بسم الله الرحمن الرحيم

سلام الله على طلابي الأعزاء

كما و عدتكم ...ها انا ذا افي بوعدي على امل ان لا تخيبوا املي فيكم من الناحية الدراسية .

هذا جهد لوجه الله ، خالصا و إهداء مني لكم بمناسبتين، رغم ظروفي الخاصة هذه الأيام ،،

و المطلوب :

بما اننا بصدد نظرية الاحتمالات و التوزيعات الاحتمالية ، ومن خلال تعاملي معكم خلال هذا السداسي ،

اتمنى ان تتصوروا ما هما هاتان المناسبتان ؟ (رغم إقراري مبدئيا بكون مجال الإمكانات مفتوح)

(يمكنكم الإجابة عن السؤال " المناسبتين " على الإيمايل الخاص بي : gestred55@gmail.com

(الإجابات الخمس الصحيحة الأولى ستكون لهم مكافئة خاصة .... بالتوفيق) .

لكم :

- **اولا :**

صورة عن الإمتحان التطبيقي الأول والذي تمت مناقشته معكم و بالتفصيل . ستتم اعادة سؤال منه في الامتحان النهائي بالإضافة إلى سؤال اخر في الامتحان النهائي (لدعم علامة التطبيق بحول الله)

تذكر:

هذه نسخة من الامتحان التطبيقي و الذي تمت مناقشة الحل على مستوى المحاضرة و التطبيق.

(امتحان تطبيق 1)

تمرين 1:

*س1: ا-ما هوالفرق بين الثنائي و البواسوني ؟ب -و لماذا يتم تقريب الثنائي بالبواسوني ؟ ج -ما هي شروط التقريب المتفق عليها؟

- س2: متى تكون الصيغة التالية دوما صحيحة؟ $P(X \leq x_i) = P(X \langle x_i)$

تمرين 2 :

يمر في سماء ام البواقي و في شهر أوت في المتوسط 240 طائر مهاجر في غضون ساعة.

المطلوب: ما هو احتمال رؤية أكثر من 10 طيور في دقيقة واحدة؟

تمرين 3: :

يوجد في محطة المترو قطار يمر كل 10 دقائق بالضبط سيتعين على الزبون (المسافر) الذي يحظر إلى المحطة دون التحقق من الوقت (النظر في ساعته) أن يفعل ذلك . **المطلوب :** ما هو احتمال ان ينتظر اقل من دقيقتين ؟

تمرين 4:

يريد أحد الباحثين دراسة معدل الذكاء للسكان. تظهر الخبرة في هذا المجال تبين ان م.ع الذي يعطي معدل الذكاء QI للفرد من بين السكان هو م.ع (100 ,100) N، المطلوب : ما هو احتمال ملاحظة فرد ما لديه معدل ذكاء أعلى من 120 .؟

- **ثانيا :**

هناك صفحة مخصصة للجداول الإحصائية و صفحة مخصصة للقوانين الاحتمالية .

من الضروري نسخها على ورقة واحدة (ظهر و وجه) لإمكانية استخدامها يوم الإمتحان .بكل حرية

ملاحظة :

تكون هذه الورقة فردية تحمل اسمك و الفوج و الإمضاء و لا حرف أخر .

- **ثالثا :**

تمارين للمراجعة (إمكانية الاستفسار في حالة عدم فهم الحل ...لكن لا اعيدكم بالرد 100% " حسب الظروف و طبيعة و جدية السؤال) .

ملاحظة : ضرورة تتبع التوجيهات في حل التمارين و قراءة الملاحظات للاستفادة على أمل أن أوفق في هذا المنهج .

- **رابعا :**

ما هو احتمال ان الامتحان النهائي سيكون به حوالي 50% من التمارين الموالية؟

+=+=+=+=+=+=+=+=+=+=+=+=+=+=+==+=+=+=+=

تمارين و أسئلة للتذكير و المراجعة :

(فضلنا ان يكون سؤال نظري بمثابة تمرين للأهمية)

تمرين	**1:**

لنفترض أن لدينا عملة نادرة يكون فيها احتمال الحصول على شعار هو 0.3.

المطلوب : ما هو احتمال الحصول على شعار في مرة واحدة من رمي العملة؟

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	**الحل: ص:**	5

تمرين	**6:**

بفرض انه لدينا عملة معينة يكون فيها احتمال الحصول على الشعار هو 0.4. إذا ألقينا العملة 5 مرات،

المطلوب : ما هو احتمال الحصول على الشعار 3 مرات؟

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	**الحل: ص:**	6

تمرين	**11:**

بفرض أن معدل حدوث حوادث السيارات في منطقة معينة هو 0.5 حادث في اليوم.

المطلوب : ما هو احتمال حدوث 2 حوادث في يوم واحد؟

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	**الحل: ص:**	7

تمرين	18:

لنفرض انه لدينا عملة غيرعادلة(غير منتظمة ، شاذة) بحيث ان احتمال الحصول على الشعارفي كل محاولة هو 0.2

المطلوب :

ما هو احتمال أن يظهرالشعار لأول مرة في الرمية الخامسة؟

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	9

تمرين	23:

لنفترض أن لدينا 10 كرات حمراء و15 كرة خضراء، ونقوم بسحب 7 كرات دون ارجاع .

المطلوب :

ما هو احتمال أن تحتوي العينة على 4 كرات حمراء؟

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	11

تمرين	26:

عن التوزيع المنتظم المستمر

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	12

تمرين	30:

إذا كانت الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل في البنك تتبع توزيع أسي بمتوسط **0,5**(نصف) دقيقة.

المطلوب : أوجد ما يلي:

ا- تابع كثافة الاحتمال المعبرعن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل.

ب -ما احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	26-25

تمرين	32:

بفرض أن X له التوزيع $N(10,4)$ فأوجد :

1- $P(-3 < X < 12)$ 　　　 2- $P(|X| \leq 5)$

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	28-27-26

تمرين	35:

ما هو دور دالة جاما في مجال نظرية الاحتمالات ؟

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	31

تمرين	38:

ما هي اهمية و استخدامات دالة بيتا .؟

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	32

تمرين	42:

ما هي اهمية توزيع كاي مربع ؟

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	34-33

تمرين	45:

ما هو توزيع ستودنت ؟

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	35-36

تمرين	48:

ما اهمية توزيع فيشر ؟

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	37

	حل التمرين	1:

نحن هنا بصدد توزيع برنوللي . لماذا ؟

تذكر معي :

توزيع برنولي هو نوع من توزيعات الاحتمالات الذي يصف نموذجًا بسيطًا لتحقيق أو فشل حدثين ممكنين.

يُستخدم هذا التوزيع عندما يكون هناك اثنان فقط من النتائج الممكنة للحدث، مثل النجاح أو الفشل، وهلم جرا.

صيغة توزيع برنولي:

$$P(X=x)=p^{x}.(1-p)^{1-x}$$

بإجراء عملية التعويض نجد :

$$P(X=1)=0,3^{1}.(1-0,3)^{1-1}$$
$$P(X=1)=0,3$$

لاحظ معي و تذكر:

التوزيع البرنولي يُستخدم كقاعدة بناء للتوزيع الثنائي ، الذي يصف عدد مرات النجاح في سلسلة من التجارب البرنولية

	ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	2: ص :

	تمرين	2:

لماذا سمي توزيع برنوللي بمحاولة برنوللي .؟

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	17

	تمرين	3:

متى يكون توزيع برنوللي توزيع منتظم .؟

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	17

	تمرين	4:

هناك نوعان من التوزيعات المنتظمة فما هما ؟

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	17

تمرين	5:

في حالة توزيع برنوللي : بيانيا ماهو الحد الأقصى لعدد الأعمدة التي يمكن إدراجها .

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	17

حل التمرين	6:

نحن هنا بصدد توزيع ثنائي . لماذا ؟

تذكر معي :

التوزيع الثنائي هو نوع من توزيعات الاحتمالات الذي يصف عدد المرات التي يحدث فيها حدثان ممكنان (مثل النجاح والفشل) في عدد معين من التجارب المستقلة والمتماثلة، حيث يكون احتمال حدوث الحدث ثابتًا في كل تجربة.

صيغة التوزيع الثنائي هي كالتالي :

$$P(X=x)=C_n^x.p^x.q^{n-x}$$

بإجراء عملية التعويض نجد :

$$P(X=3)=C_5^3.(0,4)^3.(0,6)^{5-3}$$

$$P(X=3)=10.(0,4)^3.(0,6)^2$$

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	7: ص :

تمرين	7:

متى نعرف اننا بصدد التوزيع الثنائي ؟ (بعبارة اخرى : ما هي شروط تطبيق التوزيع الثنائي ؟)

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	17

تمرين	8:

ما هو التوزيع الناتج عند تكرار محاولة برنوللي ؟

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	17

تمرين	9:

إذا كان احتمال إصابة الهدف لشخص ما هو 1/5 أتيحت له فرصة الرماية في 10 محاولات

المطلوب :

1- ما هو احتمال إصابة الهدف مرتين على الأكثر
2- احتمال إصابة الهدف مرة واحدة
3- احسب التوقع و التباين ل م.ع X

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	18

تمرين	10:

وجد في إنتاج أحد المصانع أنه من بين 1000 وحدة إنتاج يوجد 150 وحدة معيبة.

أخذت عينة بإرجاع مكونة من 5 وحدات، أوجد الاحتمالات التالية:

1- **الوحدات المسحوبة كلها سليمة**
2- **على الأكثر توجد واحدة معيبة**
3- **على الأقل توجد وحدتان معيبتان**

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	18

حل التمرين	11:

نحن هنا بصدد توزيع بواسون . لماذا ؟

تذكر معي :

توزيع بواسون هو نوع من توزيعات الاحتمالات الذي يستخدم لوصف عدد الأحداث النادرة التي تحدث في فترة زمنية أو مكان محدد. يحمل اسمه من الرياضي الفرنسي سيمون دي بواسون S.Poisson.

يكون التوزيع بواسون مناسبًا عندما تكون الأحداث نادرة، وعندما تكون هناك استقلالية بين الفترات الزمنية أو المناطق.

و نتذكر ان صيغة توزيع بواسون هي كالتالي:

$$P(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}$$

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}$$

وبالتعويض في الصيغة توزيع بواسون نجد :

$$P(X=2)=\frac{e^{-0,5}\,.\,0,5^{2}}{2!}$$

	ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	12: ص :

تمرين 12:

هناك تسمية خاصة وذات دلالة لتوزيع بواسون ، فما هي ؟

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	19

تمرين 13:

هناك شروط لتوزيع كلا من الثنائي (تمرين سابق هنا) و البواسوني , فما هي الاختلافات بينهما ؟

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	19

تمرين 14:

1- ماهي شروط تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع البواسوني ؟

2- في حال عد وجود جداول توزيع بواسون ، هل للتقريب معنا .؟ علل الإجابة

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	19

تمرين 15:

فى كمية كبيرة من القطع المصنعة بمعمل ما ، لوحظ أن بها نسبة 0.3% من القطع المعيبة. أخذت منه عينة عشوائية حجمها 350 قطعة بإرجاع.

المطلوب : احسب الاحتمالات الآتية:

1) وجود قطعة معيبة

2) وجود قطعتان معيبتان

3) عدم وجود أية قطع معيبة

4) وجود على الأكثر وحدتان معيبتان

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	19-20

تمرين	16:

إذا كان عدد الأخطاء المطبعية فى كتاب يتكون من 600 صفحة هو 50 خطأ فإذا كانت الأخطاء تتوزع توزيعا عشوائيا. فما احتمال إذا أختيرت 10 صفحات عشوائيا أن لا تحتوى على أخطاء.

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	20

تمرين	17:

ما هو الفرق بين توزيع الثنائي و توزيع بواسون ؟

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	20

حل التمرين	18:

هنا نستخدم صيغة توزيع الهندسي : لماذا ؟

تذكر معي :

قانون التوزيع الهندسي(Geometric Distribution) هو نوع من توزيعات الاحتمالات، ويتعلق بحساب الاحتمالات للأحداث المتتالية المستقلة حتى يحدث حدث معين. في هذا السياق، يشير القانون إلى أن الاحتمالات تتغير مع الوقت بناءً على النجاح أو الفشل في كل محاولة.

بتعبير اخر

توزيع الهندسي هو نوع من توزيعات الاحتمالات يُستخدم لوصف عدد المحاولات الفاشلة التي تحدث قبل أن يحدث حدث ناجح في سلسلة من التجارب الاستقلال.

لاحظ معي :

ا- يُفترض في هذا التوزيع أن الاحتمالية لحدوث الحدث الناجح هي ثابتة في كل محاولة.

ب - يستخدم التوزيع الهندسي في العديد من المجالات، حيث يمكن استخدامه لنمذجة الأحداث الفاشلة قبل حدوث نجاح في سلسلة متكررة من الفحوص أو الأحداث.

و يعرف بالصيغة التالية :

$$P(X=x)=(1-p)^{x-1}.p$$

P هو احتمال حدوث الحادث نجاح في المحاولة x

X عدد المحاولات الفاشلة قبل حدوث الحدث الناجح

و بالتعويض في صيغة التوزيع الهندسي نجد :

$$P(X=5)=(1-0,2)^{5-1}.0,2$$

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	19: ص :	

تمرين	**19:**

هناك فرق بين فضاء إمكانات التوزيع الثنائي و الهندسي . فيما يتجلى هذا الفرق .؟

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	**الحل: ص:**	21

تمرين	**20:**

تشير الإحصائيات إلى أن المتوسط الزمني الذي يمضيه الطلاب الجدد في حضور المحاضرات الجامعية قبل تخلفهم عن الدورة الدراسية الأولى هو 8 محاضرات.

المطلوب :

1- ما هو احتمال أن يتخلف طالب جديد عن المحاضرة الأولى؟

2- ما هو الوقت المتوقع الذي يمضيه الطالب الجديد قبل أن يتخلف عن المحاضرة الثانية؟

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	**الحل: ص:**	21

تمرين	**21:**

منتجات الة ما لديها 3% منها تالفة (غير صالحة)

ما هو احتمال :

1- ان يكون اول منتج تالف يظهر في البند الخامس المفحوص ؟

2-ان يكون أول منتج تالف يظهر في البنود الخمسة الأوائل المفحوصة؟

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	**الحل: ص:**	21

تمرين	**22:**

ما هو الفرق بين التوزيع الثنائي و التوزيع الهندسي

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	**الحل: ص:**	21

حل التمرين	23:

هنا سيتم اعتماد التوزيع فوق الهندسي . لماذا ؟

تذكر معي :

التوزيع فوق الهندسي (الهايبرجيومتري) (Hypergeometric Distribution) هو نوع آخر من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة .

يستخدم لوصف الاحتمالات في العمليات التي تشمل سحب عينة دون ارجاع من مجموعة محددة.

عموما :

يُستخدم هذا التوزيع عندما يكون لدينا مجموعة محددة من العناصر، ونقوم بسحب عدد محدد من هذه العناصر دون إعادة وضعها في المجموعة (دون إرجاعها).

صيغة التوزيع الهايبرجيومتري هي كالتالي:

$$P(X=x)=\frac{C_M^x \cdot C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$$

M هو إجمالي عدد العناصر الناجحة (التي تحمل الصفة محل الدراسة) في المجموعة.

N هو إجمالي عدد العناصر في المجموعة.

n هو حجم العينة المسحوبة .

x هو عدد العناصر الناجحة المطلوبة في العينة.

و بصب مختلف الأرقام في صيغة التوزيع فوق الهندسي نجد :

$$P(X=4)=\frac{C_{10}^4 \cdot C_{25-10}^{7-4}}{C_{25}^7}=\frac{C_{10}^4 \cdot C_{15}^3}{C_{25}^7}$$

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	24: ص :

تمرين	24:

وصلت إلى مخازن أحد المؤسسات طلبية تتكون من 20 مصباحا من نوع خاص، منها 5 تالفة ولا نستطيع تمييزها من الصالحة، قام مراقب النوعية بالمؤسسة بسحب 10 مصابيح لأجل معاينتها،

المطلوب :

1- ما هو احتمال أن يجد مصباحين تالفين ؟

2- أحسب التوقع الرياضي والتباين لعدد المصابيح التالفة.

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	22

تمرين	25:

ما هو الفرق بين التوزيع الهندسي و التوزيع فوق الهندسي ؟

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	22

حل التمرين	26:

بعد وضعه يتم حله ,,,

تمرين	27:

يصل خالد كل صباح بين الساعة 7 و 7 و45 دقيقة عند جمال من اجل شرب قهوة .

*المطلوب :

1- بفرض ان خالد لا يأتي خارج هذا المجال و قد يصل في أي لحظة بنفس الحظ . ما هي الكثافة الاحتمالية المقابلة للمتغير العشوائي " زمن وصول خالد " .

2 - احسب احتمال ان يصل أحمد عند جمال :

أ- بعد الساعة 7 و نصف(30-7) ،ب-قبل الساعة 7و10دقائق ،ج- بين الساعة 7و20 دقيقة و 7و22 دقيقة ، د- على الساعة 7و نصف تماما .

3- احسب متوسط ساعة و صول خالد .

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	22-23

تمرين	28:

في إطار تنظيم المرور بالمدينة وتحسين ظروف المواطنين قررت الهيئة المعنية بالبلدية ضرورة مرور الباص بمحطة محددة كل 15 دقيقة . مواطن يصل عادة إلى هذه المحطة المحددة بين الساعة 7 و 7 و نصف .بفرض ان المتغير العشوائي X يعبر عن وصل المواطن إلى هذه المحطة موزع بصورة منتظمة ضمن المجال [30 , 0]

* المطلوب :

1- ما هو احتمال أن ينتظر المواطن اقل من 5 دقائق وصول الباص الموالي

2- ما هو احتمال أن ينتظر المواطن أكثر من 10 دقائق وصول الباص الموالي .

3- أحسب توقع و تباين المتغير العشوائي X

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	24

تمرين :29

تصل باصات نقل الركاب لمنطقة معينة على التتابع باص بعد باص كل 20 دقيقة بدءاً من الساعة السادسة صباحاً، فيصل أحدها عند الساعة السادسة صباحاً ويصل آخر عند الساعة السادسة والثلث وآخر عند السادسة وأربعين دقيقة وهكذا. ...

بفرض ان خالد وصل إلى المنطقة خلال أول أربعين دقيقة عمل لتلك الباصات

فالمطلوب تحديد احتمال انتظار خالد.

1- أقل من خمس دقائق ليصل الباص فيصعد فيه.

2- أكثر من 15 دقيقة ليصل الباص فيصعد فيه.

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	25-24

تمرين :31

بفرض إن طول المكالمة الهاتفية X بالدقائق يتبع التوزيع الأسي بالمعلمة $\boldsymbol{\theta = \frac{1}{10}}$ فإذا وصل أحد الأشخاص إلى كشك الهاتف العام في لحظة ما .

المطلوب:

1. ما هو احتمال أن ينتظر أكثر من 10 دقائق؟
2. ما هو احتمال أن ينتظر بين 10 و 20 دقيقة؟

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	26

تمرين :33

إذا كانت درجات حاصل الذكاء تتوزع طبيعيا بمتوسط يساوى 100 وانحراف معيارى يساوى 15، فما نسبة الناس ذوى درجة الذكاء:

أ- فوق 125. ب- تحت 80. ج. بين 70 و 130.

لنفرض أن الحكومة تقدم تعليما خاصا للخمسة فى المائة الأدنى فى حاصل ذكائهم. وتقدم تعليما جامعيا للسبعة فى المائة الأعلى فى حاصل ذكائهم. أوجد القيم المعيارية المقابلة لهذه النسب ثم استنتج الحدود الفاصلة فى درجات حاصل الذكاء لأولئك الذين يتطلبون تعليما خاصا، ولأولئك الذين يدخلون الجامعة.

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	29-28

تمرين	34:

بفرض ان الدخل الشهري للأسر في أحدى ولايات الوطن يتبع توزيع طبيعي متوسطه **80** ألف د.ج ، وتباينه **900** د.ج

المطلوب:

عبر عن معالم توزيع المتغير العشوائي الممثل للدخل في الولاية المعنية

1- ادرج تابع التوزيع الاحتمالي ,

2- ما هي نسبة الأسر التي يقل دخلها، في الولاية المعنية، عن**60** ألف

3- ما هو الدخل الذي أقل منه **0.975** من الدخول؟

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	29- 30

تمرين	36:

أذكر 4 خصائص لدالة جاما

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	31

تمرين	37:

احسب ما يلي : 1- $$\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}$$	2- $$\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

3-.أوجد قيمة التكامل التالي باستخدام خواص جاما:	$$\int_0^{\infty} x^3.e^{-x}dx$$

1-.أوجد قيمة التكامل التالي باستخدام خواص جاما:	$$\int_0^{\infty} x^6.e^{-2x}dx$$

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	31- 32

تمرين 39:

هناك خاصيتين أساسيتين تتمتع بهما دالة بيتا ، فما هما ؟

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة | الحل: ص: 32

تمرين 40:

اثبت أن $B(m,n) = B(n,m)$

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة | الحل: ص: 33

تمرين 41:

أوجد قيمة التكامل التالي باستخدام دالتي جاما و بيتا .

$$\int_0^1 x^3(1-x)\,dx$$

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة | الحل: ص: 33

تمرين 43:

لنفرض اننا سحبنا عينة بحجم $k = 13$ لمن مجتمع يتبع توزيع كاي مربع بدرجة .

المطلوب :

1- احسب $P(\chi^2 > 14,85)$
2- احسب $P(\chi^2 < 23,34)$
3- $P(18,55 < \chi^2 < 32,91)$
4- احسب التوقع الرياضي و التبان لهذا م, ع

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة | الحل: ص: 34

	تمرين	44:

بفرض ان متغير عشوائي يتبع توزيع كاي مربع ب 10 درجات حرية .

احسب ما يلي :

-1 .

$P\left(\chi^{2} \geq 3,25\right)$ طبعا بإمكاننا كتابة نفس السؤال كما يلي : $P\left(\chi^{2}_{(10)} \geq 3,25\right)$

-2 ;

$$P\left(\chi^{2}_{(10)} \leq 6,74\right)$$

-3 :

$$P\left(2,56 \leq \chi^{2}_{(10)} \leq 4,87\right)$$

-4 .

$$P\left(\chi^{2}_{(10)} = 3,94\right)$$

يجب الاطلاع على الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	35

	تمرين	46:

هناك اختلاف جوهري و أساسي بين التوزيع الطبيعي و توزيع ستودنت , فما هو ؟

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	36

	تمرين	47:

ما اهمية توزيع ستودنت ؟

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	36

	تمرين	49:

لماذا يفترض في تباين فيشر ان n>4 ، ماذا عساه يحدث لو ان عدد درجات الحرية كان مساو لـ: 3

يجب الاطلاع إلى الحل قبل المواصلة	الحل: ص:	37

حل التمرين	:2

تجد الجواب في كراس المحاضرات ، مع وجود أكثر من تسمية لمصطلح محاولة .

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	3: ص :5

حل التمرين	:3

عندما يكون هناك تساوي بين النجاح و الفشل (p=q=0,5)

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	4: ص : 5

حل التمرين	:4

- توزيع منتظم في حالة م,ع, متقطع ،
- توزيع منتظم في حالة م,ع, مستمر.

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	5: ص : 6

حل التمرين	:5

هناك عمودان فقط ارتفاع كل منهما دالة في القيمة الاحتمالية لكل من النجاح و الفشل (انظر كراس المحاضرات و التطبيقات) .

توقف هنا قليلا !

قبل مواصلة حل التمارين الموالية. يجب العودة و الاطلاع على التمرين رقم : 6 ص: 2

حل التمرين	:7

انظر كراس المحاضر وكذا الملاحظات التي ابديت على الآمتحان الأول في التطبيقات

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	8: ص : 6

حل التمرين	:8

التوزيع الثنائي (انظر ملاحظة توزيع برنوللي التمرين الأول هنا)

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	9: ص : 7

حل التمرين	:9

X متغير عشوائى يمثل عدد مرات النجاح فى إصابة الهدف فى 10 محاولات

$n = 10,\ p = 1/5, q= 4/5 ;\quad x = 0, 1, 2, ..., 10$

$$P(X=x) C_n^x (1/5)^x (4/5)^{10-x} \quad , \quad \Omega x = 0,1,2,...,10$$

- احتمال إصابة الهدف مرتين على الأكثر

أى إحتمال $x = 0\ ,\ x = 1,\ x = 2$

$$P(X \le 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$$

$$P(X \le 2) = C_{10}^0 (1/5)^0 (4/5)^{10} + C_{10}^0 (1/5)^1 (4/5)^9 + C_{10}^2 (1/5)^2 (4/5)^8$$

$$= (0.8)^{10} + 2(0.8)^9 + 1.8(0.8)^8 = 0.6778$$

- احتمال إصابة الهدف مرة واحدة

أى احتمال $x = 1$

$$P(X = 1) = C_{10}^1 (1/5)^1 (4/5)^9$$

3- التوقع والتباين لـ X علما ان له التوزيع B(10, 0.2)

$$E(X) = np = 10(0.2) = 2$$

$$Var(X) = npq = 10(0.2)(0.8) = 1.6$$

	ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	10: ص : 7

حل التمرين	:10

-1 $P(X=0) = 0.4437$

-2 $P(X \le 1) = 0.4437 + 5 \times \mathbf{0.0783} = \mathbf{0.4437} + \mathbf{0.3915} = \mathbf{0.8352}$

-3 $P(X \ge 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1)] = 1 - 0.8325 = 0.1648$ -3

توقف هنا قليلا !

قبل مواصلة حل التمارين الموالية. يجب العودة و الاطلاع على التمرين رقم : 11 ص: 2

حل التمرين	11:

انظر كراس المحاضر وكذا الملاحظات التي ابديت على الامتحان الأول في التطبيقات

رقم مكرر (لا تأثير)

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	12: ص : 8

حل التمرين	12:

التوزيع الثنائي (انظر ملاحظة توزيع برنوللي التمرين الأول هنا)

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	13 ص : 8

حل التمرين	13:

انظر كراس المحاضرات وكذا إجابة الامتحان الجزئي الأول

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	14: ص : 8

حل التمرين	14:

1- الشروط تم ذكرها في محاضرتين مختلفتين انظر كراس المحاضرات وكذا إجابة الامتحان الجزئي الأول

2- الهدف من التقريب هو تفادي الحسابات الطويلة لا اقرب من اجل القيام بحسابات اطول (القيمة الأصلية عند التوزيع الأصلي "

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	15: ص : 8

حل التمرين	15:

عملية سحب العينة تمثل سلسلة من محاولات برنولى عددها n=350

واحتمال أن تكون القطعة معيبة (النجاح) p=0.003

اعطيت لنا كل الدلائل التي اؤكد على ان التوزيع ثنائي

لكن من الواضح n كبيرة و p صغيرة إمكانية التقريب بالبواسوني

$$\lambda = np = 350(0.003) = 1.05$$

بفرض أن X يمثل عدد القطع المعيبة فى العينة له توزيع بواسون

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-1.05}\frac{1.05^x}{x!}$$

1) وجود قطعة معيبة فى العينة

$$P(X=1)=e^{-1.05}\frac{1.05^{1}}{1!}=(\mathbf{0.3499})(1.05)=0.367$$

2) وجود قطعتان معيبتان فى العينة

$$P(X=2)=e^{-1.05}\frac{1.05^{2}}{2!}=(\mathbf{0.3499})(\mathbf{0.55125})=\mathbf{0.193}$$

3) عدم وجود أى قطع معيبة فى العينة

$$P(X=0)=e^{-1.05}\frac{1.05^{0}}{0!}=\mathbf{0.350}$$

4) وجود على الأكثر وحدتان معيبتان

$P(X\leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = 0.350 + 0.367 + 0.193 = 0.91$

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين | 16: ص : 9

حل التمرين 16:

بفرض أن X يمثل عدد الأخطاء فى كل صفحة وأن عدد المحاولات (الصفحات)

تمثل سلسلة من محاولات برنولى عددها $n = 10$ و نسبة الخطأ (النجاح) هى : $p= 50/600 = 0.083$

وعليه فإن : $\lambda=np = 10(0.083) = 0.83$ و بالتالى فإن لـ X توزيع بواسون:

إحتمال لا يوجد أخطاء يساوى $P(X=0) = 0.436$

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين | 17: ص : 9

حل التمرين 17:

باختصار

- يتعلق التوزيع الثنائي بعدد ثابت من المحاولات ذات احتمالية نجاح ثابتة،
- بينما يتعلق توزيع بواسون بعدد لا نهائي من المحاولات ذات معدل حدث ثابت في فترة مستمرة.

لاحظ :

من الناحية العملية، غالبًا ما يستخدم توزيع بواسون كتقدير تقريبي للتوزيع ذي الحدينn كبيرة وp صغيرة، مع = لامبدا = np

توقف هنا قليلا !

قبل مواصلة حل التمارين الموالية.يجب العودة و الاطلاع على التمرين رقم : 18 ص: 3

حل التمرين	19:

يمكنك الرجوع إلى كراس المحاضرات . ستجد ان هذا الفرق فرق جوهري بين التوزيعين .

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين 20: ص : 10

حل التمرين	20:

نحن بصدد توزيع هندسي و متوسط الحدةث للحادث هو 1/8

للحصول على الوقت المتوقع الذي يمضيه الطالب الجديد قبل أن يتخلف عن المحاضرة الثانية

$$E(X)=\frac{1}{P}=\frac{1}{0,125}=8$$

حيث E(X) هو الوقت المتوقع للحدث الأول، و p هو احتمالية حدوث الحدث في محاولة واحدة.

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين 21: ص : 10

حل التمرين	21:

1 -

-P(X=5) = 0,02656

-2

$$P(X\leq 5)=1-0,975^{5}=0,14127$$

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين 22: ص : 10

حل التمرين	22:

باختصار،

قانون التوزيع الثنائي يتعلق بعدد النجاحات في عدد محدد من التجارب،

بينما القانون الهندسي يتعلق بعدد التجارب المطلوبة لتحقيق النجاح الأول.

توقف هنا قليلا !

قبل مواصلة حل التمارين الموالية. يجب العودة و الاطلاع على التمرين رقم : 23 ص: 3

حل التمرين	:24

ليكن X متغيرا عشوائيا متقطعا يمثل عدد المصابيح التالفة في العينة المسحوبة

لدينا المعطيات ومن $N=20\,;\, m=5\,;\, n=10$: والسحب إرجاع بدون كان 10 ومنه: $X \leadsto H(20;5;10)$

$$P(X=2)=\frac{C_5^2 \cdot C_{20-5}^{10-2}}{C_{20}^{10}}=0{,}348$$

-2

$$E(X)=\frac{n.m}{N}=\frac{10\ \text{x}\ 5}{20}=2{,}5$$

التباين:

$$V(X)=\frac{n.m.(N-n).(N-m)}{N^2(N-1)}=\frac{10\ \text{x}\ 5\text{x}(20-10)\text{x}(20-5)}{20^2(20-1)}=0{,}98$$

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	:25 ص : 12

حل التمرين	:25

باختصار،

يكمن الاختلاف الرئيسي في سياق التطبيق وشروط السحب

- يتعلق القانون الهندسي بتسلسل التجارب المستقلة حتى النجاح،
- في حين يتعلق قانون فوق الهندسي " الهيبيرجيوميتري " بالسحب دون إرجاع من مجموعة محدودة.

توقف هنا قليلا !

قبل مواصلة حل التمارين الموالية. يجب العودة و الاطلاع على التمرين رقم : 26 ص: 3

حل التمرين	:27

و ليكن X المتغير العشوائي المقابل لـ: " سلعة وصول خالد ". لا توجد لحظة اكثر ترجبح (تفضيل) عن اللحظات الأخرى، و هذا يعني أن X المتغير العشوائي موزع بصورة متنظمة على المجال : [7 , 7.45′] ، نقول عندها ان X يتبع توزيع منتظم على هذا المجال .

هنا الوحدة المعتمدة هي الساعة و بالتالي يتوجب علينا التعبير عن الدقائق بدلالة هذه الوحدة . (1د= 1/60 س).

صفحة : 23

بإمكاننا إجراء عملية التحويل إلى وحدة :الدقيقة . وعندها يصبح مجال تعريف المتغيرX مثلا $[7\ ,\ 7.75]$.

لنفرض ان X م.ع " زمن وصول خالد معبر عنه بالدقائق ، بعد الساعة 7 ". فيكون مجال تعريف Y هو: $[0\ ,\ 45]$

1°)-أ- احتمال ان يصل خالد عند جمال يعد الساعة 7 و نصف هو :

- بالساعة :

$$P\,(X \geq 7.30')=P(7,5 \leq X \leq 7,75)=\frac{7,75-7,5}{7,75-7}=\frac{0,25}{0,75}=\frac{1}{3}$$

- بالدقائق:

$$P\,(X \geq 7,50)=P(30 \leq X \leq 45)=\frac{45-30}{45-0}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$$

2°) ب- احتمال ان يصل خالد عند جمال قبل الساعة 7 و 10 دقائق هو :

- بالساعة :

$$P\,(X \leq 7.10')=P\left(7 \leq X \leq 7+\frac{10}{60}\right)=\frac{7+\frac{1}{6}-7}{7+\frac{3}{4}-7}=\frac{1}{6}\,x\,\frac{4}{3}=\frac{2}{9}$$

- بالدقائق :

$$P\left(X \leq 7,\frac{10}{60}\right)=P(0 \leq X \leq 10)=\frac{10-0}{45-0}=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$$

°) د- احتمال ان يصل خالد عند جمال عند الساعة 7 الساعة تماما هو :

- بالساعة :

$$P\,(X=7)=P(7.5 \leq X \leq 7.5)=\frac{7.5-7.5}{7.75-7}=\frac{0}{0.75}=0$$

- بالدقائق :

$$(P\,(X=7)=P(30 \leq X \leq 30)=\frac{30-30}{45-0}=\frac{0}{45}=0$$

3- متوسط الزمن المتوقع هو:

$$E(X)=\frac{0+45}{2}=\frac{45}{2}=22.5$$

وهذا يعني أن متوسط زمن وصول خالد هو: 7 و 22 دقيقة و 30ثانية .

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين 28: ص : 12

حل التمرين 28:

. بما ان المتغير العشوائي X منتظم فهذا يعني ان تابع الكثافة يكون كما يلي

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{30} & x\in[0,30]\\ 0 & x\notin[0,30]\end{cases}$$

1- احتمال ان ينتظر اقل من 5 دقائق هو :

لا يكون الانتظار أقل من 5 دقائق إلا في حالتين :

- إذا وصل بين 7و10 دقائق و 7 و 15 دقيقة

- أو وصل بين 7و 25 دقيقة و 7 و 30 دقيقة.

$$- P(10\le X\le 15)+P(25\le X\le 30)=\int_{10}^{15}\frac{1}{30}dx+\int_{25}^{30}\frac{1}{30}dx=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

2- بنفس الطريقة نجد ايضا :

$$P(0\le X\le 5)+P(15\le X\le 20)=\int_{0}^{5}\frac{1}{30}dx+\int_{15}^{20}\frac{1}{30}dx=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

3- لنحسب

- ا - توقع X : - بما ان بداية المجال هي 0 (صفر) فهذا يعني ا ن توقعه هو :

$$E(X)=\frac{a}{2}=\frac{30}{2}=15$$

- ب - تباين X هو :

$$V(X)=\frac{a^2}{12}=\frac{(30)^2}{12}=75$$

29: ص : 13	ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	

حل التمرين 29:

- ليكن X يمثل متغير وقت الوصول خلال أول 40 دقيقة بالمعالم **b = 40 , a = 0** فتكون دالة كثافة

الاحتمال التي تمثل X بالشكل:

$$f(x)=\frac{1}{40}\quad,\quad 0<X<40$$

-

- 1. إن حادثة انتظار الشخص أقل من 5 دقائق ليصل الباص تعني وصول الشخص إما بين الدقيقة الخامسة عشر والعشرين فيصل أول باص فيصعد فيه، أو أن يصل الشخص بين الدقيقة الخامسة والثلاثين والأربعين فيصل ثاني باص ليصعد فيه، فيكون الاحتمال المطلوب عبارة عن:

$$P = P\,[15 < x < 20] + P\,[35 < x < 40]$$

$$= \int_{15}^{20} \frac{1}{40}\,dx + \int_{35}^{40} \frac{1}{40}\,dx = \frac{5}{40} + \frac{5}{40} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

- 2. إن حادثة انتظار الشخص أكثر من 15 دقيقة ليصل الباص فيصعد فيه، تعني وصول الشخص إما في أول خمسة دقائق أو ما بين الدقيقة العشرين والخامسة والعشرين فيكون الاحتمال المطلوب عبارة عن:

$$P = P\,[0 < x < 5] + P\,[20 < x < 25]$$

$$= \int_{0}^{5} \frac{1}{40}\,dx + \int_{20}^{25} \frac{1}{40}\,dx = \frac{5}{40} + \frac{5}{40} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

توقف هنا قليلا !

قبل مواصلة حل التمارين الموالية. يجب العودة و الاطلاع على التمرين رقم : 30 ص: 3

حل التمرين	**30:**

نحن هنا بصدد التوزيع الأسي . لماذا ؟

تذكر معي :

تم تأجيل دراسة هذا التوزيع حتى درسنا دالة جاما و بيتا ثم توزيع كاي مربع (و بينا سبب التأخير : هو حالة خاصة من ...)

تذكر ايضا اننا قلنا :

ان التوزيع الأسي (Exponential Distribution) هو نوع من توزيعات الاحتمال التي تُستخدم لنمذجة وقت الانتظار بين حدوث أحداث تتبع عملية بواقع زمني مستمر.

يُستخدم هذا التوزيع بشكل شائع في الإحصاء و الاحتمالات وتحليل الشبكات والصيانة الصناعية.

هنا الزمن مهم جدالذا يعتمد بكثرة في الدراسات الخاصة بطول مدة اشتغال معدات ومكائن مصنع معين أو دراسة أزمان العطلات والتوقفات لتلك المعدات والمكائن أو الوقت المستغرق لإنجاز عمل معين أو زمن انتظار عمل معين، .

و يعرف بالصيغة التالية :

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda x}\,\theta^{n}}{\sqrt{n}}\,x^{n-1} \qquad , \quad x \geq 0$$

أما عندما $n = 1$ فإن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر X ستدعى بدالة التوزيع الأسي، وتكتب بالشكل:

صفحة : 26

$$f(x) = \theta\ e^{-\theta x} \qquad , \quad x \geq 0$$

لنعد إلى التمرين :

أ-. لندرج تابع كثافة الاحتمال المعبر عن الزمن:

بفرض أن المتغير x يعبر عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل بالدقيقة، أي أن $0 < x < \infty$ ، و قيمة (θ) هي: **0,5** ، يكتب تابع كثافة الاحتمال المعبر عن الزمن على الشكل التالي

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5e^{-0{,}5x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

و الذي يمكن ان نعبر عنه ايضا كما يلي :

$$f(x) = 0.5\ e^{-0.5\ x},\ 0 < x < \infty$$

ب - حساب احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

$$P(x \leq 1) = (1 - e^{-0.5x}) = (1 - e^{-0.5(1)}) = 0.3935$$

	ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	**31: ص : 13**

حل التمرين	**31:**

إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X ستكون بالشكل:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{10}\ e^{-\frac{x}{10}}}$$

1. $P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{10}\ e^{-\frac{x}{10}}\ dx = -\ e^{-\frac{x}{10}} \Big]_{10}^{\infty} = e^{-1} = 0.368$

2. $P(10 < X < 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{10}\ e^{-\frac{x}{10}}\ dx = -\ e^{-\frac{x}{10}} \Big]_{10}^{20} = e^{-1} - e^{-2} = 0.233$

توقف هنا قليلا !

قبل مواصلة حل التمارين الموالية.يجب العودة و الاطلاع على التمرين رقم : 32 ص: 4

حل التمرين	**32:**

نحن بصدد توزيع طبيعي (N(10 ;4 . لماذا ؟

صفحة : 27

تذكر معي :

توزيع الاحتمال الطبيعي، المعروف أيضاً بتوزيع لابلاس –غاوس أو توزيع الكثافة الاحتمالية الطبيعية (Normal Distribution)هو واحد من أكثر توزيعات الاحتمال استخدامًا في الإحصاء وعلم الاحتمالات.

صيغة توزيع الاحتمال الطبيعي:

(تعرف فقط و لا تحفظ في هذه المرحلة من الدراسة الجامعية و بهذا التخصص : الاقتصاد) .

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

تذكر مرة اخرى :

1- يُعرف هذا التوزيع بشكل كامل من خلال متوسطه و انحرافه المعياري.

2- **توزيع الاحتمال الطبيعي يتميز بشكله الجمالي الذي يكون على شكل منحنى جوسياني (جرسي) ويكون لديه قيمة متوسطية وانحراف معياري معينين.**

3- المتوسط :(m)يحدد مكان القمة في منحنى التوزيع.

4- الانحراف المعياري :(σ) يحدد انتشار القيم حول المتوسط. كلما كان الانحراف المعياري أكبر، زادت انتشار البيانات.

5- توزيع الاحتمال الطبيعي يظهر في العديد من الظواهر الطبيعية والاجتماعية، ويستخدم في تحليل البيانات والنمذجة الإحصائية.

المنحنى متماثل حول خط المستقيم $X = m$

المحور X هو خط تقاربى للمنحنى الطبيعى

المنوال والوسيط والوسط الحسابى تساوى m والتباين يساوى σ^2

نقط انقلاب المنحنى هى : $x = \mu - \sigma , x = \mu + \sigma$

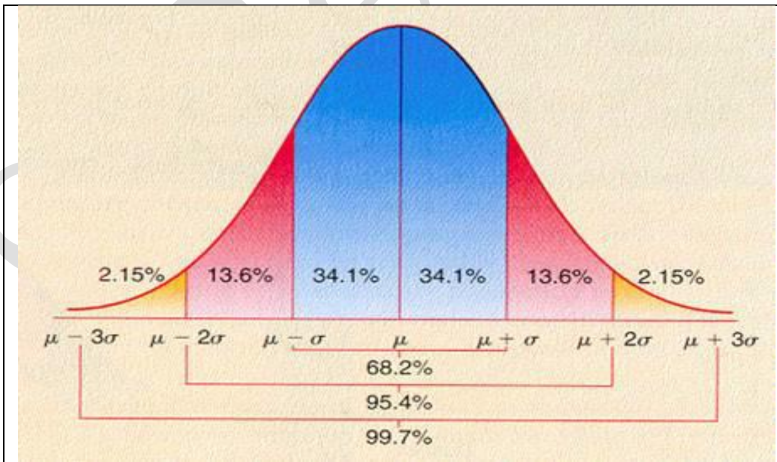
المساحة الكلية تحت المنحنى الطبيعى تساوى الواحد الصحيح

نسبة المساحة بين:

$x = m - \sigma , x = m + \sigma$ هى 68.27%

$x = m - 2\sigma , x = m + 2\sigma$ هى 95.5%

$x = m - 3\sigma , x = m + 3\sigma$ هى 99.7%



صفحة : 28

باستخدام الصيغة المقابلة للتوزيع الطبيعي المعياري :

لدينا $X \sim N(10, 4)$ وبالتالي $m = 10 , \sigma^2 = 4 \longrightarrow \sigma = 2$

وبفرض أن $U = (X - 10)/2$ فإن : $U \sim N(0, 1)$

-1

$$P(-3 < X < 12) = P((-3 -10)/2 < (X -10)/2 < (12 -10)/2)$$

$$P(-3 < X < 12) = P(-6.5 < U < 1)$$

$$= F(1) - F(-6.5)$$

ومنه :

$$P(-6.5 < U < 1) = F(1) - F(-6.5) = 0.8413 - 0 = 0.8413$$

-2

$$P(|X| \leq 5) = P(-5 \leq X \leq 5) = P((-5-10)/2 \leq U \leq (5-10)/2)$$

$$= P(-7.5 \leq U \leq -2.5)$$

$$= P(2.5 \leq U \leq 7.5)$$

$$= F(7.5) - F(2.5)$$

$$F(7.5) - F\ 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

33: ص : 13	ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	

:33	حل التمرين	

لنرمز لدرجة حاصل الذكاء بـ X فلدينا بالفرض أن $X \sim N(100, 125)$

و بفرض أن $U = (X - 10)/2$ فإن $U \sim N(0, 1)$ والمطلوب :

أ- فوق 125

ملاحظة

، هنا اعتماد التمثيل البياني لمختلف المساحات (الأسئلة) تماشيا مع متطلبات التمرين ضروري جدا.

$$P(X > 125) = P(U > (125-100)/15) = P(U > 1.67)$$

$$= 1 - P(U < 1.67)$$

$$= 1 - F(1.67)$$

$$= 1 - 0.9525 = 0.0475$$

والنسبة المطلوبة هى 4.75 % ، اي : $P(U > 1.67) = 1 - P(U < 1.67)$

ويتم إيجاد $(P(U < 1.67))$ من جدول احصائى محسوب التكاملات فيه مسبقا لتوفير مجهود الحسابات

$P(U > 1.67) = 1 - P(U < 1.67) = 1 – 0.9525 = 0.0475$

ب - تحت 80

$$P(X < 80) = P(U < (80-100)/15) = P(U < – 1.33)$$
$$= 1 – P(U< 1.67)$$
$$= 1 – F (1.67)$$
$$= 1 – 0.9082 = 0.0918$$

والنسبة المطلوبة هى 9.18 %

$P(U < -1.33)$

ونظرا لتماثل المنحنى أن :

$$P(U < -1.33) = P(U > 1.33)$$
$$= 1 - P(U < 1.33)$$

ويتم إيجاد المساحة> $(P(U < 1.33))$ من الجدول

$$P(U < -1.33) = P(U > 1.33) = 1 - P(U < 1.33) = 1 – 0.9082 = 0.0918$$

ج- بين 70 و 130

$$P(70<X < 130) = P((70 - 100)/15 < U < (130-100)/15) = P(-2 < U < 2)$$
$$= F (2) – F (– 2)$$
$$= F (2) – [1 - F (2)] = F (2) – 1 + F (2)$$
$$= 2 F (2) – 1$$

والنسبة المطلوبة هى 95.44 %

$$P(-2 < U < 2) = 2 F (2) – 1 = 2 (0.9772) – 1 = 1.9544 - 1= 0.9544$$

	ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	34: ص : 14

حل التمرين 34:

1- لنعبر عن معالم توزيع المتغير محل الدراسة :

بفرض أن X متغير عشوائي يعبر عن الدخل الشهري بالألاف د.ج، وهو يتبع التوزيع الطبيعي،

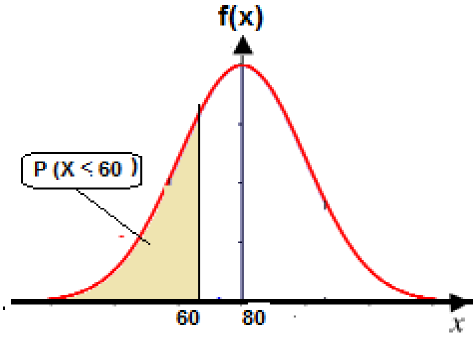
ومعالمه هي:

أ- المتوسط $E(X) = m = 80$

ب- التباين هو: $V(X) = \sigma^2 = 900$ أي أن : $X \sim N(80,30)$

شكل تابع التوزيع الاحتمالي:

$$f(x) = \frac{1}{30\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-80}{30}\right)^2} , -\infty < x < \infty ,$$



2-نسبة الأسر التي يقل دخلها عن **60** ألف د.ج

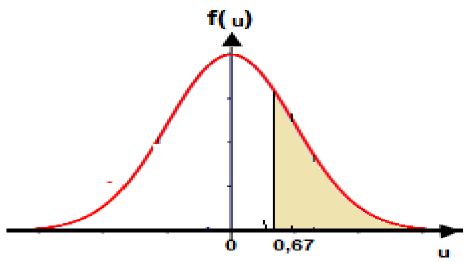
هي:

$P(X \langle 60)$

ويتبع الخطوات المذكورة سابقا في

حساب الاحتمال كما يلي:

$$P(X < 60) = p\left(U < \frac{x-m}{\sigma}\right) = P\left(U < \frac{60-80}{30}\right) = P(U < -0.67) = F(-0.67)$$



وبالكشف مباشرة عن هذه القيمة في جدول التوزيع الطبيعي المعياري

و باعتماد التناظر و المتمم ، نجد أن :

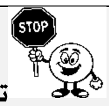
$$P(x < 60) = 1 - P(u < 0.67) = 1 - 0,7486$$
$$= 0.2514$$

3-الدخل الذي أقل منه **0.975** من الدخول: في هذه الحالة يبحث عن قيمة المتغير (x) الذي أقل منه **0.975** ، بفرض أن هذا المتغير هو (x_1) ، فإن :

$$P(x < x_1) = P\left(U < \frac{x_1 - 80}{30}\right) = 0.975$$

بالكشف بطريقة عكسية ، حيث نبحث عن المساحة 0.9750 نجدها تقع عند تقاطع الصف 1.9 ، والعمود 06. أي أن قيمة $u = 1.96$ ، ويكون :

$1.96 = \frac{x_1 - 80}{30}$, $\Leftrightarrow$ $x_1 - 80 = 30*(1.96) \Rightarrow x_1 = 30*(1.96) + 80 = 138.8$ إذا الدخل هو **138.8** ألف د.ج في الشهر.



توقف هنا قليلا !

قبل مواصلة حل التمارين الموالية.يجب العودة و الاطلاع على التمرين رقم :35 ص: 4

حل التمرين	35:

في المجمل،

يمكن القول إن دالة جاما وتوزيع Gamma تُستخدم لتوسيع إمكانيات نظرية الاحتمالات لتشمل الأعداد الحقيقية والمركبة، وتوفير إطار رياضي يتيح التعامل مع مجموعة واسعة من التوزيعات في نظرية الاحتمالات.وعلى رأسها :

- توزيع كاي مربع ،
- توزيع ستودنت
- توزيع فيشر

كما

تظهر توزيعات Gamma أحيانًا في نماذج الانحدار والتحليل الإحصائي، كما تستخدم على نطاق واسع في نماذج الاحتمالات المرتبطة بزمن الانتظار. على سبيل المثال، يمكن استخدامه في تحليل وتوزيع أوقات الانتظار للأحداث.

(يمكن ايضا الرجوع لكراس المحاضرات للوقوف على بعض مجالات استخدام دالةو توزيع جاما)

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	36: ص : 14

حل التمرين	36:

انظر كراس المحاظرات هناك 6 خصائص تم رصدها تماشيا مع احتياجتنا في البراهين لاحقا للمحاضرة)

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	37: ص : 14

حل التمرين	37:

1-,

$$\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}=\frac{5!}{2*2!}=\frac{5*4*3*2*1}{2*2*1}=30$$

2-,

$$\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{\frac{3}{2}*\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{3}{4}$$

2- نعرف ان :

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}.e^{-x}dx \quad / \quad n>0$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}.e^{-x}dx = \int_0^\infty x^3.e^{-x}dx \Rightarrow n = 4 \Leftrightarrow \Gamma(4) = 3! = 6$$

3- نعرف أن

$$\int_0^\infty x^6.e^{-2x}dx$$

نلاحظ أن أس e مغاير لتركيبة دالة جامة ، ولنضع $2x = y$ فتصبحالدالة المعطاة $\int_0^\infty x^6.e^{-2x}dx$ من الشكل التالي :

$$\int_0^\infty \left(\frac{y}{2}\right)^6.e^{-y}dy$$

و منه

$$\int_0^\infty \left(\frac{y}{2}\right)^6.e^{-y}dy = \frac{1}{2^7}\int_0^\infty y^{7-1}.e^{-y}dy \Rightarrow \frac{1}{2^7}\Gamma(7) = \frac{6!}{2^7} = \frac{45}{8}$$

توقف هنا قليلا !

قبل مواصلة حل التمارين الموالية. يجب العودة و الاطلاع على التمرين رقم :38ص: 4

حل التمرين :38

تكتسي دالة بيتا على العديد من الخصائص والتطبيقات، وهي مفيدة في تحليل الاحتمالات والإحصاءات، خاصة فيما يتعلق بتوزيعات احتمالية مرتبطة بنجاح وفشل، أو في تحديد معاملات توزيعات أخرى

1- . انظر كراس المحاضرات هناك نقاط اخرى

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين :39 ص : 15

حل التمرين :39

الخاصية الأولى يمكن الوقوف عليها في كراس المحاضرات و الثانية في كراس التطبيقات

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين :40 ص : 15

	حل التمرين	40:

نعرف و انطلاقا من العلاقة بين جاما و بيتا ان :

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

فتغير نواقع درجات الحرية لكل من

m و n

$$B(n,m) = \frac{\Gamma(n).\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$$

لايؤثر في النتيجة تماشيا مع خاصية الحياد في الجداء و التبديلية في الجمع . فالنتيجة ستكون واحدة .

(ببساطة و دون تعقيد).

	ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	41: ص : 15

	حل التمرين	41:

باعتماد دالو بيتا يمكننا ان نكتب ا

$$\int_0^1 x^3(1-x)\,dx \Rightarrow B((3+1);(1+1))$$

باعتماد دالة قاما و بيتا يمكننا ان نكتب :

$$B(4;2) = \frac{\Gamma(4).\Gamma(2)}{\Gamma(4+2)}$$

باستخدام خواص جاما يمكننا ان نكتب :

$$B(4;2) = \frac{\Gamma(4).\Gamma(2)}{\Gamma(4+2)} = \frac{3!*1!}{5!} = \frac{1}{20}$$

STOP

توقف هنا قليلا !

قبل مواصلة حل التمارين الموالية. يجب العودة و الاطلاع على التمرين رقم :42ص: 4

	حل التمرين	42:

1- ارجع لكراس المحاضرات

2- يتمتع توزيع كاي مربع بأهمية كبيرة في مجالات متعددة من الإحصاءات ونظرية الاحتمالات.

إليك بعض الأسباب التي تجعل توزيع كاي المربع مهمًا

اختبار اختلاف التوزيع

يُستخدم توزيع كاي مربع في اختبار اختلاف التوزيع(Goodness of Fit Test) ، الذي يستخدم لمعرفة مدى تطابق توزيع مجموعة من البيانات مع توزيع محدد.

يمكن استخدامه للتحقق من مدى توزيع البيانات الفعلي يتماشى مع توزيع مفترض . (S4)

- اختبار استقلال المتغيرات :

يستخدم توزيع كاي مربع في اختبار استقلال المتغيرات في جدول اتصالات .(Contingency Table)

هذا الاختبار يُستخدم لتحديد ما إذا كانت هناك علاقة إحصائية بين متغيرين نوعيين . . (S4)

- تحليل الانحدار

يُستخدم توزيع كاي مربع في تحليل الانحدار اللوجستي، حيث يتم استخدامه لاختبار فرضيات حول المعاملات في نماذج الانحدار اللوجستي.

تلخيصًا،

توزيع كاي المربع يلعب دورًا حاسمًا في الاختبارات الإحصائية والتحليلات في مجموعة واسعة من المجالات، مما يسهم في فهم وتفسير العلاقات والتغيرات في البيانات.

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	43: ص : 15

حل التمرين	43:

1- $$P(\chi^2 > 14,85) = 0,25$$

-4

$$P(\chi^2 < 23,34) = 1 - P(\chi^2 > 23,34) = 1 - 0,025 = 0,975$$

-5

$$\begin{aligned} P(18,55 < \chi^2 < 32,91) &= P(\chi^2 < 32,91) - P(\chi^2 < 18,55) \\ &= 1 - [P(\chi^2 > 32,91)] - [1 - P(\chi^2 > 18,55)] \\ &= [P(\chi^2 > 18,55)] - [P(\chi^2 > 32,91)] \\ &= \quad 0,10 \quad - \quad 0,001 \\ &= 0,099 \end{aligned}$$

-4 التوقع $E(X) = 12$ و هو يعكس عدد درجات الحرية اي حجم العينة ناقص 1

التباين $V(X) = 2 \times 12 = 24$ و هو يمثل ضعف التوقع 2n .

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	44: ص : 16

حل التمرين :44

-1 ,

$$P\left(\chi^2_{(10)} \geq 3{,}25\right) = 0{,}975$$

,-2

$$P\left(\chi^2_{(10)} \leq 6{,}74\right) = 1 - P\left(\chi^2_{(10)} > 6{,}74\right)$$
$$= 1 - 0{,}75$$
$$= 0{,}25$$

3 -,

$$\left(2{,}56 \leq \chi^2_{(10)} \leq 4{,}87\right) = 1 - P\left(\chi^2_{(10)} > 2{,}56\right) - \left(1 - P\left(\chi^2_{(10)} > 3{,}94\right)\right)$$
$$= (0{,}99) - (0{,}95)$$
$$= 0{,}05$$

.-4'

$$P\left(\chi^2_{(10)} = 3{,}94\right)$$

"القاعدة أن قيم إحتمال المتغير العشوائي المتصل، تكون معدومة مهما تكون قيمة هذا المتغير، و عليه :

$$P\left(\chi^2_{(10)} = 3{,}94\right) = 0$$

توقف هنا قليلا !

قبل مواصلة حل التمارين الموالية. يجب العودة و الاطلاع على التمرين رقم :45ص: 4

حل التمرين :45

توزيع ستودنت (Student's t-distribution) هو توزيع احتمالات يستخدم للتعامل مع عينات صغيرة من البيانات عندما تكون البيانات تقريبًا ذات توزيع طبيعي ولكن حجم العينة صغير.

يُستخدم عادة في تحليل البيانات الإحصائية واختبار الفروض الإحصائية.

تأخذ توزيعات العينات الصغيرة شكل قريب من توزيعات طبيعية، لكن هناك تفاوتات في التوزيع ناتجة عن صغر حجم العينة.

ويتميز بوجود معامل واحد يسمى درجات الحرية.(n)

دالة كثافة الاحتمال لتوزيع ستودنت ...... توزيع معرف بالصيغة :

$$f_n(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\times\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\times\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

تذكر معي

قلنا في هذه المرحلة تعرف هده الصيغة عند رؤيتها لا تحفظ او ......

	ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	46: ص : 16

	حل التمرين	46:

انظر كراس المحاضرات تجد الجواب بالتفصيل

	ضروري الانتقال الأن إلى التمرين	47: ص : 16

	حل التمرين	47:

توزيع ستودنت يمثل أهمية كبيرة في الإحصاءات ونظرية الاحتمالات، وذلك لعدة أسباب:

- **عينات صغيرة**

توزيع ستودنت يُستخدم عندما يكون لدينا عينات صغيرة من البيانات (عادة عندما تكون أقل من 30). في حالة العينات الكبيرة، يميل توزيع ستودنت إلى توزيع طبيعي (S4) .

- **تقديرات للمتغيرات المجهولة :**

يتم استخدام توزيع ستودنت في تقدير المتغيرات المجهولة، مثل المتوسط والانحراف المعياري، عندما نعتمد على العينات الصغيرة.

- **اختبارات الفرضيات :**

يستخدم توزيع ستودنت في اختبار الفرضيات(Hypothesis Testing) ، خاصةً عند قيامنا بمقارنة المتوسطين أو الانحراف المعياري لعينتين مستقلتين. (S4)

- **تحليل الانحراف**

يُستخدم توزيع ستودنت في تحليل الانحراف (ANOVA) الذي يستخدم للمقارنة بين متوسطات عدة مجموعات(S4) .

على العموم

يمكن الوقوف على هذه النقاط في كراس المحاضرات و التي تم شرحها بنوع من التفصيل

توقف هنا قليلا !

قبل مواصلة حل التمارين الموالية.يجب العودة و الاطلاع على التمرين رقم :48ص: 4	

حل التمرين 48:

1- انظر كراس المحاضرات .

2- توزيع فيشر يلعب دورًا حاسمًا في الإحصاءات والتحليل الإحصائي، وذلك لعدة أسباب:

- اختبارات:ANOVA

يُستخدم توزيع فيشر بشكل رئيسي في اختبارات التحليل الطولي(ANOVA) ، حيث يتم استخدامه لتقييم التباين بين متوسطات مجموعات متعددة. يسمح ذلك بمعرفة ما إذا كان هناك فارق إحصائي يُعتبر معنويًا بين المجموعات.

- تقييم التباين:

يُستخدم توزيع فيشر لتقييم التباين في بيانات مختلفة، وهذا يمكن أن يكون مفيدًا في مجموعة متنوعة من المجالات، بما في ذلك البحوث الطبية والعلوم الاجتماعية.

- اختبار فرضيات التحليل الإحصائي:

يُستخدم توزيع فيشر في اختبار فروض حول توزيع البيانات والتباين بين المجموعات. يتيح هذا الاستخدام إجراء تحليل إحصائي قوي لتقدير التأثيرات والعلاقات في البيانات.

بشكل عام،

يسهم توزيع فيشر في فهم وتحليل التباين في البيانات، مما يجعله أداة قيمة في مجال الإحصاءات والبحث العلمي.

ضروري الانتقال الأن إلى التمرين 49: ص : 16

حل التمرين 49:

أنظر كراس المحاضرات . حيث اعطي مثال بنفس العدد (3) . وتم شرح ذلك .

التمرين 50: