.....

$P(|X - 3| > 6)$

.....
.....
.....

Tableau 1. Quelques fonctions caractéristiques des lois connues

Loi de probabilité	Fonction caractéristique
Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n, p)$	$\phi_X(t) = (1 - p - pe^{it})^n$
Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$\phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$\phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$
Normale centrée réduite $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$	$\phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

Tableau 2.

Table de la fonction de répartition ϕ de la v.a $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

$\phi(x) = P(Z \leq x)$ et $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$ pour $x \in [0, 2.39]$

x(0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916