01-I

إمتحان الكتابي في TD رقم 01

لتكن مسألة كوشي التالية:

$$(I)\ -\begin{cases} y' = t^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1/ أدرس وجود ووحدانية الحل الأعظمي لهذه المسألة.

2/ ليكن $(y, J =]\alpha.\beta[)$ حل أعظمي لهذه المسألة.

2.1) برهن أن y متزايدة تماما على J.

2.2) برهن أن y فردية على J مع إيجاد $J = ?$.

أسئلة إضافية:

3/ دراسة إشارة الحل y على J.

4/ برهن أن y معرف على مجال محدود في $\mathbb{R}$.

5/ أدرس سلوك y في حدود مجال المعرف عليه.

الإجابة:

1/ دراسة وجود ووحدانية الحل الأعظمي للمسألة I.

نضع: $f(t,y) = t^2 + y^2$ و $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$

f كثير حدود ومنه $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ ومنه.

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ إذن f مستمرة على $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$.

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ إذن f لبشيتزية محليا بالنسبة

لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على $\mathbb{R}^2$.

ومنه حسب نظرية كوشي - لبشيتز من أجل كل $(t_0, y_0) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$

المسألة I تقبل حل وحيد أعظمي (y, J).

2.1) البرهان أن y متزايدة تماما على $J =]\alpha.\beta[$.

بما أن (y, J) حل لمسألة كوشي (I) إذن:

02

$$y'(t) = f(t, y(t)) = t^2 + y^2(t) \geq 0, \quad \forall t \in J.$$

من جهة أخرى لدينا من أجل $t=0$.

$* \ y'(0) = y^2(0) + 0 = 0$

$** \ \forall t \neq 0. \Rightarrow y'(t) = y^2(t) + t^2 > 0$

لأن $t^2 > 0$.

أي:

$$y'(t) > 0, \quad \forall t \in J - \{0\}.$$

ومنه y متزايدة تماما على J.

2.2). البرهان أن y فردية على J مع إيجاد $J = ?$ ؟

أي لنبرهن أن: $y(-t) = -y(t), \ \forall t \in J =]\alpha, \beta[$ ؟

من أجل ذلك نعرف الدالة $\tilde{y}$ المعرفة على $\tilde{J} = -J$

كما يلي:

$$\tilde{y} : \tilde{J} = -J \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$t \longmapsto \tilde{y}(t) = -y(-t)$$

* لنبرهن أن $(\tilde{y}, \tilde{J})$ حل لمسألة (I).

نلاحظ أن: $0 \in \tilde{J} \ (-0 = 0 \in J)$: $\tilde{y}(0) = -y(-0) = 0$.

إذن: $\tilde{y}(0) = 0$.

(ش1) $\forall t \in \tilde{J}. \ (t, \tilde{y}(t)) \in \mathbb{R}^2.$

(ش2) $\tilde{y}'(t) = f(t, \tilde{y}(t)), \ \forall t \in \tilde{J}$?

$t \in \tilde{J} = -J \Rightarrow -t \in J : \ \tilde{y}(t) = -y(-t).$

$$\Rightarrow \tilde{y}'(t) = \frac{d}{dt}\left[-y(-t)\right] = -\frac{d(-t)}{dt} \, y'(-t) = f(-t, y(-t))$$

$$= f(-t, -\tilde{y}(t)) = (-t)^2 + (-\tilde{y}(t))^2 = t^2 + \tilde{y}^2(t) = f(t, \tilde{y}(t))$$

ومنه $(\tilde{y}, \tilde{J})$ حل لمسألة كوشي (I).

ولكن (y, J) حل وحيد أعظمي كذلك لمسألة كوشي (I) إذن (y, J) هو تمديد $(\tilde{y}, \tilde{J})$ ومنه.

$]-\beta, -\alpha[= \tilde{J} \subset J =]\alpha, \beta[$ ، $y/_{\tilde{J}} = \tilde{y}$ ،

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \leq -\beta \\ -\alpha \leq \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \leq -\beta \\ \alpha \geq -\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\beta$$

ومنه $J = \tilde{J} =]-\beta, \beta[$ ومنه $y = \tilde{y}$

على $J =]-\beta, \beta[$ إذن

$$y(t) = \tilde{y}(t) = -y(-t) \quad , \forall t \in]-\beta, \beta[.$$

ومنه $\boxed{y \text{ دالة فردية على } J}$.

و $\boxed{J =]-\beta, \beta[}$.

الإجابة عن الأسئلة الإضافية،

ب/ دراسة إشارة الحل y على $J =]-\beta, \beta[$.

بما أن y متزايدة تماما و $y(0) = 0$ إذن:

$$\forall t \in]0, \beta[\Leftrightarrow t > 0 \Rightarrow y(t) > y(0) = 0.$$

إذن $\boxed{y \text{ موجبة على المجال }]0, \beta[}$

$$\forall t \in]-\beta, 0[\Leftrightarrow t < 0 \Leftrightarrow y(t) < y(0) = 0$$

إذن y سالبة على المجال $]-\beta, 0[$.

يتبع...