UNIVERSITÉ LARBI BEN M'HIDI-OUM EL BOUAGHI

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématique et Informatique

3ième année licence informatique (SI)

Corrigé type **Probabilité & Statistique**

Nom :...**Prénom :**................................**Groupe :**.......

Questions de cours.(04 points)

Q1) Monter que la fonction caractéristique d'une loi de Bernoulli de paramètre p s'écrit come suite : $\forall t \in \mathbb{C}, \ \ \phi(t) = E(e^{itx}) = q + \Big(p\ e^{it}\Big)$.

$\phi(t) = E(e^{itx}) = e^{it\times 0}\ P(X=0) + e^{it\times 1}\ P(X=1) = \ P(X=0) + e^{it}\ P(X=1)$

Alors $\phi(t) = 1 - p + e^{it}\ p = q + \ p\ e^{it}$ (01 pt)

Q2) Sur une autorote, il y a en moyenne deux accidents par semaine. Soit X la v.a qui représente " le nombre d'accidents par une semaine".

Quelle est la probabilité qu'il y aura cinq accidents par semaine ?

On a $X \sim \mathcal{P}(\lambda = 2)$, alors la loi de probabilité est donnée par : $P(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\ e^{-\lambda}$.

Donc $P(X=5) = 0.03$ (01 pt)

Q3) Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sur un échantillon de taille $n = 100$. On a le tableau suivant :

x_i	$x_1 = 30$	$x_2 = 40$	$x3 = 45$	$x_4 = 50$	$\sum$
n_i	15	35	20	30	n=100
$n_i \times x_i$	450	1400	900	1500	4250
$n_i \times x_i^2$	13500	56000	40500	75000	185000

(a) Donner l'estimation $\widehat{\mu}$ du maximum de vraisemblance de la moyenne μ.

$\widehat{\mu} = \overline{x} = \dfrac{\sum n_i\ x_i}{n} = \dfrac{4250}{100} = 42.5$ (01 pt)

(b) Donner l'estimation $\widehat{\sigma^2}$ du maximum de vraisemblance de la variance σ^2.

$\widehat{\sigma^2} = S^2 = \dfrac{\sum n_i\ x_i^2}{n} - \overline{x}^2 = \dfrac{185000}{100} - 42.5^2 = 43.75$ (01 pt)

Exercice 01.(10 points) (Variable aléatoire discrète et continue)

1. L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets au hasard et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100. Soit X la variable aléatoire qui représente "le nombre de sujets révisés d'un candidat parmi les 3 sujets tirés".

   Déterminer la loi de la v.a X, ses paramètres et donner sa formule de la loi de probabilité.

   $X \sim \mathcal{HG}(n = 3, N_1 = 60, N = 100)$, tel que $S(X) = \{0, ..., 3\}$ (0.5 pt) et la loi de probabilité de la loi hypergéométrique X est donnée par :

$$P(X=k) = \frac{C_{N_1}^{k} \times C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n} \quad (01pt)$$

Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé exactement deux sujets ?

$$P(X=2) = \frac{C_{60}^2 \times C_{40}^1}{C_{100}^3} = ... \qquad (01pt)$$

2. Pour la recherche d'un emploi, une personne envoie sa candidature à 25 entreprises. La probabilité qu'une entreprise lui réponde est de 0,2 et on suppose que ces réponses sont indépendantes. Soit X la variable aléatoire qui représente "le nombre de réponses". Déterminer la loi de la v.a X, ses paramètres et donner sa formule de la loi de probabilité.

   $X \sim \mathcal{B}(n=25, p=0.2)$, tel que $S(X) = \{0, ..., 25\}$ (0.5 pt) et la loi de probabilité de la loi binomiale X est donnée par :

$$P(X=k) = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k} \quad (01pt)$$

   Quelle est la probabilité que la personne reçoive au moins 2 réponses ?

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \Big(P(X=0) + P(X=1)\Big) = ... \quad (01pt)$$

3. La durée de vie, en heures, d'un ordinateur avant sa première panne est une variable aléatoire continue X dont la fonction caractéristiqueest donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{C}, \quad \phi_X(t) = \frac{1}{1 - \frac{i\,t}{2}}$$

   A partir de tableau 1, déduire la loi de probabilité de la v.a X. (1 pt)
   On a $\phi_X(t) = \dfrac{1}{1-\frac{i\,t}{2}} = \dfrac{2}{2-it} = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$, donc la loi de X est la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$. (01 pt)

   Trouver le nombre x d'heure tel que avec une probabilité 0.8 l'ordinateur va brûler avant x heures. (1.5 pts)
   La fonction de répartition de la v.a X est : $F_X(x) = 1 - e^{-2x}$ (0.5 pt)
   On a $1 - e^{-2x} = 0.8 \;\Rightarrow\; e^{-2x} = 0.2 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{-ln(0.2)}{2}$ (01 pt)

4. Soit $X \sim \mathcal{N}(3.9)$. A partir de tableau 2, calculer :
   $P(X<1) = P(Z < \frac{-2}{3}) = 1 - \phi(\frac{2}{3}) = 1 - \phi(0.67) = 1 - 0.7486 = 0.2514$ (0.5 pt)
   $P(2 < X < 5) = P(\frac{-1}{3} < Z < \frac{2}{3}) = \phi(\frac{2}{3}) - \phi(\frac{-1}{3}) = \phi(\frac{2}{3}) - \Big(1 - \phi(\frac{1}{3})\Big)$
   $= \phi(0.67) - 1 + \phi(0.33) = 0.3779$ (01 pt)
   $P(\mid X-3 \mid > 6) = 1 - P(\mid X-3 \mid \leq 6) = 1 - P(-6 \leq X-3 \leq 6) = 1 - P(-2 \leq Z \leq 2) = 1 - \Big(\phi(2) - 1 + \phi(2)\Big) = -2\phi(2) + 2 = -2 \times 0.9772 + 2 = 0.0456$ (01 pt)

Exercice 02.(06 points) (vecteur aléatoire gaussien)

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires **indépendantes gaussiennes centrées**, avec leurs variances $Var(X_1) = 2$, $Var(X_2) = 1$ et $Var(X_3) = 3$ respectivement.

1. Déterminer la loi de probabilité du vecteur $X = (X_1, X_2, X_3)^t$. (01.25 pts)

$X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \Sigma_X)$ tels que :

$$\mu_X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Et \quad \Sigma_X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Quelle est la loi du vecteur $Z = (X_1, X_3)^t$? (01.25 pts)

$Z \sim \mathcal{N}_2(\mu_Z, \Sigma_Z)$ tels que :

$$\mu_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Et \quad \Sigma_Z = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. On définit la variable Y comme suite : $Y = \dfrac{X_1 - X_2 + X_3}{3}$.

Quelle est la loi de vecteur $(X_1, Y)^t$?

$(X_1, Y)^t \sim \mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$. On a :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \dfrac{X_1 - X_2 + X_3}{3} \end{pmatrix} = A \times X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (01 \;\; pt)$$

Donc :

$$\mu = A \times \mu_X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0.75 \;\; pt) \quad Et \quad \Sigma = A \times \Sigma_X \times A^t = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (1.25 \;\; pt)$$

4. Que peut-on dire de l'indépendance de X_1 et Y ? (0.5 pt)

On remarque que $cov(X_1, Y) = 2/3$ donc les deux variables ne sont pas indépendantes.

Bonne chance.

Tableau 1. Quelques fonctions caractéristiques des lois connues

Loi de probabilité	Fonction caractéristéque
Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$\phi_X(t) = \left(1 - p + pe^{it}\right)^n$
Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$\phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$\phi_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$
Normale centrée réduite $X \sim \mathcal{N}(0,1)$	$\phi_X(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$

Tableau 2.

Table de la fonction de répartition ϕ de la v.a $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$\phi(x) = P(Z \leq x\ ) \text{ et } \quad \phi(-x) = 1 - \phi(x) \quad \text{pour} \quad x \in [0, 2.39]$$

x(	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916